

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ,  
ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 534.13,533.6.013.42

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТОНКОЙ УЗКОЙ ЛЕНТЫ  
В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ**© 2019 г. А. А. Афанасьева<sup>1,2,\*</sup>, А. М. Гуськов<sup>1,2</sup>, Г. Я. Пановко<sup>1,2,\*\*</sup><sup>1</sup> *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*<sup>2</sup> *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия*\**e-mail: alexandra95\_19@mail.ru*\*\**e-mail: gpanovko@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2019 г.

Принята к публикации 26.08.2019 г.

В статье исследуются нелинейные аэроупругие колебания системы Windbelt, принцип работы которой построен на использовании явления флаттера. В качестве расчетной схемы принимается длинная узкая лента с шарнирными закреплениями по краям, и исследуются ее поперечно-крутильные колебания, возникающие при действии аэродинамических сил. Определена зависимость критической скорости в зависимости от силы натяжения ленты. Исследуется закритическое поведение системы и установление автоколебательного режима, для которого определяется его частота и амплитуда колебаний.

*Ключевые слова:* ветроэнергетика, Windbelt, аэроупругие колебания, флаттер, автоколебания

DOI: 10.1134/S0235711919070022

**Введение.** Ветроэнергетика является одним из основных направлений альтернативной энергетики, в основе которой кинетическая энергия воздушных масс атмосферы преобразуется в электрическую, механическую или тепловую энергии. Для преобразования энергии воздушного потока в электрическую обычно используются ветряные турбины. В последнее время активно исследуется возможность генерирования электрической энергии с помощью ветрового генератора, который в англоязычной литературе называют “Windbelt” [1–8].

Принципиальная схема устройства показана на рис. 1 [4]. На гибкой ленте 2, натянутой между двумя жесткими опорами 1, закреплен постоянный магнит 3 (известны конструкции с двумя и более магнитами [5]). Соосно с магнитом сверху и снизу ленты на раме 4 установлены индуктивные катушки 5. При определенных условиях воздушный поток может нарушить статическое равновесие ленты и привести к возбуждению ее колебаний по типу аэроупругого флаттера [9]. Колебательное движение магнита индуцирует возникновение переменного электрического тока в индуктивных катушках, который может выпрямляться в постоянное напряжение.

В научной литературе имеются исследования, связанные с генерацией электрического тока в подобных устройствах. Вместе с тем, вопросы, связанные с исследованиями колебаний тонкой ленты в зависимости от ее натяжения и скорости набегающего потока изучены недостаточно подробно. Известные расчетные модели основаны на различных упрощающих допущениях, ограничивающие исследование закритического поведения ленты.

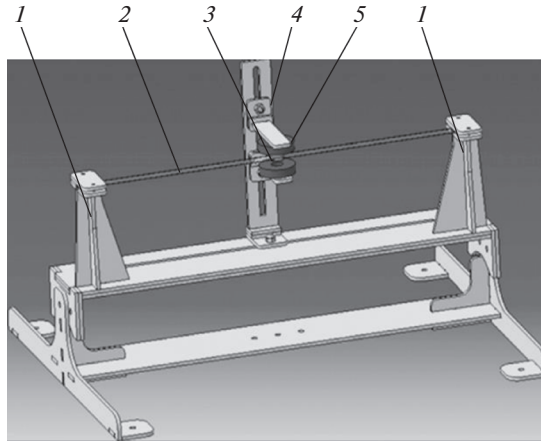


Рис. 1. Принципиальная схема ветрогенератора “Windbelt”.

Целью данной статьи является моделирование динамики ленты в воздушном потоке, анализ ее движения и возможность оптимизации конструкции.

**Постановка задачи.** Шарнирно закрепленная лента длиной  $l$  находится в набегающем потоке воздуха (рис. 2). Поперечное сечение ленты постоянно по длине. Лента вдоль оси  $Oz$  растянута продольной силой  $T$ . При действии на ленту горизонтального поперечного потока воздуха (ветровой нагрузки) с постоянной скоростью  $U$ , возникает подъемная сила  $q_y$ . Ветровая нагрузка равномерно распределена по длине.

Считаем, что равнодействующая подъемной силы приложена по линии, проходящей через центры давления поперечных сечений ленты, параллельной оси  $Oz$  и расположенной от нее на расстоянии  $x_0$  (рис. 2).

В каждом текущем сечении ленты действует погонная подъемная сила  $q_y$ , которая приложена в центре давления (точка  $B$  на рис. 2) [9]

$$q_y = \rho U^2 b C_y / 2, \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность среды (плотность воздуха);  $b$  – ширина поперечного сечения ленты;  $C_y$  – коэффициент подъемной силы.

Приведем подъемную силу (1) к центру поперечного сечения  $C$ . Т.к. линия расположения центров давления не совпадает с центральной осью поперечного сечения ленты, дополним систему действующих сил погонным крутящим моментом

$$\mu_z = \rho U^2 b^2 C_y / 8, \tag{2}$$

здесь принято, что центр давления подъемной силы находится на расстоянии  $x_0 = b/4$  хорды от центра тяжести ленты.

Коэффициент подъемной силы  $C_y$  для тонкого прямоугольного профиля ленты задается нелинейным аналитическим выражением, вычисленным через обратное конформное отображение известного решения для обтекания кругового цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости на внешность отрезка

$$C_y = 2\pi \sin(\varphi_z), \tag{3}$$

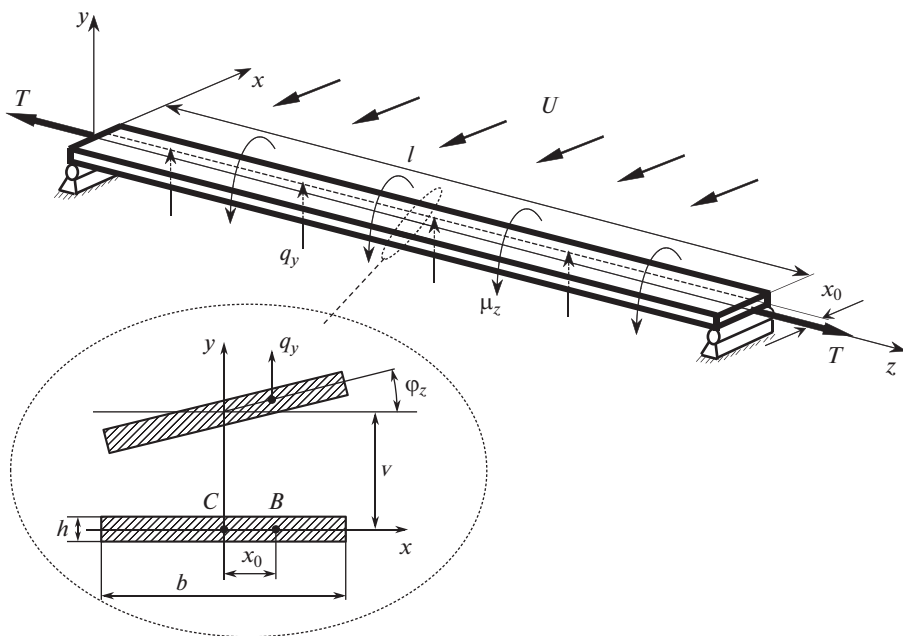


Рис. 2. Расчетная схема.

где  $\tilde{\varphi}_z$  – эффективный угол атаки, который представляет собой разность геометрического угла атаки  $\varphi_z$  и его динамической составляющей, и определяется по формуле

$$\tilde{\varphi}_z = \varphi_z - (\dot{\varphi}_z b/4 + \dot{v})/U,$$

где  $v$  – вертикальное перемещение оси ленты (полюса).

Раскладывая выражение (3) в ряд Тейлора и, ограничиваясь первыми двумя членами ряда, получим

$$C_y = A_1(\tilde{\varphi}_z - A_3\tilde{\varphi}_z^3), \quad (4)$$

где  $A_1 = 2\pi$ ,  $A_3 = 2\pi/6$  – коэффициенты разложения.

**Уравнения движения.** Движение расчетной модели описывается системой уравнений поперечно-крутильных колебаний для шарнирно-опертой струны, нагруженной распределенной силой и распределенным моментом. С учетом выражений (1) и (2) для распределенных аэродинамических сил и выражения (4) для коэффициента подъемной силы система уравнений, описывающих поперечно-крутильные колебания ленты, примет вид

$$\begin{cases} \rho_1 A (\partial^2 v / \partial t^2) + d_v (\partial v / \partial t) - T (\partial^2 v / \partial z^2) = \rho U^2 b A_1 (\tilde{\varphi}_z - A_3 \tilde{\varphi}_z^3) / 2; \\ \rho_1 I_0 (\partial^2 \varphi_z / \partial t^2) + d_\varphi (\partial \varphi_z / \partial t) - G I_k (\partial^2 \varphi_z / \partial z^2) = \rho U^2 b^2 A_1 (\tilde{\varphi}_z - A_3 \tilde{\varphi}_z^3) / 8, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\rho_1$  – плотность материала ленты;  $G$  – модуль сдвига;  $A = bh$  – площадь поперечного сечения;  $I_0 = bh(b^2 + h^2)/12$  – полярный момент инерции;  $I_k = bh^3/3$  – геометрическая жесткость сечения (полосы) при кручении;  $d_v$ ,  $d_\varphi$  – коэффициенты линейно-вязкого демпфирования по Рэлею при изгибе и кручении, соответственно.

Приведем систему (5) к безразмерному виду, используя безразмерные переменные: время  $\tau = t/t^*$ , прогиб  $\xi = v/V^*$ , угол  $\varphi = \varphi_z/2\pi$ , координата  $\zeta = z/Z^*$ , скорость  $\Lambda = U/U^*$  и сила  $\theta = T/T^*$ , где масштабы  $t^* = l/h\sqrt{\rho_1(b^2 + h^2)/4G}$ ;  $U^* = \sqrt{8Gh^3/(3\rho_0 a_0 b l^2)}$ ;  $V^* = h$ ;  $Z^* = l$ ;  $T^* = Gh^2$ .

Тогда система уравнений (5) запишется в виде

$$\begin{cases} \partial^2 \xi / \partial \tau^2 - \theta \alpha_1 (\partial^2 \xi / \partial \zeta^2) + d_\xi (\partial \xi / \partial \tau) = \\ = \Lambda^2 \beta_1 \varphi - \Lambda \gamma_1 \partial \varphi / \partial \tau - \Lambda \eta_1 \partial \xi / \partial \tau - A_3 \beta_1 [\Lambda \varphi - \gamma_2 (\partial \varphi / \partial \tau) - \eta_2 (\partial \xi / \partial \tau)]^3 / \Lambda; \\ \partial^2 \varphi / \partial \tau^2 - \partial^2 \varphi / \partial \zeta^2 + d_\varphi (\partial \varphi / \partial \tau) = \\ = \Lambda^2 \varphi - \Lambda \gamma_2 (\partial \varphi / \partial \tau) - \Lambda \eta_2 (\partial \xi / \partial \tau) - A_3 [\Lambda \varphi - \gamma_2 (\partial \varphi / \partial \tau) - \eta_2 (\partial \xi / \partial \tau)]^3 \Lambda, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \eta_1, \gamma_2, \eta_2, d_\xi, d_\varphi$  – безразмерные комплексы, определяемые по соотношениям (7). Все они выражаются через два фиксированных безразмерных параметра  $\varepsilon = h/b$  и  $\kappa = \sqrt{\rho/\rho_1}$ .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1 + \varepsilon^2)/4\varepsilon; & \beta_1 &= (1 + \varepsilon^2)/3\varepsilon; \\ \gamma_1 &= \kappa \sqrt{6A_1(1 + \varepsilon^2)}/\varepsilon^3/24; & \eta_1 &= \kappa \sqrt{6A_1(1 + \varepsilon^2)}/\varepsilon/6; \\ \gamma_2 &= \kappa \sqrt{6A_1/[\varepsilon(1 + \varepsilon^2)]}/8; & \eta_2 &= \kappa \sqrt{6A_1/[\varepsilon(1 + \varepsilon^2)]}/2; \\ d_\xi &= 0.1\pi\kappa\sqrt{\theta\alpha_1}; & d_\varphi &= 0.1\pi\kappa. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь коэффициенты демпфирования приняты равными 0.05 от соответствующего критического значения ( $k$  – номер гармоники). Приведение уравнений движений ленты (5) к безразмерному виду (6) позволяет сократить число параметров до четырех:  $\varepsilon, \kappa, \Lambda, \theta$ , из которых только  $\Lambda$  и  $\theta$  являются определяющими.

**Расчет критической скорости.** Для анализа работы Windbelt System необходимо исследовать закритическое поведение устройства. С этой целью зафиксируем критическое значение управляющего параметра безразмерной скорости воздушного потока  $\Lambda_*$ , при котором происходит потеря устойчивости (достигается режим флаттера).

Методом Галеркина система уравнений (6) сводится к системе с конечным числом степеней свободы. Решение представим в виде разложения по координатным функциям  $u_k(\zeta)$

$$\xi = \sum_{k=1}^n p_k(\tau) u_k(\zeta), \quad \varphi = \sum_{k=1}^n q_k(\tau) u_k(\zeta),$$

где  $u_k(\zeta) = C_k \cdot \sin(k\pi\zeta)$  выделенный ряд функций, удовлетворяющий граничным условиям для принятой расчетной модели (рис. 2). Константа  $C_k$  определяется из условия ортонормированности функций  $u_k(\zeta)$

$$\begin{aligned} (u_k, u_m) &= 0, & k &\neq m \\ (u_k, u_k) &= 1, & \forall k \end{aligned} \quad \rightarrow \quad C_k^2 \int_0^1 \sin^2(k\pi\zeta) d\zeta = 1.$$

После применения метода Галеркина система (6) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{p}_k + \theta\alpha_1 p_k \pi^2 k^2 + d_\xi \dot{p}_k - \Lambda^2 \beta_1 q_k + \Lambda \gamma_1 \dot{q}_k + \Lambda \eta_1 \dot{p}_k + C_3(1/\Lambda) A_3 \beta_1 (\Lambda q_k - \gamma_2 \dot{q}_k - \eta_2 \dot{p}_k)^3 = 0; \\ \ddot{q}_k + q_k \pi^2 k^2 + d_\varphi \dot{q}_k - \Lambda^2 q_k + \Lambda \gamma_2 \dot{q}_k + \Lambda \eta_2 \dot{p}_k + C_3(1/\Lambda) A_3 u_k^3 (\Lambda q_k - \gamma_2 \dot{q}_k - \eta_2 \dot{p}_k)^3 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $C_3 = \int_0^1 u_k^4 d\zeta$ .

Существующее тривиальное решение системы (8), соответствует положению равновесия, которое рассматривается как невозмущенное движение. Для исследования на устойчивость система (8) линеаризуется около положения равновесия [10]

$$\begin{cases} \ddot{p}_k + \theta\alpha_1 p_k \pi^2 k^2 + d_\xi \dot{p}_k - \Lambda^2 \beta_1 q_k + \Lambda \gamma_1 \dot{q}_k + \Lambda \eta_1 \dot{p}_k = 0; \\ \ddot{q}_k + q_k \pi^2 k^2 + d_\varphi \dot{q}_k - \Lambda^2 q_k + \Lambda \gamma_2 \dot{q}_k + \Lambda \eta_2 \dot{p}_k = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} p_k \\ q_k \end{Bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_\xi + \Lambda \eta_1 & \Lambda \gamma_1 \\ \Lambda \eta_2 & d_\varphi + \Lambda \gamma_2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \theta\alpha_1 \pi^2 k^2 & -\Lambda^2 \beta_1 \\ 0 & \pi^2 k^2 - \Lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Решения системы (10) находим в виде  $\mathbf{x} = e^{\lambda \tau} \mathbf{u}$ . Тогда характеристическое уравнение для определения  $\lambda$  примет вид

$$\det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{C}) = 0. \quad (11)$$

В дальнейшем решение будем рассматривать только для первой гармоники ( $k = 1$ ).

Важно подчеркнуть, что динамическая потеря устойчивости должна происходить раньше потери статической устойчивости. В противоположном случае будет наблюдаться явление дивергенции, при котором произойдет полная утрата жесткости ленты на кручение. Соответствующее условие определяется силой натяжения ленты  $\theta$ .

На рис. 3а представлена зависимость критической скорости  $\Lambda_*$  от безразмерной силы натяжения  $\theta$  при фиксированных значениях параметров  $\varepsilon = 0.002$ ,  $\kappa = 0.03$ . График наглядно показывает, что при достижении определенного значения силы натяжения  $\theta = \theta_*$ , критическая скорость достигает значения, равного  $\pi$ , и с дальнейшим увеличением  $\theta$  перестает расти. Такое значение критической скорости  $\Lambda_*$  соответствует дивергенции. Это подтверждается рис. 3б, в, где  $\theta > \theta_*$ . На рис. 3б верхняя ветвь траектории пересекает ось  $\text{Re}(\lambda) = 0$  при значении  $\Lambda_* = \pi$ , что соответствует переходу этой же траектории на графике Аргана (рис. 3в) через точку начала координат, т.е. сначала происходит статическая потеря устойчивости. На рис. 3в кружочками отмечено начало траекторий, а крестиками – их конец. Анализ полученных результатов показывает, что для потери динамической устойчивости раньше, чем потеря статической устойчивости параметр  $\theta$  должен находиться в промежутке  $(0, \theta_*)$ . В настоящей статье принято, что  $\theta = 0.002$ .

На рис. 4а представлены графики траекторий корней  $\lambda$ , вычисленные при выбранных значениях параметров  $\kappa = 0.03$ ,  $\varepsilon = 0.002$ ,  $\theta = 0.002$ ; кружочками обозначено начало траекторий, а крестиками – их конец. Точка перехода графиков на правую полуплоскость характеризует критическое значение параметра скорости  $\Lambda_* = 2.487$ . Величина мнимой части имеет смысл частоты колебаний  $\omega_f$  системы при  $\Lambda = \Lambda_*$ . Значение  $\omega_f$  отображается значением ординаты, указанной на рис. 4а.

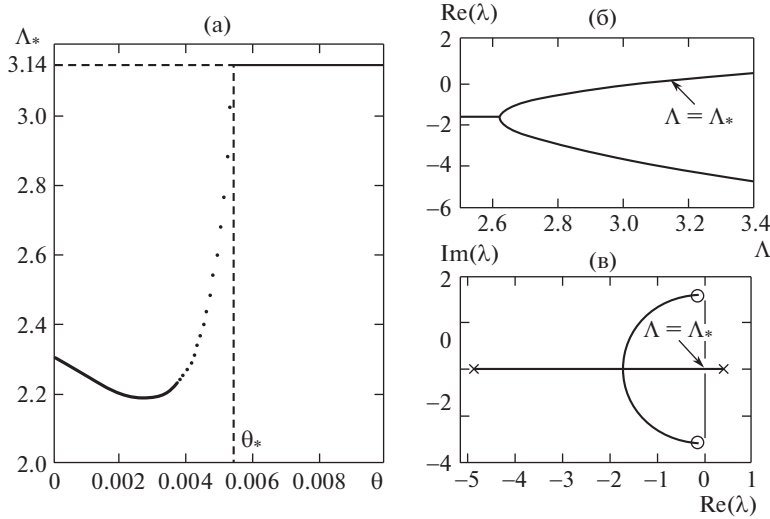


Рис. 3. Зависимости критической скорости  $\Lambda_*$  от силы натяжения  $\theta$ (а) и  $\text{Re}(\lambda)$  от  $\Lambda$ (б); статическая потеря устойчивости на графике Аргана (в).

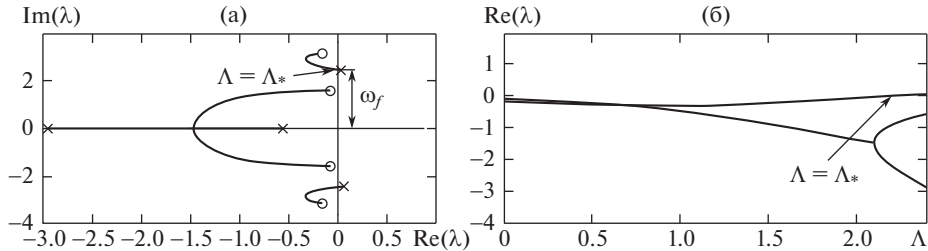


Рис. 4. График Аргана траектории корней (а) и зависимость действительной части корней  $\lambda$  от безразмерной скорости  $\Lambda$ (б).

Само значение  $\Lambda_*$  определяется по графику зависимости действительной части корней  $\text{Re}(\lambda)$  от  $\Lambda$  (рис. 4б) в момент пересечения ее значения  $\text{Re}(\lambda) = 0$ :  $\Lambda_* = 2.203$ .

**Анализ закритического поведения.** Для изучения закритического поведения интегрируется система с нелинейными слагаемыми (8) при  $\Lambda$  большей  $\Lambda_*$  на 10% и на безразмерном промежутке времени  $\tau = 30 \cdot T_f$ , где  $T_f = 1/\omega_f$  – период колебаний для частоты  $\omega_f$ .

Численное моделирование уравнений (8) показывает, что устанавливаются периодические решения, т.е. в закритической области имеется неустойчивое положение равновесия и существуют устойчивые периодические движения, что соответствует поведению автоколебательной системы.

На рис. 5а, б приведены фазовые портреты решений уравнений (8) для вертикального безразмерного перемещения  $\xi(\tau)$  сечения  $\zeta = 0.5$  и его угла поворота  $\phi(\tau)$  при двух различных начальных условиях:

$$1 : \{\xi, \dot{\xi}, \phi, \dot{\phi}\} = \{0, 0.85, 0, 0\}; \quad 2 : \{\xi, \dot{\xi}, \phi, \dot{\phi}\} = \{127.28, 0, 0, 0\}.$$

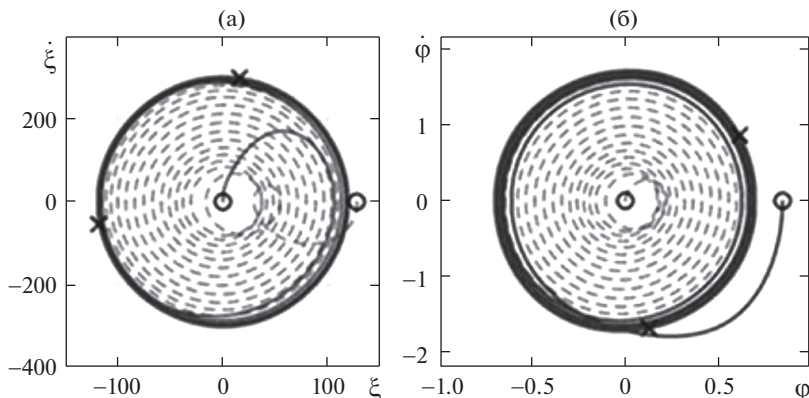


Рис. 5. Фазовые портреты для координатных функций: (а) перемещения  $\{\xi, \dot{\xi}\}$ ; (б) угла поворота  $\{\phi, \dot{\phi}\}$ .

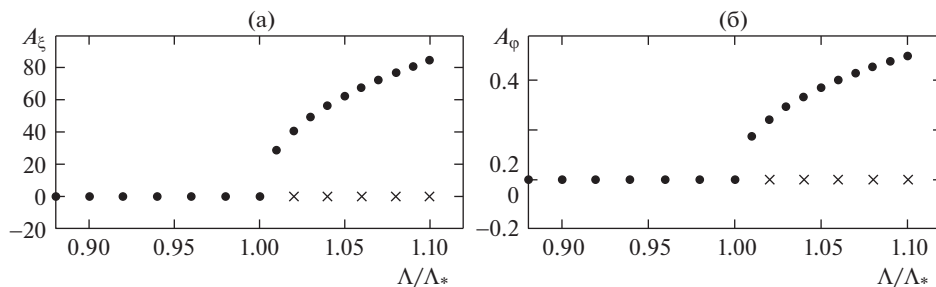


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для  $\xi$  (а) и для  $\phi$  (б).

По графикам отчетливо видно притяжение траекторий к предельным циклам (сплошные линии соответствуют начальным условиям 1, штриховые – условиям 2, кружками обозначено начало траектории, а крестиками – их конец).

**Построение бифуркационной диаграммы.** Проведенный анализ устойчивости равновесного прямолинейного положения ленты позволяет построить бифуркационную диаграмму. На рис. 6 показаны бифуркационные диаграммы для амплитуд  $A_\xi$  и  $A_\phi$ , построенные численным интегрированием с помощью метода установления [11], где точками обозначены устойчивые движения, а крестиками – неустойчивые движения.

**Заклучение.** В статье проанализированы малые изгибно-крутильные колебания гибкой ленты под действием набегающего потока воздуха, которые в упрощенном виде описывают динамику ветрогенератора типа “Windbelt”. Изгибно-крутильные колебания ленты описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных, в которых нелинейность задается коэффициентом подъемной силы для тонкой пластинки, аналитически вычисленным через обратное конформное отображение известного решения для обтекания кругового цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости.

В результате выполненных расчетов получены значения критической скорости, реализации движений и бифуркационные диаграммы. Показано, что в закритической

области имеются устойчивые периодические движения с амплитудами, пропорциональными квадратному корню из параметра закритичности  $A_{\xi, \varphi} \sim \sqrt{\Lambda - \Lambda_*}$ .

Полученные решения позволяют осуществлять рациональный выбор параметров Windbelt System, работающих в определенном диапазоне скоростей ветрового потока.

**Финансирование работы.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00708).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frayne S.M.* Generator utilizing fluid-induced oscillations США Патент 7573143, 2009.
2. Windbelt Cheap Micro Wind Generator <http://www.reuk.co.uk/wordpress/wind/windbelt-cheap-micro-wind-generator/>
3. Windbelt: Innovative Generator to Bring Cheap Wind Power to Third World <https://inhabitat.com/windbelt-innovative-generator-to-bring-cheap-wind-power-to-third-world/>
4. *Vu Dinh Quy, Nguyen van Sy, Dinh Tan Hung, Vu Quoc Huy.* Wind tunnel and initial field tests of a micro generator powered by fluid-induced flutter // August Energy for Sustainable Development. 2016. V. 33. P. 75. <https://doi.org/>  
<https://doi.org/10.1016/j.esd.2016.04.003>
5. DIY Wind Turbine: The Ultimate Guide [update 2019] <https://freeonplate.com/wind-turbine/>
6. *Bibo A., Li G., Daqaq M.F.* Electromechanical modeling and normal form analysis of an aeroelastic micro power generator // J Intell Mater Syst Struct April 2011. 22 (6). P. 577.
7. *Gipe P.* Wind energy basics: a guide to home and community scale wind-energy systems / Chelsea Green Publishing. 2009.
8. *Bryant M, Garcia E.* Modeling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester // J Vib Acoust 2011.133(1).011010.
9. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости / под ред. Э.И. Григолюка М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1959. С. 523.
10. *Меркин Д.П.* Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., стер. СПб.: Изд-во "Лань", 2003. С. 304.
11. *Бахвалов Ж.С.* Численные методы. Монография. СПб.: Невский диалект, 2002. С. 230.