

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ  
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 539.374 + 621.735

**ДВУХМЕРНОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ФЛАНЦА ПРИ ВЫТЯЖКЕ  
ТОНКОСТЕННОЙ МНОГОГРАННОЙ ПРИЗМЫ**

© 2019 г. Р. И. Непершин

*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия  
e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru*

Поступила в редакцию 05.10.2017 г.

Принята к публикации 18.02.2019 г.

Моделируется двухмерное пластическое течение фланца при вытяжке многогранной тонкостенной призмы с плоским дном из круглой заготовки при условии пластичности Мизеса на основе теории плоского напряженного состояния по Соколовскому. Рассчитываются линии скольжения, напряженное состояние, годограф скоростей перемещений и диссипативная функция пластического течения. Определяются предельные параметры вытяжки по максимальному растягивающему напряжению на контуре матрицы и зонам с отрицательной диссипативной функцией, которые зависят от радиуса закругления углов матрицы и высоты призмы.

*Ключевые слова:* тонкостенная многогранная призма, вытяжка, фланец, плоское напряженное состояние, идеальная пластичность, линии скольжения, годограф скоростей, диссипативная функция

DOI: 10.1134/S0235711919030118

В машиностроении широко применяются высоко производительные процессы вытяжки оболочек различной формы из тонкого листа [1–3], обеспечивающие снижение массы машин при заданной жесткости и прочности. Однако теоретический анализ вытяжки на основе математической теории пластичности ограничен, главным образом, решением дифференциальных уравнений первого порядка с различными приближениями применительно к вытяжке осесимметричных цилиндрических, конических, сферических оболочек, фланцев с криволинейной образующей, обжиму и раздаче тонкостенных труб инструментом с криволинейным профилем [3–12].

При несимметричной вытяжке тонкостенных оболочек, в частности, деталей коробчатой формы, выбор формы и размеров плоской заготовки и радиуса закругления углов матрицы для исключения локального разрушения решается на практике опытным путем [1–3]. Применение коммерческих программ метода конечных элементов при формоизменении тонкостенных оболочек сложной формы на основе математической теории пластического течения ограничено трудностями решения больших систем нелинейных уравнений.

При вытяжке многогранной тонкостенной призмы с плоским дном из плоской заготовки возникает двухмерное пластическое течение во фланце при плоском напряженном состоянии. Наибольшие напряжения возникают на начальной стадии процесса при широком фланце, которые передаются на стенки призмы и определяют предельные технологические параметры вытяжки вследствие локализации деформации по толщине при высоких растягивающих напряжениях.

В настоящей статье двухмерное пластическое течение во фланце на начальной стадии вытяжки многогранной призмы с закругленными углами и плоским дном из круглой заготовки моделируется численным анализом на ЭВМ. Используется теория плоского напряженного состояния в области гиперболических дифференциальных уравнений по Соколовскому [13, 14] при условии пластичности Мизеса для идеально пластического материала. Аналитические и численные решения этих уравнений для растяжения тонкой пластины с отверстием и с симметричными боковыми вырезами различной формы приведены в [4, 14–17].

**Постановка задачи и основные уравнения.** Моделируется двухмерное пластическое течение фланца постоянной толщины на начальной стадии вытяжки многогранной тонкостенной призмы с плоским дном из круглой плоской заготовки с радиусом  $R$ . Контур матрицы принимается в виде правильного многоугольника с числом граней и углов  $N \geq 3$ , длиной граней  $L$ , центральным углом  $2\alpha = 2\pi/N$  и радиусом закругления углов  $r$ . Радиус вписанной окружности многоугольника принимается за единицу длины. Безразмерная длина грани  $L$  связана с единичным радиусом вписанной окружности и половиной центрального угла  $\alpha$  соотношениями

$$L = 2 \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha = \pi/N.$$

При  $r = 1$  получаем круговой контур матрицы и процесс осесимметричной вытяжки цилиндрической оболочки. При  $r < 1$  получаем контур матрицы с прямолинейными участками и радиусами закругления  $r$ . Для правильного многоугольника контура матрицы и кругового контура фланца с радиусом  $R$  область пластического течения, ограниченная контуром матрицы, имеет  $2N$  линий симметрии, проходящих через биссектрисы углов и середины сторон многоугольника. На рис. 1 показана расчетная область фланца на плоскости  $x, y$  для квадратной матрицы при  $N = 4$ , ограниченная линиями симметрии  $y = 0$  и  $\alpha = \pi/4$  с центром  $O$ , совпадающим с центром квадрата, и осью  $x$ , направленной по биссектрисе угла квадрата. Координаты  $x, y$  контуров фланца и матрицы определяются формулами

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad \text{контур } AB \quad (1)$$

$$x = (1 - r)/\cos \alpha + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad \text{контур } ED \quad (2)$$

$$x = (1 - r)/\cos \alpha + r \cos \alpha - l \sin \alpha, \quad y = r \sin \alpha + l \cos \alpha \quad \text{контур } CD \quad (3)$$

$$0 < r < 1, \quad 0 \leq l \leq (1 - r) \operatorname{tg} \alpha.$$

Радиус заготовки  $R$  вычисляется из условия равенства площадей поверхности плоской заготовки и призмы с плоским дном и конечной высотой  $H$  с учетом радиуса закругления ребер пуансона и матрицы  $r_0 \ll r$ , конечной ширины фланца  $b_0$  по контуру матрицы и зазора  $\Delta$  между пуансоном и матрицей. Толщина стенки детали принимается постоянной без учета малого изменения относительно начальной толщины заготовки. Площадь поверхности сегмента, ограниченного углом  $\alpha$  на рис. 1 состоит из пяти элементов:

$$S_1 = 1/2[(1 - r_0)^2 \operatorname{tg} \alpha + \alpha r^2 - (r - r_0)^2] - \text{плоское дно без закругленных ребер};$$

$$S_2 = \pi r_0(1 - r) \operatorname{tg} \alpha - \text{закругления ребер инструмента на линейных участках};$$

$$S_3 = 1/2\pi\alpha r_0(2r + \Delta) - \text{закругления ребер инструмента в угловых зонах};$$

$$S_4 = (H - 2r_0)[\alpha r + (1 - r) \operatorname{tg} \alpha] - \text{грань призмы с закругленным углом};$$

$$S_5 = b_0(1 - r) \operatorname{tg} \alpha + \alpha[(r + r_0)b_0 + 1/2b_0^2] - \text{фланец } b_0 \text{ по контуру матрицы}.$$

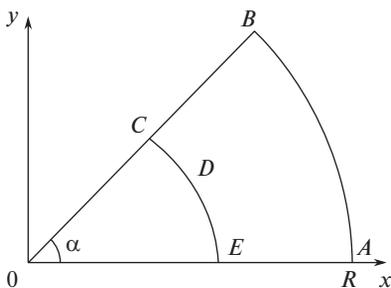


Рис. 1. Расчетная область фланца для квадратной призмы.

Радиус заготовки  $R$  для призмы с числом граней  $N$  определяется формулой

$$R = \sqrt{\frac{2N}{\pi} \sum_1^5 S_i}, \quad (4)$$

где  $i$  – номер элемента площади сегмента призмы с углом  $\alpha$ .

Материал заготовки принимается идеально пластическим при условии пластичности Мизеса, которое при плоском напряженном состоянии для главных напряжений, отнесенных к напряжению текучести  $\sigma_s$ , имеет вид

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 1. \quad (5)$$

Напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  определяются тригонометрическими функциями в зависимости от параметра  $\omega$  [14]

$$\sigma_1 = (2/\sqrt{3}) \cos(\omega - \pi/6), \quad \sigma_2 = (2/\sqrt{3}) \cos(\omega + \pi/6), \quad (6)$$

которые тождественно удовлетворяют условию пластичности (5). В интервале  $\pi/6 \leq \omega \leq 5\pi/6$  уравнения равновесия плоского напряженного состояния относятся к гиперболическому типу с характеристиками, совпадающими с линиями скольжения  $\xi$ ,  $\eta$  [14]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \quad \text{для} \quad \xi, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \quad \text{для} \quad \eta, \quad (7)$$

где  $\varphi$  – угол наклона направления  $\sigma_1$  к оси  $x$ ,  $\psi$  – угол между касательной к линиям скольжения и направлением  $\sigma_1$ , связанный с  $\omega$  соотношением

$$\operatorname{ctg} \omega = -\sqrt{3} \cos 2\psi. \quad (8)$$

Вдоль линий скольжения выполняются соотношения для переменных  $\varphi$  и  $\lambda(\psi)$

$$\varphi - \lambda = \operatorname{const} \text{ вдоль } \xi, \quad \varphi + \lambda = \operatorname{const} \text{ вдоль } \eta, \quad \operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg}^3 \psi. \quad (9)$$

Скорости перемещений  $V_x$ ,  $V_y$  на плоскости годографа скоростей, ортогональные к линиям скольжения на плоскости  $x$ ,  $y$ , определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dV_x}{dV_y} = -\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \text{ вдоль } \xi, \quad \frac{dV_x}{dV_y} = -\operatorname{tg}(\varphi + \psi) \text{ вдоль } \eta. \quad (10)$$

**Граничные условия и численное решение.** Линии скольжения находятся численным решением задачи Коши для уравнений (7)–(9) с граничными условиями на контуре

фланца  $AB$  и постоянными значениями переменных  $\omega$ ,  $\psi$  и  $\lambda$ , определяемыми подстановкой главных напряжений в (6) и (8)

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -1; \quad \omega = 2\pi/3, \quad \psi = \arccos(1/3), \quad \lambda = \arctg(\operatorname{tg}^3 \psi) \quad (11)$$

Координаты  $x$ ,  $y$  контура  $AB$  с углом  $\varphi$ , совпадающим с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ , определяются формулами (1).

Конечно-разностные соотношениями для дифференциальных уравнений (7) и соотношения (9) для решения элементарной задачи Коши [6] записываем в виде

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \gamma_1, \quad \gamma_1 = 1/2(\varphi + \varphi_1 - \psi - \psi_1) \text{ вдоль } \xi, \quad (12)$$

$$y - y_2 = (x - x_2) \operatorname{tg} \gamma_2, \quad \gamma_2 = 1/2(\varphi + \varphi_2 + \psi + \psi_2) \text{ вдоль } \eta, \quad (13)$$

$$\varphi - \lambda = \varphi_1 - \lambda_1 \text{ вдоль } \xi, \quad \varphi + \lambda = \varphi_2 + \lambda_2 \text{ вдоль } \eta, \quad (14)$$

где нижними индексами 1 и 2 обозначены известные координаты  $x$ ,  $y$  и углы  $\varphi$ ,  $\psi$  на пересекающихся линиях скольжения  $\xi$  и  $\eta$ . Углы  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\lambda$  в точке пересечения линий скольжения находим из соотношений (14)

$$\varphi = 1/2(\varphi_1 - \lambda_1 + \varphi_2 + \lambda_2), \quad \lambda = 1/2(\varphi_2 + \lambda_2 - \varphi_1 + \lambda_1), \quad \psi = \arctg[(\operatorname{tg} \lambda)^{1/3}]. \quad (15)$$

Подстановкой  $\varphi$  и  $\psi$  из (15) в (13) и (14) находим углы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и координаты точки пересечения линий скольжения

$$x = (y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg} \gamma_1 - x_2 \operatorname{tg} \gamma_2) / (\operatorname{tg} \gamma_1 - \operatorname{tg} \gamma_2), \quad y = y_1 + (x - x_1) \operatorname{tg} \gamma_1.$$

Сетка линий скольжения и напряжения, определяемая граничными условиями (11), вычисляется с использованием циклического алгоритма численного решения задачи Коши [6].

В области, ограниченной линией симметрии  $AE$  и  $\xi$ -линией скольжения, проходящей через точку  $A$ , которая известна после решения задачи Коши от контура  $AB$ , линии скольжения вычисляются решением задачи смешанного типа с граничным условием  $\varphi = 0$ ,  $y = 0$ . Значения  $\lambda$ ,  $\psi$  и координаты  $x$  на границе  $AE$  находим из уравнений (13) и (14) для  $\eta$ -линий скольжения

$$\lambda = \varphi_2 + \lambda_2, \quad \gamma_2 = 1/2(\varphi_2 + \psi + \psi_2), \quad x = x_2 - y_2 \operatorname{ctg} \gamma_2,$$

где  $\psi$  определяется третьей формулой (15) и переменные  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  с нижним индексом 2 известны на  $\xi$ -линии скольжения.

В области, ограниченной линией симметрии  $BC$  и  $\eta$ -линией скольжения, проходящей через точку  $B$ , которая известна после решения задачи Коши от контура  $AB$ , линии скольжения вычисляются решением задачи смешанного типа с граничным условием  $\varphi = \alpha$ ,  $y = x \operatorname{tg} \alpha$  на  $BC$ . Значения переменных  $\lambda$ ,  $\psi$  и координаты  $x$  находим из уравнений (12) и (14) для  $\xi$ -линии скольжения

$$\lambda = \alpha + \lambda_1 - \varphi_1, \quad \gamma_1 = 1/2(\alpha - \varphi_1 + \psi - \psi_1), \quad x = (y_1 - x_1 \operatorname{tg} \gamma_1) / (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \gamma_1),$$

где переменные  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  с нижним индексом 1 известны на  $\eta$ -линии скольжения.

Точки пластической области, ограниченной круговой границей  $ED$  (2) и прямой  $CD$  (3) контура матрицы, удовлетворяют неравенствам

$$g_1 = (x - x_0)^2 + y^2 - r^2 \geq 0 \quad \text{при} \quad y < r \sin \alpha, \quad x_0 = (1 - r) / \cos \alpha, \quad (16)$$

$$g_2 = x - (x_0 + r \cos \alpha) + (y - r \sin \alpha) \operatorname{tg} \alpha \geq 0 \quad \text{при} \quad y > r \sin \alpha. \quad (17)$$

Нарушение неравенств (16), (17) используется для идентификации пересечения границы  $EDC$  при изменении знака функций  $g_1$  и  $g_2$  между узлами  $i$  и  $i + 1$  линии скольжения. Координаты  $x$ ,  $y$  точки пересечения линии скольжения с контуром матрицы  $EDC$  и значения переменных  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $V_x$ ,  $V_y$ , представляемые массивом  $f_j$ ,  $j = 1$ ,

2, ..., 7, вычисляются линейной интерполяцией между точками  $i$  и  $i + 1$ , где известны значения  $f_j^i$  и  $f_j^{i+1}$

$$f_j = f_j^i + k[f_j^{i+1} - f_j^i], \quad k = g_i/(g_i - g_{i+1}), \quad j = 1, 2, \dots, 7. \quad (18)$$

Углы  $\varphi$  и главные напряжения на границе  $EDC$  определяются граничными условиями на контуре  $AB$ . Угол наклона нормали к границе  $EDC$  не совпадает с направлением главного напряжения  $\sigma_1$ . Нормальные и касательные напряжения на границе  $EDC$  определяются формулами

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \delta + \sigma_2 \sin^2 \delta, \quad \tau = 1/2(\sigma_2 - \sigma_1) \sin 2\delta, \quad \delta = \varphi - \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  — угол наклона нормали к границе  $EDC$  в точке пересечения с линиями скольжения.

Граничные условия для расчета скоростей в пластической области задаем вектором скорости по направлению нормали к границе  $EDC$ , равным скорости пуансона  $V_0$  без учета малых деформаций на закруглении ребер при нормальных напряжениях, передающихся на вертикальные стенки призмы, не превышающих напряжения текучести материала заготовки  $\sigma_n < 1$ .

$$V_x = -V_0 \cos \varphi_0, \quad V_y = -V_0 \sin \varphi_0, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq \alpha. \quad (19)$$

Граничные условия на контуре матрицы (19) изображаются на плоскости годографа дугой окружности с радиусом  $V_0 = 1$ , принятым за единицу скорости при расчетах скоростей пластического течения. На линиях симметрии пластической области граничные условия для скоростей имеют вид

$$V_y = 0, \quad \varphi = 0 \text{ на } AE; \quad V_x \sin \alpha - V_y \cos \alpha = 0, \quad \varphi = \alpha \text{ на } BC \quad (20)$$

Расчеты скоростей выполняются численным решением уравнений (10) с граничными условиями (19), (20) после определения напряжений и функций  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  на контуре матрицы  $EDC$ . Затем выполняется расчет сетки линий скольжения с вычислениями скоростей в обратном направлении от контура  $EDC$  к контуру  $AB$  численным решением системы уравнений (7)–(10).

Известные значения  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  и скорости (19) на контуре  $EDC$  определяют сетку линий скольжения решением задачи Коши по конечноразностным уравнениям (12)–(14) и скорости  $V_x$ ,  $V_y$  в узловых точках сетки линий скольжения при конечноразностной аппроксимации уравнений (10)

$$V_x - V_{x1} = (V_{y1} - V_y) \operatorname{tg} \gamma_1 \text{ вдоль } \xi, \quad V_x - V_{x2} = (V_{y2} - V_y) \operatorname{tg} \gamma_2 \text{ вдоль } \eta, \quad (21)$$

где нижними индексами 1 и 2 обозначены известные скорости в точках 1 и 2 на  $\xi$ - и  $\eta$ -линиях скольжения, и средние углы наклона  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  к линиям скольжения определяются формулами (12), (13). Решение системы уравнений (21) имеет вид

$$V_x = (a_1 \operatorname{tg} \gamma_2 - a_2 \operatorname{tg} \gamma_1) / (\operatorname{tg} \gamma_2 - \operatorname{tg} \gamma_1), \quad V_y = (a_1 - V_x) / \operatorname{tg} \gamma_1,$$

$$a_1 = V_{x1} + V_{y1} \operatorname{tg} \gamma_1, \quad a_2 = V_{x2} + V_{y2} \operatorname{tg} \gamma_2.$$

Известные после решения задачи Коши значения функций на  $\eta$ -линии скольжения, проходящей через точку  $E$ , и граничные условия (20) на линии симметрии  $AE$  определяют скорости с использованием соотношений (14) вдоль  $\xi$ -линии скольжения

$$V_x = V_{x1} + V_{y1} \operatorname{tg} \gamma_1, \quad V_y = 0, \quad \gamma_1 = 1/2(\varphi_1 - \psi_1 - \psi), \quad \lambda = \lambda_1 - \varphi_1, \quad \psi = \operatorname{arctg}[(\operatorname{tg} \lambda)^{1/3}]$$

на  $AE$ . Известные значения функций на  $\xi$ -линии скольжения, проходящей через точку  $C$ , и граничные условия (20) на линии симметрии  $BC$  определяют скорости с использованием соотношений (14) вдоль  $\eta$ -линии скольжения

$$V_x = (V_{x2} + V_{y2} \operatorname{tg} \gamma_2)/(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_2), \quad V_y = V_x \operatorname{tg} \alpha, \quad \gamma_2 = 1/2(\alpha + \varphi_2 + \psi_2 + \psi)$$

$$\lambda = \lambda_2 + \varphi_2 - \alpha, \quad \psi = \operatorname{arctg}[(\operatorname{tg} \lambda)^{1/3}]$$

на  $BC$ .

Значения функций  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$  и скоростей  $V_x$ ,  $V_y$  на контуре фланца  $AB$  вычисляются в точках пересечения с линиями скольжения, которые находятся при изменении знака функции  $g$ , определяющей границу  $AB$

$$g = R^2 - (x^2 + y^2) \geq 0.$$

Точки  $i$  и  $i + 1$  линии скольжения, пересекающей границу  $AB$ , находятся по условиям  $g_i > 0$ ,  $g_{i+1} < 0$  с последующим вычислением переменных в точке пересечения линейной интерполяцией (18).

Расчет пластического течения фланца включает вычисление диссипативной функции для направлений главных напряжений и главных скоростей деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2. \quad (22)$$

Отрицательное значение диссипативной функции (22) идентифицирует зоны расчетной области, в которых пластическое течение идеально пластического тела [14, 18] при заданных граничных условиях для напряжений и скоростей невозможно. Изменение граничных условий, при которых диссипативная функция неотрицательна, означает изменение технологических параметров вытяжки для исключения возможных дефектов пластического формоизменения призмы.

В пластической области за исключением границ диссипативная функция вычисляется для малого элемента, ограниченного двумя парами соседних линий скольжения по средним значениям напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  для четырех узлов линий скольжения и скоростям деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  вычисляемым с учетом кривизны траекторий главных направлений 1 и 2

$$\varepsilon_1 = (dV_1 - V_2 d\varphi)/ds_1, \quad \varepsilon_2 = (dV_2 + V_1 d\varphi)/ds_2, \quad (23)$$

$$V_1 = V_x \cos \varphi + V_y \sin \varphi, \quad V_2 = V_y \cos \varphi - V_x \sin \varphi, \quad (24)$$

где  $V_1$ ,  $V_2$  – проекции вектора скорости на главные направления;  $ds_1$ ,  $ds_2$  – элементы длины дуги,  $dV_1$ ,  $dV_2$  – приращения скоростей и  $V_1$ ,  $V_2$  – средние значения скоростей по главным направлениям.

На линиях симметрии с граничными условиями (20) уравнения (23) и (24) используются для треугольных элементов сетки линий скольжения при  $\varphi = 0$  на  $AE$  и  $\varphi = \alpha$  на  $BC$ . На контуре  $AB$  диссипативная функция вычисляется для линейного элемента между соседними узловыми точками линий скольжения, совпадающего со вторым главным направлением

$$D = -\varepsilon_2 = -(dV_2 + V_1 d\varphi)/ds_2,$$

где скорости  $V_1$ ,  $V_2$  вычисляются по формулам (24) в узловых точках линейного элемента в направлении от  $A$  к  $B$ .

**Численные примеры.** Расчеты линий скольжения, напряжений и скоростей пластического течения автоматизированы на ФОРТРАНЕ с применением графических процедур и выводом результатов в табличной и графической формах. На рис. 2а показана сетка линий скольжения с узловыми точками в виде пикселей, отображаемых на экран монитора. Расчеты выполнены для вытяжки призмы с параметрами  $N = 4$ ,  $L = 2$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,

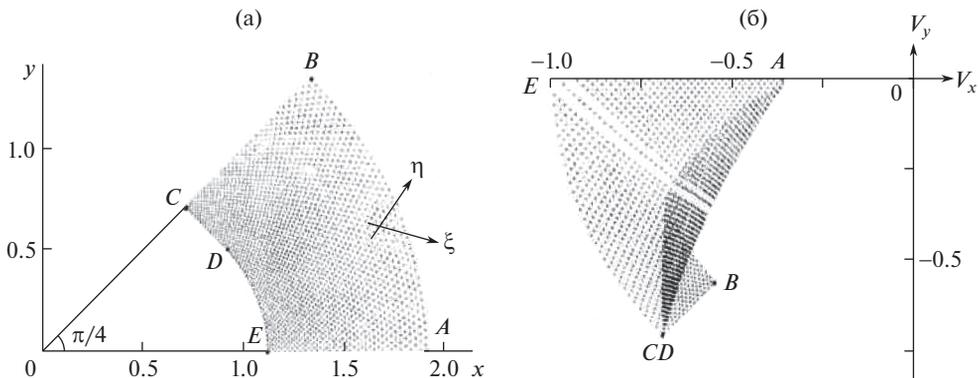


Рис. 2. Линии скольжения (а), годограф скоростей пластического течения (б) в области фланца для квадратной призмы.

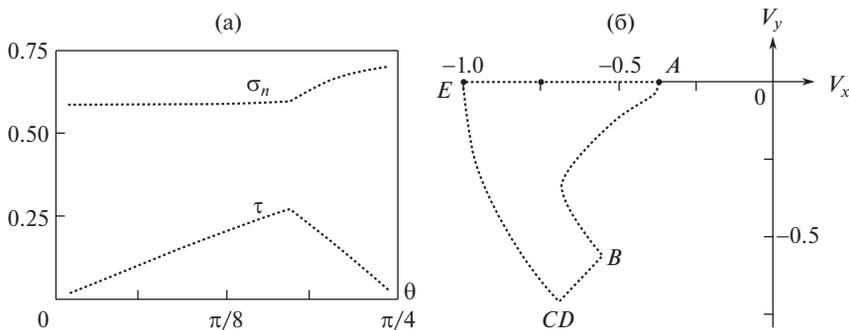


Рис. 3. Нормальные и касательные напряжения (а) на контуре  $ECD$ , годограф скоростей пластического течения (б) для квадратной призмы.

$r = 0.75$ ,  $b_0 = 0.1$ ,  $r_0 = 0.05$ ,  $\Delta = 0.01$ . Контуры матрицы и заготовки, использованные для вычисления сетки линий скольжения и годографа скоростей, показаны на рис. 1.

Высота призмы  $H = 0.98$  и радиус заготовок  $R = 1.881$ , вычисленный по формуле (4), соответствуют предельным значениям, при которых диссипативная функция положительна во всей пластической области. При увеличении  $H$ ,  $R$  и уменьшении радиуса закругления  $r$  углов призмы в окрестности точки  $A$  появляется расширяющаяся область с отрицательными значениями диссипативной функции, где пластическое течение невозможно.

На рис. 3а показано распределение нормальных и касательных напряжений, на контуре матрицы  $EDC$  в зависимости от полярного угла  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  с центром в точке  $O$  (рис. 1). На закругленном участке  $ED$  напряжения  $\sigma_n$  незначительно возрастают от 0.587 до 0.596 в точке  $C$ , где касательное напряжение максимально,  $\tau = 0.269$ . На линейном участке  $CD$  нормальное напряжение  $\sigma_n$  возрастает до максимального значения 0.7, а касательное напряжение снижается до нуля на линии симметрии  $BC$ . Распределения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на линиях симметрии  $AE$  и  $BC$  приведены в табл. 1 и 2. Более высокие растягивающие напряжения возникают на линии симметрии  $BC$ , где ширина фланца максимальна.

**Таблица 1.** Напряжения на границе *AE*

<i>x</i>	$\sigma_1$	$-\sigma_2$	<i>x</i>	$\sigma_1$	$-\sigma_2$
1.881	0.000	1.000	1.363	0.345	0.782
1.830	0.028	0.986	1.333	0.370	0.762
1.782	0.055	0.971	1.304	0.395	0.742
1.735	0.082	0.956	1.276	0.419	0.722
1.691	0.110	0.941	1.249	0.444	0.701
1.648	0.136	0.925	1.223	0.468	0.680
1.607	0.163	0.908	1.198	0.492	0.659
1.568	0.190	0.891	1.174	0.515	0.637
1.530	0.216	0.874	1.150	0.539	0.615
1.494	0.242	0.857	1.128	0.562	0.593
1.460	0.268	0.838	1.106	0.584	0.570
1.426	0.294	0.820	1.104	0.587	0.568
1.394	0.319	0.801			

**Таблица 2.** Напряжения на границе *BC*

<i>x</i> *	$\sigma_1$	$-\sigma_2$	<i>x</i> *	$\sigma_1$	$-\sigma_2$
1.330	0.000	1.000	0.922	0.395	0.742
1.294	0.028	0.986	0.902	0.419	0.722
1.260	0.055	0.971	0.883	0.444	0.701
1.227	0.082	0.956	0.865	0.468	0.680
1.195	0.110	0.941	0.847	0.492	0.659
1.165	0.136	0.925	0.830	0.515	0.637
1.136	0.163	0.908	0.813	0.539	0.615
1.109	0.190	0.891	0.797	0.561	0.593
1.082	0.216	0.874	0.782	0.584	0.570
1.057	0.242	0.857	0.767	0.607	0.547
1.032	0.268	0.838	0.752	0.629	0.524
1.008	0.294	0.820	0.738	0.651	0.501
0.986	0.319	0.801	0.724	0.672	0.477
0.964	0.345	0.782	0.707	0.700	0.445
0.942	0.370	0.762			

\* $y = x$  при  $\alpha = \pi/4$

На рис. 2б показан годограф скоростей для сетки линий скольжения. Круговой участок контура матрицы *EC* отображается на плоскости годографа дугой окружности с радиусом  $V_0 = 1$ , а линейный участок *CD* вырождается в точку с постоянной скоростью  $V_0 = 1$ . Линии скольжения  $\eta$  и  $\xi$ , проходящие через точки *E*, *C* и *D* на рис. 2а, на плоскости годографа (рис. 2б) ограничивают области поля скоростей, определяемые решением задачи Коши от контура *EDC*, задачи смешанного типа с линией симметрии *AE* и задачи смешанного типа с линией симметрии *BC*. Вырождение в точку линейного участка контура матрицы на плоскости годографа скоростей порождает центрирован-

Таблица 3. Скорости на границе  $AE$ 

$x$	$-V_x$	$x$	$-V_x$	$x$	$-V_x$
1.104	1.000	1.357	0.728	1.622	0.527
1.145	0.947	1.382	0.706	1.650	0.509
1.167	0.920	1.407	0.685	1.679	0.491
1.190	0.893	1.433	0.664	1.707	0.473
1.213	0.868	1.459	0.644	1.737	0.455
1.236	0.843	1.485	0.623	1.766	0.438
1.260	0.819	1.512	0.604	1.797	0.421
1.283	0.795	1.539	0.584	1.827	0.404
1.308	0.772	1.566	0.565	1.858	0.387
1.332	0.750	1.594	0.546	1.881	0.374

Таблица 4. Скорости на границе  $BC$ 

$x^*$	$-V_x^*$	$x^*$	$-V_x^*$	$x^*$	$-V_x^*$
0.707	0.707	0.865	0.707	1.082	0.641
0.724	0.707	0.883	0.707	1.109	0.631
0.738	0.707	0.902	0.707	1.136	0.621
0.752	0.707	0.922	0.707	1.165	0.611
0.767	0.707	0.942	0.705	1.195	0.601
0.782	0.707	0.964	0.694	1.227	0.592
0.797	0.707	0.986	0.683	1.260	0.582
0.813	0.707	1.008	0.672	1.294	0.573
0.830	0.707	1.032	0.662	1.330	0.563
0.847	0.707	1.057	0.651		

\*  $y = x$ ,  $V_y = V_x$  при  $\alpha = \pi/4$

ные области годографа при вычислениях скоростей на границе фланца  $AB$  и на линии симметрии  $BC$ . Границы пластической области на годографе скоростей показаны на рис. 3б. Численные значения скоростей на линиях симметрии  $AE$  и  $BC$  приведены в табл. 3 и 4. Линейный участок контура матрицы порождает область поступательного движения со скоростью  $V_0 = 1$  на значительной части границы  $BC$ , показанной в табл. 4. Смещение контура заготовки, вычисленное по скорости точек границы  $AB$  при малом перемещении  $ds = V_0 dt = 0.1$ ;  $x = x_0 V_x ds$ ,  $y = y_0 V_y ds$ , где  $x_0, y_0$  – координаты границы  $AB$  при  $ds = 0$ , показаны на рис. 4.

В табл. 5 приведены предельные значения  $H$  и  $R$  по критерию положительности диссипативной функции и напряжения на контуре матрицы для трехгранной, четырехгранной и шестигранной призмы с различными радиусами закругления углов  $r$ . Увеличение числа граней и уменьшение радиуса  $r$  приводит к снижению предельных значений  $H$ ,  $R$  и напряжений по критерию положительности диссипативной функции пластического течения. Малое отрицательное значение напряжения  $\sigma_n$  на контуре матрицы для треугольной призмы при  $r = 0.5$  показывает возможность отрыва заготовки от контакта с матрицей при малых радиусах закругления  $r$ .

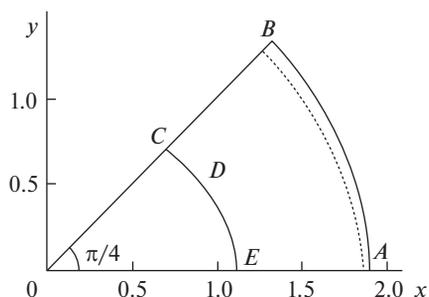


Рис. 4. Начальное смещение контура заготовки при малом перемещении пуансона при вытяжке квадратной призмы.

Приближение радиуса закругления к предельному значению  $r = 1$  приводит к снижению касательного напряжения на контуре матрицы до нуля и радиальному пластическому течению с предельными значениями  $H = 2.38$  и  $R = 2.469$  по критерию максимального растягивающего напряжения  $\sigma_1 = 1$ . Линии скольжения и годограф скоростей в секторе фланца  $\alpha = \pi/4$  при  $r = 1$  показаны на рис. 5. В случае радиального пластического течения диссипативная функция положительна во всей пластической области фланца.

**Обсуждение результатов.** Разработан алгоритм расчета двухмерного плоского напряженного состояния и поля скоростей пластического течения широкого фланца на начальной стадии вытяжки тонкостенной призмы из круглой заготовки. Получены распределения нормальных и касательных напряжений по контуру матрицы и годограф скоростей пластического течения фланца с контролем знака диссипативной функции.

Технологические параметры несимметричной вытяжки тонкостенных оболочек при заданной форме контуров проема матрицы и заготовки ограничены нормальными растягивающими напряжениями на контуре матрицы, близкими к напряжению

Таблица 5. Предельные параметры вытяжки призмы и напряжения на контуре матрицы

N	Параметры			Граница	EC	т. E	т. C
	r	H	R	$\sigma_n$	$\tau_{max}$	$\sigma_1$	$\sigma_1$
3	0.75	1.230	2.199	0.602	0.407	0.623	0.875
	0.70	1.108	2.151	0.478	0.466	0.552	0.851
	0.60	0.870	2.044	0.199	0.538	0.408	0.794
	0.50	0.730	1.981	-0.053	0.538	0.408	0.794
4	0.75	0.980	1.881	0.598	0.269	0.587	0.699
	0.70	0.928	1.863	0.548	0.314	0.554	0.689
	0.60	0.722	1.759	0.383	0.395	0.446	0.623
	0.50	0.563	1.673	0.219	0.453	0.350	0.565
6	0.75	0.780	1.602	0.479	0.162	0.471	0.515
	0.70	0.705	1.574	0.444	0.193	0.442	0.494
	0.60	0.551	1.508	0.359	0.242	0.377	0.445
	0.50	0.405	1.436	0.260	0.299	0.306	0.389

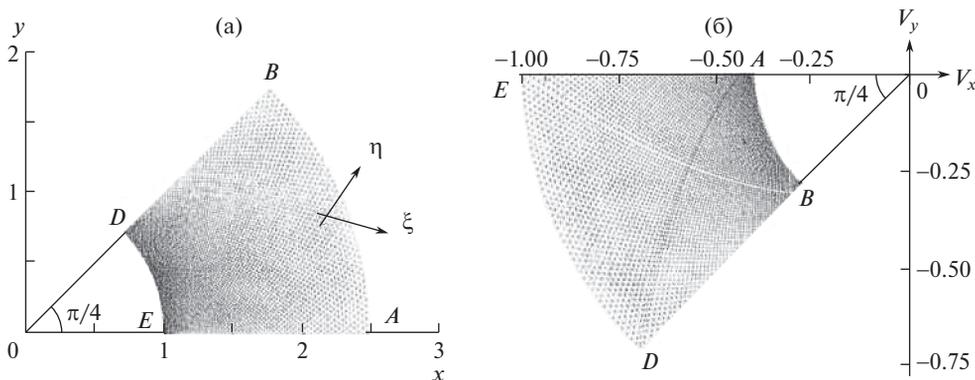


Рис. 5. Линии скольжения (а), голограф скоростей (б) в секторе фланца  $\alpha = \pi/4$  при осесимметричной вытяжке  $r = 1$  и предельном напряжении  $\sigma_1 = 1$  на контуре матрицы.

текучести по критерию локального разрушения заготовки. Форма и размеры заготовки ограничены также условием положительности диссипативной функции, при нарушении которого возможно образование складок потери устойчивости пластического течения.

Алгоритм расчета двумерного плоского напряженного состояния и скоростей пластического течения может быть использован для исследования процессов сложной вытяжки с модификацией процедур вычисления криволинейных контуров матрицы и фланца с определением предельных технологических параметров по критериям максимального растягивающего напряжения и положительности диссипативной функции пластического течения.

Приведенные результаты относятся к начальной стадии пластического течения фланца по теории Мизеса при постоянной толщине начальной заготовки. Моделирование нестационарных процессов сложной вытяжки тонкостенных несимметричных оболочек с изменением толщины стенки и упрочнения материала по теории пластического течения Мизеса, по аналогии с осесимметричными процессами [6–12], требует дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.
2. Аверкиев Ю.А., Аверкиев А.Ю. Технология холодной штамповки. М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
3. Попов Е.А., Ковалев В.Г., Шубин И.Н. Технология и автоматизация листовой штамповки. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 480 с.
4. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 407 с.
5. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. М.: Машиностроение, 1979. 567 с.
6. Nepershin R.I. Applied Problems of Plasticity. Moscow: MSTU "STANKIN", 2016. 310 p.
7. Непершин Р.И. Вытяжка тонкостенной конической оболочки из плоской заготовки // Известия РАН. МТТ. 2010. № 1. С. 139–153.
8. Непершин Р.И. Формообразование фланца из плоской заготовки с отверстием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 2. С. 55–65.
9. Непершин Р.И. Глубокая вытяжка тонкостенной полусферы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 74–84.
10. Nepershin R.I., Prusakov M.A. Half-spherical shell deep drawing // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1863, 210002; DOI:10.1063/1.4992380

11. *Непершин Р.И.* Раздача тонкостенной трубы пуансоном с криволинейным профилем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 80–88.
12. *Nepershin R.I.* Thin-walled tube extension by rigid curved punch // Engineering. 2011.V. 3. № 5. P. 452–460.
13. *Соколовский В.В.* Уравнения пластического равновесия при плоском напряженном состоянии // Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9. Вып. 1.
14. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
15. *Соколовский В.В.* Плоская задача теории пластичности о распределении напряжений вокруг отверстий // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13. Вып. 2.
16. *Соколовский В.В.* Расширение кругового отверстия в жесткопластической пластинке // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 3.
17. *Nepershin R.I.* Plastic tension of thin strip with symmetrical cut-outs // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1738, 170003; DOI:10.1063/1.4951947
18. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.