
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.01, 621.833.38

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРИВОДЕ
С ЧЕРВЯЧНЫМИ РЕДУКТОРАМИ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РОТОРНЫХ МАШИН**© 2019 г. В. А. Крюков^{1,*}, В. В. Прейс¹¹ Тульский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: va.krukov@gmail.com

Поступила в редакцию 27.11.2017 г.

Принята к публикации 18.02.2019 г.

Рассматриваются вынужденные колебания в электромеханическом приводе с червячным редуктором технологических роторных машин. Определены собственные частоты и построены амплитудно-частотные характеристики на основе двух расчетных моделей: с жесткими звеньями и с учетом упругости звеньев. Приводной асинхронный электродвигатель описывается динамической характеристикой. Сравнение результатов расчетов на основе двух моделей позволило выявить область значений исходных параметров привода, в которой можно использовать зависимости, полученные на основе простейшей расчетной схемы с жесткими звеньями. Это позволит существенно упростить и сократить время синтеза рассматриваемого привода.

Ключевые слова: электромеханический привод, роторные технологические машины, червячная передача, динамика, вынужденные колебания

DOI: 10.1134/S023571191903009X

Введение. Одним из необходимых элементов электромеханического привода машин различного отраслевого назначения является система передаточных механизмов, предназначенная для согласования механических характеристик двигателей и рабочих машин. В качестве передаточных механизмов в настоящее время продолжают широко использоваться червячные передачи, несмотря на их недостатки и все возрастающую конкуренцию со стороны более современных механизмов — планетарных и волновых передач. Червячные редукторы входят в состав привода роторных технологических машин и автоматических роторных линий машиностроительных, пищевых и фармацевтических производств [1, 2]. Стремление компенсировать недостатки червячных передач и расширить область их применения приводит к совершенствованию конструкций известных схем [3], разработке новых схем [4] и необходимости тщательного анализа динамических процессов в машинах с такими передачами.

Наличие больших сил трения в червячных передачах приводит к существенной нелинейности математических моделей, описывающих динамику привода, может являться причиной ряда явлений, принципиально невозможных в линейных системах, что требует особого подхода к составлению и исследованию этих моделей. Работы в этом направлении можно разделить на три группы.

1. Работы, посвященные обобщению общих принципов механики на системы с трением и исследованию свойств нелинейных систем дифференциальных уравнений, описывающих такие системы. У истоков этих работ стоял известный французский

ученый П. Пэнлеве. Далее этим вопросом продолжает заниматься большой ряд зарубежных и отечественных ученых [5–7].

2. Работы, связанные с исследованием самоторможения, возникающего в таких системах, и его использованием в машинах [8, 9].

3. Работы, посвященные анализу динамики технологических машин, роботов, манипуляторов и других устройств с электромеханическим приводом, в состав которого входят червячные редукторы [10–13]. В большинстве этих работ основное внимание уделяется исследованию переходных режимов движения, в которых нелинейные свойства червячной передачи проявляются наиболее ярко. Влияние процессов в электродвигателе на динамику привода не учитывалось или учитывалось с помощью статической характеристики.

В роторных технологических машинах основным режимом движения является режим установившегося движения. Колебания в этом режиме приводят к появлению значительных динамических нагрузок, могут привести к нарушению технологического процесса и зависят не только от свойств передаточного механизма, но и от электромагнитных процессов, протекающих в электродвигателе. Целью настоящей статьи является исследование вынужденных колебаний, возникающих в электромеханическом приводе с червячным редуктором роторных технологических машин под действием периодической технологической нагрузки с учетом свойств приводного асинхронного электродвигателя.

Постановка задачи. Известно, что протекание колебательных процессов в электроприводе с асинхронными электродвигателями определяется не только инерционными и упругими характеристиками механической части системы, но и переходными электромагнитными процессами в самом электродвигателе, которые с достаточной точностью описываются его динамической характеристикой. Причем для сравнительно тихоходных машин, к которым можно отнести и технологические роторные машины с червячным приводом, большее влияние на характеристики колебаний могут оказывать электромагнитные процессы в двигателе, а не упругость звеньев. Поэтому анализ вынужденных колебаний будем проводить в два этапа: 1) исследование вынужденных колебаний для модели с жесткими звеньями при учете динамической характеристики электродвигателя; 2) исследование вынужденных колебаний для модели с упругими звеньями при учете динамической характеристики электродвигателя. Такой подход позволяет выявить свойства динамических процессов в приводе, определяемые применяемым электродвигателем, и определить область применимости результатов, получаемых при использовании более простой модели, не учитывающей упругость звеньев.

Исследование вынужденных колебаний в приводе на основе расчетной модели с жесткими звеньями. Рассматриваемая роторная технологическая машина состоит из электромеханического привода, включающего в себя асинхронный электродвигатель M и червячный редуктор WG , а также рабочей машины роторного типа MT (рис. 1а). На схеме обозначены: J_1, J_2 — моменты инерции ротора двигателя и рабочей машины, соответственно, включающие приведенные к ним моменты инерции промежуточных деталей; M_1 — крутящий момент на валу двигателя; M_2 — момент сил сопротивления, приложенный к рабочей машине, являющийся известной периодической функцией времени; φ_1, φ_2 — угловые координаты валов двигателя и рабочей машины соответственно; $\varphi, \psi, M_\varphi, M_\psi$ — угловые координаты и моменты на входе и выходе червячной кинематической пары.

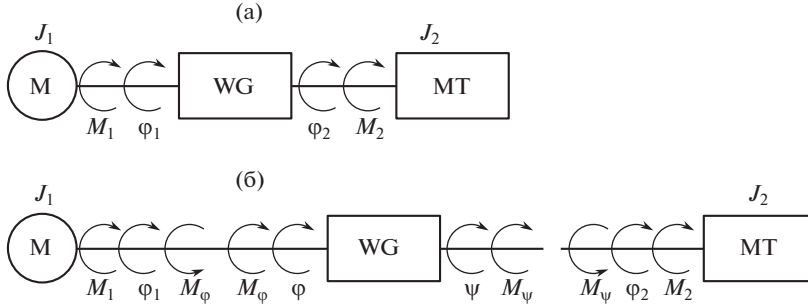


Рис. 1. Расчетная схема привода с жесткими звеньями.

Червячный редуктор описывается известным кинематическим соотношением

$$\varphi = u\psi \quad (1)$$

и силовым передаточным отношением [14]

$$M_\varphi = -\frac{\operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)}{u \operatorname{tg} \lambda} \cdot M_\psi, \quad (2)$$

где u — передаточное число редуктора; λ — делительный угол подъема линии витка червяка; ρ — приведенный угол трения; k_r — коэффициент режима работы червячной пары, зависящий от направлений вращения элементов пары и внутренних сил в зацеплении,

$$k_r(\phi, M_\psi) = \operatorname{sgn} \phi \cdot \operatorname{sgn} M_\psi. \quad (3)$$

При записи (2) принято, что в рассматриваемом режиме скорость скольжения в зацеплении не меняется и можно принять $\rho = \operatorname{const}$.

При работе асинхронного электродвигателя в установившемся режиме связь между угловой скоростью ротора и моментом, развиваемым электродвигателем, с достаточной точностью можно представить его динамической характеристикой в виде [14]

$$T_e \dot{M}_1 + M_1 = M_{10} - k\phi_1, \quad (4)$$

где T_e — электромагнитная постоянная времени электродвигателя; M_{10} , k — параметры статической механической характеристики.

Разделяя расчетную схему на две подсистемы, связанные с помощью червячного редуктора (рис. 1б), причем $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \psi$, записывая их уравнения движения и выполняя необходимые преобразования с учетом (1)–(4), получим математическую модель системы в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно момента двигателя

$$T_e(T_1 + T_2)\ddot{M}_1 + (T_1 + T_2)\dot{M}_1 + M_1 = -\frac{\mu(k_r)}{u} M_2, \quad (5)$$

где $T_1 = J_1/k$, $T_2 = (\mu J_2)/(u^2 k)$ — механические постоянные времени электродвигателя и рабочей машины; $\mu = \mu(k_r)$ — вспомогательная кусочно-линейная функция, определяемая зависимостью

$$\mu(k_r) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\lambda - \rho)/\operatorname{tg} \lambda & \text{при } k_r = +1; \\ \operatorname{tg}(\lambda + \rho)/\operatorname{tg} \lambda & \text{при } k_r = -1. \end{cases}$$

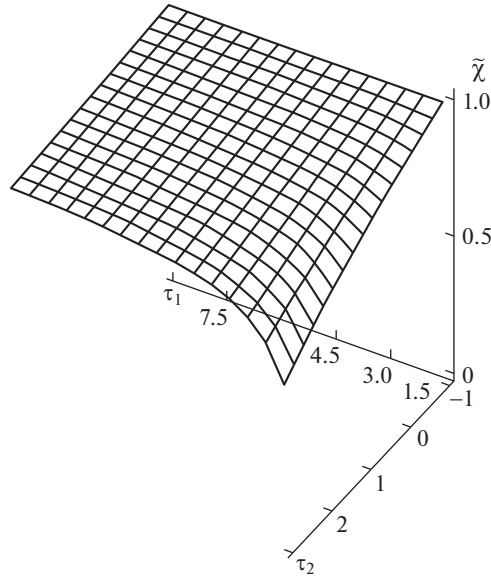


Рис. 2. График зависимости собственной частоты привода от постоянного времени.

Если предположить, что в режиме установившегося движения коэффициент режима не меняется, то уравнение (5) будет линейным, решение которого хорошо известно, и тогда частота собственных колебаний системы

$$\chi = \frac{1}{2T_e} \sqrt{\frac{4T_e}{T_1 + T_2}} - 1. \quad (6)$$

При $4T_e < T_1 + T_2$ собственное движение системы будет аperiodическим. Для анализа зависимости собственной частоты (6) от параметров привода введем безразмерные постоянные времени,

$$\tau_2 = T_2/T_1; \quad \tau_1 = T_e/T_1. \quad (7)$$

Для асинхронных электродвигателей серии 4А по ГОСТ 19523-81 мощностью от 1 до 30 кВт и синхронной частотой вращения 1500 и 3000 об/мин относительная постоянная времени τ_1 находится в пределах от 1.6 до 9.1. Значение относительной постоянной времени рабочей машины τ_2 зависит от вида машины и режима движения. Для рассматриваемого класса машин $\tau_2 = 1-3$ при $k_r = -1$ и $\tau_2 = -1-1$ при $k_r = +1$. Вводя безразмерную частоту $\tilde{\chi} = \chi/\chi_0$, где $\chi_0 = [T_e(T_1 + T_2)]^{-1/2}$ – собственная частота недемпфированной системы, и используя (7), получим

$$\tilde{\chi} = \sqrt{1 - \frac{1 + \tau_2}{4\tau_1}}. \quad (8)$$

Для определенных областей значений относительных постоянных времени $1 + \tau_2 < 4\tau_1$, собственное движение привода будет колебательным.

На рис. 2 представлена зависимость относительной собственной частоты привода $\tilde{\chi}$ от безразмерных постоянных времени τ_1 и τ_2 , построенная на основании (8). Видно,

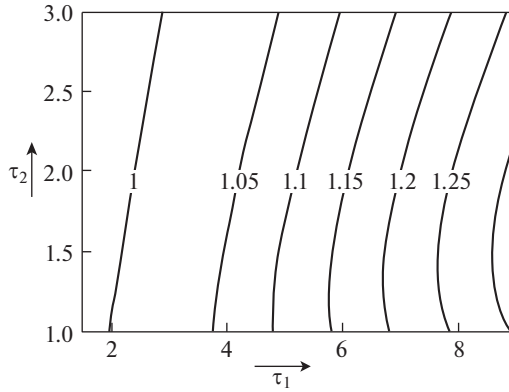


Рис. 3. Линии уровня функции $\max_{\Omega} A_{M_{\Psi}}(\Omega)$.

что $\tilde{\chi}$ монотонно возрастает при увеличении τ_1 и уменьшении τ_2 , находясь в пределах от 0.577 до 1.

При исследовании вынужденных колебаний будем предполагать, что в режиме установившегося движения коэффициент режима k_r не меняется. Это позволяет использовать принцип суперпозиции и ограничиться определением реакции системы на моногармоническое воздействие вида

$$M_2(t) = M_{20} + M_{2a} \cos \Omega t, \quad (9)$$

где M_{20} — постоянная составляющая момента сил сопротивления ($M_{20} < 0$); M_{2a} — амплитуда переменной составляющей; Ω — частота колебаний момента сил сопротивления.

Переходя в уравнении (5) с учетом (1)–(4) к операторной форме записи, а затем к комплексной переменной $p = j\Omega$, и используя (1)–(4) получим амплитудно-частные характеристики (АЧХ) момента M_{Ψ}

$$A_{M_{\Psi}}(\Omega) = \sqrt{\frac{T_1^2 T_e^2 \Omega^4 + T_1(T_1 - 2T_e)\Omega^2 + 1}{T_e^2(T_1 + T_2)^2 \Omega^4 + (T_1 + T_2)(T_1 + T_2 - 2T_e)\Omega^2 + 1}}.$$

Реакцию системы на воздействие (9) можно записать в виде

$$M_{\Psi}(t) = M_{20} + A_{M_{\Psi}}(\Omega)M_{2a} \cos[\Omega t + \varepsilon_{M_{\Psi}}(\Omega)].$$

В работе [15] было показано, что изменение коэффициента режима приводит к скачкообразному изменению производных внутренних сил и моментов и резкому возрастанию динамических нагрузок. Следовательно, переключение элементов червячной кинематической пары является нежелательным, а в технологических машинах в режиме установившегося движения вообще недопустимым.

Необходимое и достаточное условие постоянства знака момента $M_{\Psi}(t)$, определяющего режим работы червячной пары,

$$A_{M_{\Psi}}(\Omega)M_{2a} < |M_{20}| \quad (10)$$

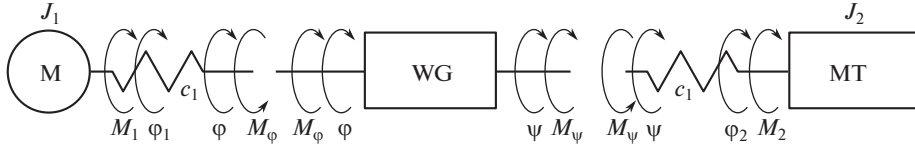


Рис. 4. Расчетная схема привода с учетом упругости звеньев.

одновременно является условием линейности исходной системы уравнений и, следовательно, определяет область применимости найденного решения.

Для решения вопроса о возможности выполнения этого условия в реальных приводах исследуем зависимость наибольшего значения АЧХ $A_{M_\psi}(\Omega)$ от значений параметров системы. Для упрощения анализа приведем рассматриваемую характеристику к безразмерным переменным

$$A_{M_\psi}(\tilde{\Omega}) = \sqrt{\left[\frac{1}{(1 + \tau_2)^2} \tilde{\Omega}^4 + \frac{1 - 2\tau_1}{\tau_1(1 + \tau_2)} \tilde{\Omega}^2 + 1 \right] \cdot \left[\tilde{\Omega}^4 + \frac{1 + \tau_2 - 2\tau_1}{\tau_1} \tilde{\Omega}^2 + 1 \right]^{-1}},$$

где безразмерная частота внешнего воздействия принята в виде $\tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{T_e(T_1 + T_2)}$.

На рис. 3 представлены графики уровня функции $\max_{\Omega} A_{M_\psi}(\tilde{\Omega})$ от значений относительных постоянных времени при $k_r = -1$. Видно, что в заданном диапазоне изменения относительных постоянных времени наибольшее значение АЧХ при $k_r = -1$ не превышает 1.35. Условие (10) в этом случае выполняется, если отношение амплитуды переменной составляющей момента сил сопротивления к постоянной составляющей не превышает 74%. Если колебания в системе начинаются при $k_r = +1$, то рассматриваемая АЧХ для значений относительной постоянной времени рабочей машины τ_2 , близких $k - 1$, может достигать очень больших значений. В этом случае, даже при незначительных колебаниях момента сил сопротивления, условие (10) не будет выполняться. Это приведет к изменению режима движения и возникновению дополнительных динамических нагрузок.

Исследование вынужденных колебаний в приводе с учетом упругости звеньев. Наибольшую податливость в приводе имеют участки валопровода между электродвигателем и входом червячного редуктора, а также выходом червячного редуктора и рабочей технологической машиной. Поэтому расчетную схему привода с учетом упругости звеньев представим в виде двухмассной системы (рис. 4). Жесткости соответствующих участков валов обозначим c_1, c_2 .

Для составления математической модели системы разобьем ее на отдельные подсистемы (рис. 4), уравнения движения которых имеют вид

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\phi}_1 = M_1 - M_\phi; \\ J_2 \ddot{\phi}_2 = M_2 - M_\psi. \end{cases} \quad (11)$$

Деформации валов будут определяться зависимостями

$$\begin{cases} c_1(\phi - \phi_1) = -M_\phi; \\ c_2(\psi - \phi_2) = -M_\psi. \end{cases}$$

Вводя относительные величины

$$f_1 = M_1/J_1; \quad f_2 = M_2u/J_2; \quad q = M_\varphi/J_1; \quad s = M_\psi u/J_2,$$

приведем дифференциальные уравнения (11) к виду

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 = f_0 - q; \\ \ddot{\phi}_2 = f - s, \end{cases}$$

где $\tilde{\phi}_2 = u\phi_2$ — угловая координата ротора, приведенная к валу двигателя.

Решая систему уравнений (11), с учетом (1)–(3) относительно моментов на входе и выходе червячной передачи M_φ , M_ψ и угловой координаты ϕ и выполняя затем необходимые преобразования, приходим к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка, относительно угловых координат ротора электродвигателя и рабочей машины

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + \frac{\omega^2 \tilde{m} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)}{1 + \tilde{c} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)} (\phi_1 - \tilde{\phi}_2) = f_1; \\ \ddot{\phi}_2 + \frac{\omega^2}{1 + \tilde{c} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)} (\tilde{\phi}_2 - \phi_1) = f_2, \end{cases} \quad (12)$$

где $\tilde{m} = J_2/(J_1 \operatorname{tg} \lambda u^2)$; $\tilde{c} = c_2/c_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda u^2$, $\omega = \sqrt{c_2/J_2}$.

Для рассматриваемого класса машин значения относительных параметров $\tilde{m}$ и $\tilde{c}$ находятся в пределах $4 \leq \tilde{m} \leq 16$, $0.02 \leq \tilde{c} \leq 0.1$.

Уравнение динамической характеристики электродвигателя (4) также приводим к относительным величинам

$$T_e T_1 \dot{f}_1 + T_1 f_1 = T_1 f_0 - \phi_1, \quad (13)$$

где $f_0 = M_{10}/J_1$ — некоторая постоянная величина.

В силу соотношения (3) полученная математическая модель привода является кусочно-линейной. Однако, если предположить, что при установившемся движении привода коэффициент режима не меняется, то система (12) становится линейной и для ее исследования можно использовать обычные методы.

Характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$\xi \left\{ T_e T_1 \xi^4 + T_1 \xi^3 + \left[T_e T_1 \frac{\omega^2 [1 + \tilde{m} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)]}{1 + \tilde{c} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)} + 1 \right] \xi^2 + \right. \\ \left. + T_1 \frac{\omega^2 [1 + \tilde{m} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)]}{1 + \tilde{c} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)} \xi + \frac{\omega^2}{1 + \tilde{c} \operatorname{tg}(\lambda - k_r \rho)} \right\} = 0.$$

Нулевой корень этого уравнения соответствует установившемуся движению системы с постоянной скоростью, а остальные характеристические показатели определяются из решения соответствующего уравнения четвертой степени.

При исследовании вынужденных колебаний используем известный метод операторных передаточных функций. Относительную возмущающую силу f_2 представим в виде

$$f_2(t) = f_{20} + f_{2a} \cos \Omega t, \quad (14)$$

где f_{20} — постоянная составляющая силы; f_{2a} — амплитуда переменной составляющей.

Переходя к операторной форме записи в дифференциальных уравнениях (12), (13), а затем к комплексному аргументу $p = i\Omega$ получим передаточные функции системы, определяющие ее реакцию на переменную составляющую возмущающей силы (14), и далее по аналогии с предыдущим, АЧХ для кинематических и силовых параметров. Окончательные выражения для АЧХ из-за их громоздкости здесь не приводятся.

Анализ корней характеристического уравнения и АЧХ в общем виде невозможен, поэтому на основе полученных зависимостей был выполнен ряд расчетов, охватывающих всю область значений исходных параметров системы для рассматриваемого класса машин.

Анализ результатов расчета на основе модели с учетом упругости звеньев и сравнение их с результатами, полученными на основе модели с жесткими звеньями, позволил сделать следующие выводы: изменение параметра $\tilde{c}$ в принятом диапазоне практически не влияет на значения характеристических показателей, вид и численные значения АЧХ; изменение параметра $\tilde{m}$ в принятом диапазоне приводит к соизмеримому изменению как действительной, так и мнимой частей характеристических показателей и, не меняя принципиально вид зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы, приводит к значительному изменению амплитуды колебаний; для самотормозящейся и несамотормозящейся передач при движении в режиме $k_r = -1$ вторая собственная частота, определяемая упругостью звеньев привода, примерно на порядок больше первой собственной частоты, определяемой динамическими свойствами приводного асинхронного электродвигателя. Первая собственная частота с достаточной точностью определяется на основании модели с жесткими звеньями. Вторая собственная частота значительно больше возможной частоты возмущающей силы для машин рассматриваемого класса, следовательно, в этом случае для исследования вынужденных колебаний в приводе можно использовать модель с жесткими звеньями; для самотормозящихся передач при движении в режиме $k_r = +1$ вторая собственная частота уменьшается и становится соизмеримой с первой. Действительная часть характеристических показателей $\xi_{3,4}$ положительна, что указывает на неустойчивость движения в этом режиме. Амплитуда колебаний будет возрастать и в определенный момент времени произойдет переключение червячной передачи в другой режим $k_r = -1$, соответствующий устойчивым колебаниям. Применение модели с жесткими звеньями в этом случае приводит не только к значительным количественным ошибкам, но и качественно неверному описанию динамических процессов, происходящих в системе.

Информация о финансовой поддержке. Результаты исследований опубликованы при финансовой поддержке ТулГУ в рамках научного проекта № 2017-37ПУБЛ.

Конфликт интересов: Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крюков В.А., Прейс В.В. Системы приводов транспортного движения автоматических роторных и роторно-конвейерных линий // Вестник машиностроения. 2003. № 2. С. 33–38.
2. Крюков В.А., Прейс В.В. Система приводов технологических роторных машин пищевой промышленности // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2013. № 7-1. С. 100–111.
3. Jelaska D. Gears and Gear Drives. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2012. 465 p.
4. Goldfarb V.I., Trubachev E.S., Puzanov V.Yu. New possibilities of non-orthogonal worm gears // Proceedings of the 3rd International Conference “Power Transmissions 09”. Greece, Chalkidike, 2009. P. 139–145.
5. Anh L. Xuan. Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 272 p.
6. Ivanov A.P. On the application of variational inequalities to the dynamics of systems with friction // Mathematical Notes. 2015. V. 98. № 1–2. P. 328–330.
7. Haug E.J., Wu S.C., Yang S.M. Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, impact and constraint addition-deletion – I. Theory // Mechanism and Machine Theory. 1986. V. 21. Issue 5. P. 401–406.

8. *Timofeev G.A., Panjukhin V.V., Yaminsky A.V.* Self-braking criteria analysis // Изв. вузов. Машиностроение. 2017. № 2 (687). С. 12–18.
9. *Тимофеев Г.А., Самойлова М.В., Панюхин В.В.* Анализ критериев самоторможения с точки зрения их обоснованности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2013. № 4 (93). С. 27–42.
10. *Mooring B.W., May D.C., Schulte M.* Modeling and Analysis of a Manipulator Joint Driven Through a Worm Gear Transmission // J. Mech. Des. 1990. № 112(4). P. 551–556.
11. *Вейц В.Л., Васильков Д.В., Гидаспов И.А., Шнеерсон Е.С.* Динамика приводов технологических машин с самотормозящимися механизмами: Монография. 4.5 / Под общ. ред. В.Л. Вейца. СПб.: Изд-во ПИМаш, 2002.
12. *Мозжечков В.А., Холматов А.З.* Адаптивный алгоритм управления электроприводом запорной трубопроводной арматуры // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2014. Вып. 9. Ч. 2. С. 118–127.
13. *Несмиянов И.А., Жога В.В., Скакунов В.Н. и др.* О неустойчивых режимах работы электропривода манипулятора // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 3. С. 18–25.
14. *Крюков В.А., Ктиторов Д.А.* Уточненная математическая модель червячной кинематической пары // Известия ТулГУ. Технические науки. 2013. Вып. 10. С. 297–305.
15. *Крюков В.А.* Исследование движения червячного привода с учетом упругости звеньев // Известия Тульского государственного университета. Серия: Машиностроение. 1998. № 4. С. 140–148.