

УДК 534.26

**ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНОЙ КОНЕЧНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ**

© 2019 г. О. И. Косарев

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия**e-mail: oikosarev@yandex.ru*

Поступила в редакцию 03.12.2018 г.

Принята к публикации 08.08.2019 г.

Получено дисперсионное уравнение свободной конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость. Приведен пример расчета корней дисперсионного уравнения.

Ключевые слова: дисперсионное уравнение, упругая цилиндрическая оболочка, гидроакустические расчеты

DOI: 10.1134/S0235711919060063

Статья посвящена дисперсионному уравнению колебаний свободной конечной упругой цилиндрической оболочки, погруженной в безграничную жидкость. Рассматриваемая задача находится на стыке теорий колебаний упругих цилиндрических оболочек и гидроакустики. Интерес к этой задаче вызван тем, что, несмотря на длительную историю исследований дисперсионных уравнений цилиндрических оболочек и их большую практическую значимость, она до сих пор была не решена.

Постановка задачи. Задана свободная конечная цилиндрическая оболочка (ниже для сокращения — оболочка), погруженная в жидкость, имеющая длину L и свободные края. Оболочка упругая тонкостенная. Внутри оболочки вакуум. Процессы на торцах не рассматриваются. Требуется определить дисперсионное уравнение свободных колебаний оболочки и его корни.

Исследованиям дисперсионного уравнения цилиндрических оболочек посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов. В большей мере исследования проводились за рубежом, причем только для бесконечной оболочки. Имеет смысл ознакомиться с результатами этих исследований, чтобы лучше понять, в чем сходство и отличия дисперсионных уравнений конечных и бесконечных цилиндрических оболочек.

Зарубежные работы. Зарубежные исследования дисперсионного уравнения бесконечной цилиндрической оболочки имеют давнюю историю. В статьях [1, 2], на основе аналитического обзора множества американских и российских работ подведены итоги результатов исследований дисперсионных кривых для свободных колебаний бесконечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость. Под дисперсионными кривыми понимаются графики функций корней дисперсионного уравнения от частоты колебаний.

Исследования выполнялись в течение примерно последних 60 лет. М. Юнгер [3] определил импеданс бесконечной цилиндрической оболочки в жидкости. М. Бэрн и Г. Блайх [4] описали модовый подход к вычислению частот и форм колебаний для бесконечной оболочки. П. Смит [5] идентифицировал три главных типа волн, которые существуют на цилиндрической оболочке, погруженной в жидкость. Г. Ворбертон [6]

опубликовал обсуждение дисперсионных кривых цилиндрических оболочек, учитывающие эффекты жидкости, находящейся вне и внутри оболочки.

Дж. Скотт [7] показал, что некоторые публикации содержат ложные результаты.

В работе [1] рассмотрены дисперсионные кривые для бесконечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, и предложен алгоритм вычисления и визуализации дисперсионных кривых. Матричное уравнение движения цилиндрической оболочки основано на теории оболочек Флюгге в изложении Лейсса. Исходная формула перемещения оболочки w , названного свободной волной (надо полагать волной деформации), в явном виде не задана, но представлена в виде интеграла Фурье. Введен параметр $\kappa = k_d/k$ – безразмерное осевое волновое число волны деформаций оболочки k_d , нормированное относительно акустического волнового числа среды (жидкости) $k = \omega/c$. Относительно волнового числа k_d , (или $\kappa = k_d/k$), составляется и решается дисперсионное уравнение.

В этих работах дисперсионные уравнения цилиндрической оболочки в жидкости составлялись относительно волновых чисел волн изгибающей деформации, бегущих по бесконечной оболочке.

Из отечественных работ отметим работы В.В. Болотина [8] и В.В. Музыченко [9]. В них рассматривались бесконечные оболочки. В работе [8] определялись собственные частоты при заданных волновых числах, бегущих по оболочке изгибных волн и критические скорости флаттера при обтекании оболочки потоком газа. В [9] рассматривалась оболочка в вакууме, так называемая “сухая” оболочка (не в жидкости).

Единственной отечественной работой, в которой было предложено приближенное дисперсионное уравнение для конечной цилиндрической оболочки в жидкости, является [10], в которой дисперсионное уравнение сводится к полиному высокого порядка относительно корней α_j , зависящему от числа взятых экспонент, аппроксимирующих излучаемое оболочкой звуковое поле. В результате решения дисперсионного уравнения число получаемых корней превышало восемь. Однако число определяемых корней α_j для конечной оболочки в жидкости должно быть восемь, $j = 1, \dots, 8$. Восемь фиксированных дискретных значений на каждой частоте колебаний по числу краевых условий (по четыре на каждом конце оболочки). Число краевых условий не зависит от отсутствия или наличия жидкости. В работе [10] не был предложен теоретически обоснованный алгоритм выбора восьми корней из большего числа полученных расчетом корней. По этой причине предложенная в [10] расчетная модель не приемлема.

Проведенный обзор опубликованных работ показал, что в теории колебаний цилиндрических оболочек в жидкости отсутствует решение задачи о колебаниях и излучении конечной цилиндрической оболочки в жидкости с учетом корней дисперсионного уравнения. Выяснилось, что дисперсионное уравнение для конечной оболочки в жидкости отсутствует, а дисперсионным уравнением для бесконечной оболочки воспользоваться нельзя.

Цель статьи – получить дисперсионное уравнение для конечной свободной цилиндрической оболочки в жидкости. Физический смысл задачи заключается в учете влияния звукового давления присоединенной жидкости на корни дисперсионного уравнения конечной цилиндрической оболочки и, следовательно, на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки в жидкости. Звуковое давление действует на внешнюю поверхность оболочки.

Уравнения свободных колебаний оболочки. Уравнения свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки, основанные на моментной теории упругих оболочек Кирхгофа–Лява, имеют вид [11–13]

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \rho_* h a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1 a = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) - \rho_* h a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2 a = 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right) - T_2 - \rho_* h a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 a = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w – осевые (продольные), окружные (тангенциальные) и радиальные перемещения оболочки; T_1, T_2, S, H, M_1, M_2 – упругие силовые факторы; q_1, q_2, q_3 – поверхностные нагрузки в направлениях u, v, w ; a – радиус оболочки; h – толщина оболочки; $\xi = x/a$ и φ – безразмерные координаты в осевом и окружном направлениях; t – время; ρ_* – плотность материала оболочки; L – длина оболочки, $0 \leq x \leq L$.

Решение уравнения свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки (1) можно записать в [12, 13]

$$\begin{aligned} u = U \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad v = V \sin(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad w = W \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \\ U = \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad V = \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad W = \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где n – окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, α_{jn} – корни дисперсионного уравнения, $j = 1-8$ – порядковые номера корней, C_{jn} – искомые коэффициенты, определяемые концевыми граничными условиями, Δ_{jn} – миноры уравнения (1), представленного ниже в матричном виде, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний, f – частота колебаний. В решение (2) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn} .

Для простоты ограничимся рассмотрением одной окружной гармоники n , опускаем $e^{i\omega t}$ зависимость параметров от времени t , а также знаки суммирования по n и j , и сами индексы n и j там, где в них нет особой необходимости. Для определения корней α_{jn} решения (2) представим в виде [12]

$$u = u_0 e^{i\alpha\xi} e^{i\omega t} \cos n\varphi, \quad v = v_0 e^{i\alpha\xi} e^{i\omega t} \sin n\varphi, \quad w = w_0 e^{i\alpha\xi} e^{i\omega t} \cos n\varphi. \quad (3)$$

Подставив решения (3) уравнение (1) получим уравнения свободных колебаний оболочки, которые могут быть представлены в матричном виде

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где L_{jk} – элементы матрицы оболочки в вакууме, $q = Eh/(1 - \mu^2)a$ – удельная жесткость, E – модуль упругости, h – толщина оболочки, μ – коэффициент Пуассона, p_s – звуковое давление, действующее на оболочку по радиальной координате w , вызываемое колебаниями оболочки в жидкости, $q_1 = q_2 = 0$.

Элементы матрицы (4)

$$L_{11} = -\alpha^2 - \frac{1-\mu}{2} n^2,$$

$$L_{12} = \frac{1+\mu}{2} i\alpha n = -L_{21},$$

$$L_{13} = i\alpha\mu - i \frac{z_1 b_1}{r} \alpha^3,$$

$$\begin{aligned}
L_{22} &= -\frac{1-\mu}{2}(1+4\delta^2)\alpha^2 - n^2\left(1+b_2+2\frac{z_2b_2}{r}+\delta^2+\frac{a_2}{r^2}\right), \\
L_{23} = L_{32} &= -n\left[1+b_2+\frac{z_2b_2}{r}+(2-\mu)\delta^2\cdot\alpha^2+n^2\left(\delta^2+\frac{z_2b_2}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)\right], \\
L_{31} &= -L_{13}, \\
L_{33} &= -1-b_2-n^4\frac{a_2}{r^2}-\delta^2(-\alpha^2-n^2)^2-2\frac{z_2b_2}{r}-\alpha^4\frac{a_1}{r^2}, \\
q &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)r} \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12r}, \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2 r^2 \rho_*(1-\mu^2)}{E},
\end{aligned} \tag{5}$$

a_1, b_1 – параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 – параметры шпангоутов; $E = E_0(1 + i\eta)$ – комплексный модуль упругости; η – потери в материале оболочки; $r = a, i$ – мнимая единица.

Каждое из решений u, v, w (2) состоит из восьми слагаемых по числу конечных граничных условий оболочки. Соответственно числу слагаемых для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний ω надо определить восемь корней α_j , входящих в перемещения u, v, w . Физический смысл наличия в (4) давления $q_3 = p_s$, влияющего на параметр α_{jn} , заключается в учете влияния присоединенной жидкости на собственные частоты и формы радиальных колебаний оболочки. При этом принято считать, что звуковое давление в жидкости, прилегающей к поверхности оболочки, действует на поверхность оболочки по направлению радиальных колебаний оболочки w .

Звуковое давление в жидкости. Переходим к главному вопросу – определению звукового давления p_s , которое должно быть перенесено в левую часть уравнения (4). Как известно, в формулах, определяющих излучение цилиндрической оболочки, должно быть задано распределение радиального перемещения поверхности оболочки по ее длине. Для определения давления на поверхности оболочки существуют формулы для плоской задачи [14]

$$p(\varphi) = \rho_0 \omega^2 w(\varphi) \frac{H_n^{(2)}(ak)}{k H_n^{(2)'}(ak)}, \tag{6}$$

где радиальное перемещение, распределенное по окружности

$$w(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Для определения давления звукового поля, излучаемого колеблющейся цилиндрической оболочкой известны две формулы:

Первая из них формула, основанная на импедансе, приведенном Е. Скучиком [15] со ссылкой на первоисточник М.С. Junger [3] для бесконечной оболочки, имеет вид

$$p = \frac{\rho_0 \omega^2 w H_n^{(2)}(r\sqrt{k^2 - k_x^2})}{\sqrt{k^2 - k_x^2} H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - k_x^2})}, \tag{7}$$

где w – радиальное перемещение поверхности оболочки; $k = \omega/c$ – волновое число звуковой волны в жидкости; $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний; c – скорость звука в жидкости; f – частота колебаний в Гц; k_x – осевое волновое число звуковой волны

в жидкости; a – радиус оболочки; $H_n^{(2)}(at), H_n^{(2)'}(at)$ – функция Ганкеля второго рода и ее производная; ρ_0 – плотность жидкости; r – радиальная координата точки определения давления.

В формуле (7) параметры w , k_x приведены без объяснений их физического смысла, хотя в первоисточнике [3] они определены. Обычно формула (7) применяется для бесконечной оболочки, в которой перемещение $w = w(x)$ задается в виде изгибной волны деформации оболочки, распространяющейся вдоль оболочки, с заданным осевым волновым числом k_x [3].

Вторая формула – это формула расчета звукового излучения конечной цилиндрической оболочки при заданном произвольном распределении перемещения $w(x)$ по ее образующей, допускающая его разложение в интеграл Фурье [14]

$$p(x) = \frac{\rho_0 \omega^2 a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \frac{H_n^{(2)}(r\sqrt{k^2 - \gamma^2})}{a\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - \gamma^2})} e^{i\gamma(z-x)} d\gamma dx, \quad (8)$$

где γ – переменная интегрирования, имеющая смысл осевого волнового числа звуковой цилиндрической волны в жидкости, бегущей в направлении оси x .

При выводе формулы (8) произвольное перемещение было представлено в виде интеграла Фурье [2]

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w(z) e^{-i\gamma x} dx e^{i\gamma z} d\gamma, \quad (9)$$

где x , z – разные обозначения одной и той же осевой координаты оболочки, записанные во избежание путаницы в показателях экспонент.

В работе [8] перемещения для бесконечной оболочки приняты в виде бегущей волны деформации

$$\begin{aligned} u &= u_0 e^{i(\omega t - k_d x)} \cos n\varphi, \\ v &= v_0 e^{i(\omega t - k_d x)} \sin n\varphi, \\ w &= w_0 e^{i(\omega t - k_d x)} \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (10)$$

где $k_d = 2\pi/\lambda$ – волновое число осевой изгибной волны деформации оболочки, λ – длина волны деформаций. Формула звукового давления при заданном радиальном перемещении w (10) имеет вид [8]

$$p_e = \frac{\rho_0 \omega^2 a w H_n^{(2)}(a\sqrt{k^2 - k_d^2})}{a\sqrt{k^2 - k_d^2} H_n^{(2)'}(a\sqrt{k^2 - k_d^2})}. \quad (11)$$

В работе [1] исходное звуковое давление жидкости на оболочку $p(a, \varphi, \zeta)$ представлено в виде формулы (8), в которой принято $\gamma = k_d$. Импедансы для бесконечных оболочек в работах [1, 3, 8] по сути одинаковые. Окончательные формулы звукового давления для бесконечной оболочки, используемые в дисперсионных уравнениях [1, 8] сводятся к виду (7), (11).

Для конечной оболочки в жидкости определим физико-математическую модель, т.е. физическую природу и математическое выражение дисперсионного уравнения. В качестве исходной формулы расчета звукового давления примем формулу (8). Сначала преобразуем формулу (8) для того, чтобы получить из нее импедансное выражение аналогичное (7), связывающее давление p с перемещением w . Следуя методу, примененному в [14], в формуле (8) заменим переменную интегрирования $\gamma = \cos\alpha$ (при отсчете угла α от продольной оси оболочки) и представим ее в виде контурного интеграла

$$p_s = \frac{\rho_0 \omega^2}{\sqrt{2\pi}} \int_r B_n(k \sin \alpha) \frac{H_n^{(2)}(rk \cos \alpha)}{k \cos \alpha H_n^{(2)'}(ak \cos \alpha)} e^{ikz \sin \alpha} d(k \sin \alpha). \quad (12)$$

В результате вычисления интеграла (12) методом перевала находим точку перевала $\alpha = \theta$, где θ угол, определяющий направление на точку наблюдения. Следовательно, вычислять звуковое давление надо при $\gamma = k \cos \theta$. Подстановку $\gamma = k \cos \theta$ делаем во всех элементах выражения (8), кроме членов, относящихся к собственно перемещению (9). Элементы выражения (8), появившиеся вследствие представления исходного перемещения $w(z)$ в виде интеграла Фурье (9), заменим исходным выражением перемещения (9). В результате получим импедансное выражение, связывающее звуковое давление излучения $p(x)$ и перемещение $w(x)$ на поверхности конечного цилиндра

$$p(x) = \rho_0 \omega^2 w(x) \frac{H_n^{(2)}(rk \sin \theta)}{k \sin \theta H_n^{(2)'}(ak \sin \theta)}. \quad (13)$$

В формуле (13) функция Ганкеля описывает звуковую волну, излучаемую во внешнее пространство под углом θ к оси оболочки. Нам надо определить не звуковую волну, излучаемую оболочкой во внешнее пространство, а воздействие звукового давления на оболочку p_s (4), которое в качестве дополнительной нагрузки (дополнительной к удельной инерционной нагрузке от массы единицы длины оболочки) влияет на собственные колебания оболочки.

Определим эту дополнительную нагрузку. Уравнения колебаний оболочки (1), как всякой упругой системы с распределенными параметрами, составляются для выделенного элементарного участка оболочки, имеющего бесконечно малые размеры и расположенного между сечениями с продольными координатами x и $x + dx$, где x текущая координата. В решении $w = w_0 e^{i\alpha \xi}$ (3) параметр w это радиальное перемещение выделенного участка, расположенного в сечении текущей продольной координаты $\xi = x/a$.

В случае отсутствия жидкости, т.е. в случае “сухой” оболочки, корни α_{jn} в перемещении $w = w_0 e^{i\alpha \xi}$ (3) являются комплексными безразмерными параметрами, их численные значения определяются удельными инерционными и жесткостными параметрами оболочки, отнесенными к единице длины оболочки. Корни α_{jn} влияют на частоты собственных колебаний оболочки.

В случае оболочки, погруженной в жидкость, на оболочку действует дополнительное звуковое давление жидкости, содержащее функции Ганкеля, в аргументы которой входят осевые волновые числа γ (8). При этом ни физическая сущность корней α_{jn} , ни их число не изменяется. Вследствие влияния присоединенной жидкости изменяются численные значения корней “сухой” оболочки, что приводит к изменению частот собственных колебаний оболочки. Поскольку безразмерные корни α_{jn} не являются волновыми числами, имеющими размерность (1/м), они не могут выступать в роли осевых волновых чисел k_x . Другими словами, корни α_{jn} не могут присутствовать в аргументах функции Ганкеля в роли осевых волновых чисел.

Поскольку местоположение точки наблюдения в пространстве произвольное, то в формуле (13) параметры r и θ произвольные. Преобразуем формулу излучения (13) в формулу, определяющую действие акустического давления на оболочку. Определим параметры r и θ . Действие звукового давления на оболочку рассматриваем как нагрузку, локально действующую на выделенный элементарный участок оболочки в направлении радиального перемещения w (3), т.е. в направлении нормальном к поверхности оболочки. Считая, что реакция жидкости на колебания оболочки (звуковое давление), действующая на каждый текущий выделенный элементарный участок, направлена по нормали к элементарному участку оболочки, в формуле (13) примем $r = a$, и угол $\theta = 90^\circ$. При таком выборе угла θ устраняется влияние его на корни α_{jn} и подтверждается прогнозируемый из физических соображений факт, что собственные колебания свободной конечной оболочки в жидкости не могут зависеть от угла θ .

В результате преобразования формулы звукового излучения оболочки (8), получаем формулу звукового давления, действующего как дополнительная нагрузка на поверхность конечной оболочки, совершающей собственные колебания

$$p(x) = \rho_0 \omega^2 w(x) \frac{H_n^{(2)}(ak)}{kH_n^{(2)'}(ak)}. \quad (14)$$

Формула (14) удовлетворяет изложенным выше физическим соображениям. Аргумент функции Ганкеля в (14) не содержит корней α_{jn} дисперсионного уравнения. Перемещения $w(x)$ в левой и правой частях уравнения (4) одинаковые, что позволяет перенести давление (14) в левую часть уравнения (4) и получить дисперсионное уравнение свободных колебаний оболочки в жидкости. Формула (14), характеризующая реакцию жидкости на колебания оболочки, отличается от (13) не только написанием, но и физическим смыслом. Специфика давления по (14) в том, что это не звуковая волна, излучаемая оболочкой во внешнее пространство, а дополнительная распределенная нагрузка на конструкцию, влияющая на ее собственные колебания.

Сравним полученную формулу (14) с известными формулами. Сравнение формул реакции жидкости (звукового давления) для конечной (14) и бесконечной (11) оболочек показывает, что они имеют принципиальные различия в части аргумента функции Ганкеля. Формула (14) также отличается от формулы для плоской задачи (1), поскольку формула (1) получена для оболочки, не имеющей координаты длины x . Формула (1) вообще не для оболочки, она для поперечного сечения оболочки, в плоскости которого задано распределение перемещения по окружной координате φ . Переносить это выражение в левую часть уравнения колебаний (4) нельзя, т.к. в левой части уравнения записано перемещение в виде (3), содержащее осевую координату x .

Дисперсионное уравнение. Дисперсионное уравнение конечной оболочки в жидкости получим, перенесем звуковое давление (14), с учетом $w = w(x)$ и $p_s = p(x)$, в левую часть уравнения (4).

Предварительно уравнение (4) представим в краткой записи

$$\left(L(\alpha) + \omega_*^2 \bar{E} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{a}{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{pmatrix}.$$

Используя краткую запись

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{a}{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{pmatrix}$$

определим перемещения

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = L^{-1} \frac{a}{q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Вернемся к третьему уравнению матричного уравнения (4)

$$-L_{13}u + L_{23}v + (L_{33} + \omega_*^2)w = \frac{a}{q} p_s$$

Определив из (15) перемещения (u, v, w) и, выразив их через w , получим уравнение

$$\frac{\Delta_0}{\Delta^{(1)}} w = \frac{a}{q} p_s, \quad (16)$$

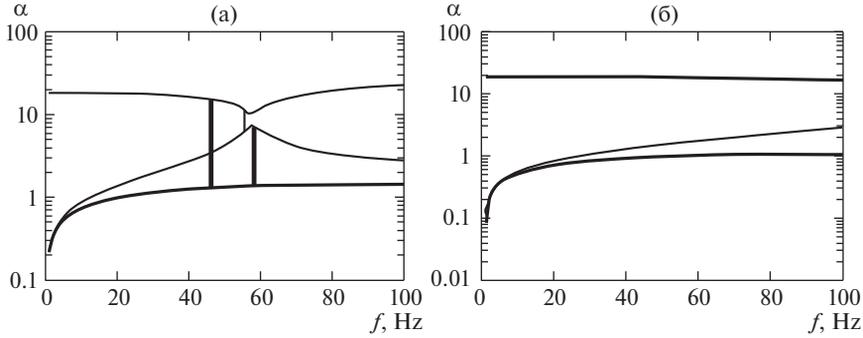


Рис. 1. Корни дисперсионного уравнения оболочки: а) в жидкости; б) в вакууме.

где $\Delta^{(1)}$ – минор, а Δ_0 – определитель матрицы (5),

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 \end{vmatrix} = L_{11}L_{22} + L_{12}^2 + \omega_*^2(L_{11} + L_{22}) + \omega_*^4,$$

$$\Delta_0 = \det \left[L_{(\alpha)} + \omega_*^2 \bar{E} \right],$$

$$\Delta_0 = (L_{11} + \omega_*^2)(L_{22} + \omega_*^2)(L_{33} + \omega_*^2) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} + \\ + L_{13}(L_{22} + \omega_*^2)L_{13} - (L_{11} + \omega_*^2)L_{23}^2 + L_{12}^2L_{33}.$$

Представим звуковое давление через импеданс Z , $p_s = Zw$, и, подставив его в (16), получим дисперсионное уравнение свободных колебаний оболочки в жидкости

$$\left(\frac{\Delta_0}{\Delta^{(1)}} - Z \right) w = 0, \quad Z = \frac{\rho\omega^2}{k} \frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (17)$$

В итоге, с учетом (17) дисперсионное уравнение для конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, имеет вид

$$\frac{\Delta_0(\alpha)}{\Delta^{(1)}(\alpha)} - \frac{\rho_0\omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{qk H_n^{(2)'}(ka)} = 0. \quad (18)$$

Решение дисперсионного уравнения (18), т.е. определение его корней, сводится к решению биквадратного полинома

$$A_8\alpha^8 + A_6\alpha^6 + A_4\alpha^4 + A_2\alpha^2 + A_0 = 0. \quad (19)$$

Параметры полинома $A_8 - A_0$ не выписаны из-за их громоздкости, обусловленной выражениями (5). В результате решения биквадратного полинома (19) получим четыре квадратных корня, после извлечения квадратов получим восемь комплексных корней, из них четыре корня положительных и четыре корня отрицательных, модули у соответствующих положительных и отрицательных корней одинаковые.

Проведенное исследование показывает, что дисперсионное уравнение конечной цилиндрической оболочки в жидкости (18) и его корни α_{jn} не зависят ни от длины оболочки, ни от осевых волновых чисел.

Пример расчета. В качестве примера, на рис. 1 приведены расчетные модули корней α дисперсионного уравнения конечной цилиндрической оболочки в жидкости в зави-

симости от частоты колебаний f (Гц): а) в жидкости; б) в вакууме. Исходные расчетные данные: $E = 2 \times 10^{11}$ Н/м², $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, $\rho_* = 11 \times 10^3$ кг/м³, $c = 1500$ м/с, $n = 2$, $a = 4$ м, $h = 0.04$ м, $\mu = 0.3$.

На рис. 1а, б два верхних корня практически сливаются в один, самые нижние корни близки по числовым значениям, а промежуточные корни имеют существенные отличия, особенно в интервале частот $f = 40$ – 60 Гц. На рис. 1а видны вертикальные линии между кривыми, это условные фоновые линии, создаваемые графической программой Mathcad.

Из полученных данных следует, что корни дисперсионного уравнения для оболочки в жидкости могут существенно отличаться от корней оболочки в вакууме. Это различие может существенно влиять на амплитудно–частотные характеристики колебаний оболочек и резонансные частоты.

Заключение. Получено дисперсионное уравнение (18) для конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, учитывающее влияние жидкости на собственные колебания оболочки. Уравнение получено на основе физико-математической модели, включающей: 1) теорию цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява (1), используемую для получения уравнения движения оболочки; 2) формулу звукового давления (8), излучаемого конечной цилиндрической оболочкой в жидкости, преобразованную путем математически и физически обоснованного перехода к давлению, действующему на оболочку в условиях собственных колебаний оболочки (14).

Решения, выражаемые формулами (14) и (18), это новые решения в области виброакустики цилиндрических оболочек. Полезность их обусловлена тем, что корни α_{jn} дисперсионного уравнения необходимы для проведения всех последующих гидроакустических расчетов цилиндрических оболочек. Они используются в расчетах собственных и вынужденных колебаний реальных составных оболочечных конструкций и излучаемых ими гидроакустических полей [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скенк Г.А., Бентхайн Дж. В. Эффективное вычисление и визуализация дисперсионных кривых для тонкой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Ж. Акустический журнал. 1955. Т. 41. № 5. С. 828.
2. Shenck H.A. The efficient calculation and display of dispersion curves for a thin cylindrical shell immersed in a fluid // Proc. ICA 14. 1992. P. 8.
3. Junger M.C. The physical interpretation of the expression for an outgoing wave in cylindrical coordinates // J. Acoust. Soc. Am. 1953. V. 25. P. 40.
4. Bleich H.H., Baron M.L. Free and forced vibrations of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustical medium // J. of Applied Mechanics. 1954. P. 167.
5. Smith P.W. Jr. Phase velocities and displacement characteristics of free waves in a thin cylindrical shell // J. Acoust. Soc. Am. 1955. №. 27. P. 1065.
6. Warburton G.B. Vibration of a cylindrical shell in an acoustic medium // J. Mechanical Engineering Science. 1961. № 3. P. 69.
7. Scott J.F.M. The free modes of propagation of a infinite fluid-loaded thin cylindrical shell // J. Sound Vib. 1988. № 125. P. 241.
8. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литер. 1961. С. 222.
9. Музыкачко В.В. Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука. 1993. С. 336.
10. Косарев О.И., Тарханов Г.В., Остапишин Н.М., Бедный И.А., Себякина А.Н. Колебания конечной свободной цилиндрической оболочки в жидкости. Колебания и волны в механических системах: Материалы международной научной конференции / Под ред. акад. Р.Ф. Ганиева. М.: Институт компьютерных исследований. 2012. С. 65.

11. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение. 1977. С. 260.
12. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. Т. 3. С. 418.
13. *Forsberg K.* Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // J. AIAA 1964. V. 2. № 12. P. 2150.
14. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. С. 349.
15. *Скучик Е.* Основы акустики. М.: Мир. 1976. Т. 2. С. 542.
16. *Косарев О.И.* Импедансы излучения и рассеяния конечных цилиндрических оболочек при расчете первичного и вторичного дальнего поля // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 1. С. 16.