ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2019, № 7, с. 80–87

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3:624.04

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И НАДЕЖНОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КИНЕМАТИЧЕСКИМИ, СИЛОВЫМИ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

А. С. Гусев[1], Л. В. Зинченко[1,*], С. А. Стародубцева[2]

[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия
[2] Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва, Россия
**e-mail: zinlar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.07.2019 г.
Принята к публикации 26.08.2019 г.

Рассматривается актуальный для современного машиностроения вопрос расчетного прогнозирования надежности механических систем, находящихся в эксплуатации под воздействием нерегулярных нагрузок. В задачи расчета входит определение надежности функционирования таких систем как вероятности непревышения параметрами их качества (линейными и угловыми перемещениями, ускорениями подрессоренной массы, деформациями упругого элемента и т.п.). Предложена новая методика выбора оптимальных параметров систем виброзащиты мобильных машин и методика расчета критической скорости их движения по дорогам со случайными неровностями.

Ключевые слова: статистическая динамика систем, надежность, параметрические колебания, устойчивость

DOI: 10.1134/S023571191907006X

Автомобильные прицепы в процессе эксплуатации подвергаются различным интенсивным нерегулярным воздействиям, которые рандомизируются и адекватное математическое описание которых возможно только методами теории вероятностей и методами теории случайных функций [1, 2].

Одна из расчетных схем автомобильного прицепа представлена на рис. 1.

Здесь $\varphi(t)$ – угол поворота подрессоренной массы относительно точки ее крепления к автомобилю О; $v(t)$ – скорость буксировки прицепа; $h(x)$ – высота неровностей дороги; $h(t)$ – кинематическое воздействие на колесо; c, b – жесткость и коэффициент демпфирования системы подрессоривания; l, r – линейные размеры; F – сила инерции; $y(t)$, $a(t)$ – вертикальное перемещение и ускорение подрессореной массы; $f(t)$ – расчетное воздействие.

Дифференциальное уравнение для определения угла $\varphi(t)$ получаем в виде [3]

$$J\ddot{\varphi} = lc(h - y) + lb(\dot{h} - \dot{y}) + F(r + y),$$

а для определения перемещения $y(t) = l\varphi$ имеем уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2(1 - \varepsilon(t))y = f(t) + 2n\dot{h} + \omega_0^2 h, \tag{1}$$

где $2n = \dfrac{l^2 b}{J}$; $\omega_0^2 = \dfrac{l^2 c}{J}$; $f(t) = \dfrac{lr}{J}F(t)$; $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{lc}F(t)$.

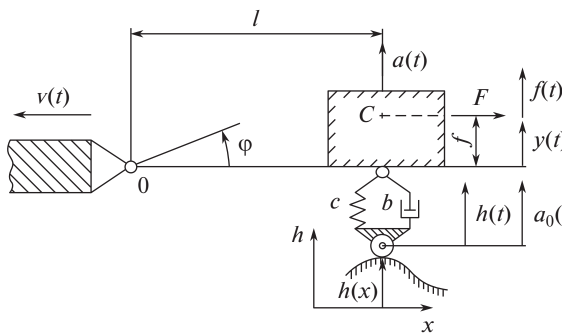

Рис. 1. К расчету автомобильного прицепа.

Здесь интенсивности случайного силового воздействия $f(t)$ и кинематических воздействий $h(t)$ и $\dot{h}(t)$ зависят от средней скорости движения $\overline{v}(t) = \mathrm{const}$, а интенсивность параметрического воздействия $\varepsilon(t)$ – от ее флуктуационной составляющей $\tilde{v}(t)$, и при $\tilde{v}(t) = 0$ имеем $\varepsilon(t) = 0$.

Из (1) следуют уравнения для определения устойчивости движения прицепа

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2(1 - \varepsilon(t))y = 0, \tag{2}$$

реакций $y(t)$ на воздействия $f(t)$ и $h(t)$,

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t), \tag{3}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = 2n\dot{h}(t) + \omega_0^2 h(t)\,, \tag{4}$$

для определения деформации упругого элемента $u(t) = h(t) - y(t)$

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = -\ddot{h}(t) \equiv a_0(t), \tag{5}$$

и для определения ускорения подрессоренной массы $a(t) = \ddot{y}(t)$

$$a(t) = 2n\dot{u} + \omega_0^2 u.$$

Для анализа устойчивости движения прицепа с переменной случайной скоростью $v(t)$ уравнение (2) дополним внешним воздействием в виде белого шума $q(t)$ с малой интенсивностью k_q, а процесс $\varepsilon(t)$ будем считать независимым от процесса $q(t)$ белым шумом с заданной интенсивностью k_ε. Задача состоит в определении интенсивности параметрического воздействия $\varepsilon(t)$, при котором движение прицепа будет неустойчивым.

Для решения этой задачи имеем уравнение

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y\varepsilon(t) + q(t) \equiv P(t). \tag{6}$$

Правую часть уравнения (6), обозначенную как $P(t)$, можно считать белым шумом с интенсивностью

$$k_p = k_q + \omega_0^4 s_y^2 k_\varepsilon$$

и спектральной плотностью

$$S_p(\omega) = \frac{k_p}{2\pi},$$

где s_y^2 – дисперсия процесса $y(t)$.

Квадрат модуля передаточной функции уравнения (6) будет определяться как

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \tag{7}$$

а для определения дисперсии s_y^2 получаем алгебраическое уравнение

$$s_y^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |H(i\omega)|^2 S_p(\omega)d\omega = \frac{k_p}{4n\omega_0^2} = \frac{k_q + \omega_0^4 s_y^2 k_\varepsilon}{4n\omega_0^2}. \tag{8}$$

Отсюда получаем

$$s_y^2 = \frac{k_q}{\omega_0^2(4n - \omega_0^2 k_\varepsilon)}.$$

При $k_\varepsilon \to \frac{4n}{\omega_0^2}$ имеем $s_y^2 \to \infty$.

Заключаем, что движение прицепа будет устойчивым при выполнении условия

$$k_\varepsilon < \frac{4n}{\omega_0^2}. \tag{9}$$

Здесь величина $k_\varepsilon \equiv k_\varepsilon(\tilde{v})$ зависит от флуктуационной составляющей скорости движения $\tilde{v}$. Так что из (9) имеем возможность определить критическую скорость буксировки $v_{\text{кр}}$.

Если параметрическое воздействие $\varepsilon(t)$ не является белым шумом и имеет некоторую спектральную плотность $S_\varepsilon(\omega) \neq \text{const}$, то его (в соответствии с понятием о главном параметрическом резонансе) можно приближенно заменить на белый шум интенсивностью $k_\varepsilon = 2\pi S_\varepsilon(2\omega_0)$. В этом случае условие устойчивости движения прицепа (9) принимает вид

$$2\pi\omega_0^2 S_\varepsilon(2\omega_0) < 2n. \tag{10}$$

Здесь также величина $S_\varepsilon(2\omega_0)$ зависит от скорости $\tilde{v}$.

Реакцию системы $y(t)$ на воздействие в виде белого шума $f(t)$ с интенсивностью k_f определяем из решения уравнения (3). В соответствии с (7) и (8) дисперсия процесса $y(t)$ в этом случае будет определяться как

$$s_y^2 = \frac{k_f}{4n\omega_0^2}. \tag{11}$$

Если процесс $f(t)$ не является белым шумом и имеет спектральную плотность $S_f(\omega) \neq \text{const}$, то, в соответствии с фильтрующими свойствами системы реагировать в основном на воздействия по частоте близкие к частоте собственных колебаний ω_0, его можно заменить на белый шум с интенсивностью $k_f = 2\pi S_f(\omega_0)$ и после этого искомую дисперсию определять по формуле (11) [4].

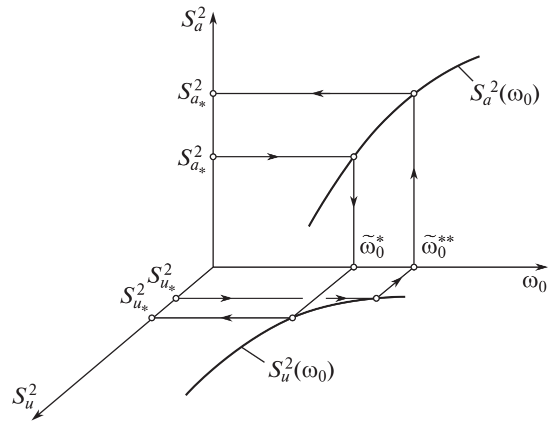

Рис. 2. Зависимости дисперсий процессов $u(t)$ и $a(t)$ от частоты собственных колебаний системы ω_0.

Реакцию системы $y(t)$ на кинематическое воздействие $h(t)$ определим из решения уравнения (4), квадрат модуля передаточной функции которого от $h(t)$ к $y(t)$ будет определяться по формуле

$$|H_{hy}(i\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 + 4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}. \tag{12}$$

Полагая процесс $h(t)$ белым шумом с интенсивностью k_h и спектральной плотностью $S_h(\omega) = \frac{1}{2\pi}k_h$, получим для определения дисперсии процесса $y(t)$ выражение

$$s_y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{hy}(i\omega)|^2 S_h(\omega)d\omega = \frac{k_h}{4n}(\omega_0^2 + 4n^2). \tag{13}$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что требования к системе виброзащиты противоречивы: для уменьшения перемещения $y(t)$ от воздействия $f(t)$ требуется увеличивать ее жесткость, а для уменьшения этого перемещения от $h(t)$ ее требуется уменьшать. Оптимальное значение квадрата частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}_0^2$ определяем из условия минимума суммарного от этих воздействий перемещения. Имеем

$$\tilde{\omega}_0^2 = \left(\frac{k_f}{k_h}\right)^{1/2}.$$

При $k_f = 0$ имеем $\tilde{\omega}_0^2 = 0$, а при $k_h = 0$ $\tilde{\omega}_0^2 \to \infty$.

Дисперсия процессов $u(t)$ и $a(t)$ определяется из решения уравнений (4) и (5). Получаем

$$s_u^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_1(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega)d\omega \approx \frac{\pi}{2n\omega_0^2} S_{a_0}(\omega_0);$$

$$s_a^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_2(i\omega)|^2 S_{a_0}(\omega)d\omega = \frac{\pi}{2n}(\omega_0^2 + 4n^2)S_{a_0}(\omega_0),$$

где первая передаточная функция определяется по формуле (7), а вторая – по формуле (12); $S_{a_0}(\omega)$ – спектральная плотность процесса $a_0(t)$.

Зависимости дисперсий процессов $u(t)$ и $a(t)$ от частоты собственных колебаний системы ω_0 имеют вид, показанный на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что требования к системе виброзащиты по жесткости противоречивы: при ее увеличении ускорение объекта виброзащиты возрастает, а деформация упругого элемента уменьшается; при ее уменьшении – ускорение уменьшается, а деформация возрастает.

Определение оптимальной жесткости усложняется тем, что требования к системе виброзащиты формулируются в различных единицах измерения: по перемещениям $u(t)$ – в единицах длины, а по ускорениям $a(t)$ – в единицах ускорения.

Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_0^*$ из условия ограничения дисперсии ускорения $s_a^2 \le s_{a*}^2$, получаем вполне определенную дисперсию перемещения s_{u*}^2. Определив оптимальную частоту $\tilde{\omega}_0^{**}$ из условия ограничения дисперсии деформации упругого элемента $s_u^2 \le s_{u*}^2$, получаем вполне определенное значение для дисперсии ускорения s_{a*}^2.

За оптимальное значение частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}_0$ можно принять ее промежуточное значение

$$\tilde{\omega}_0 = \alpha\tilde{\omega}_0^* + \beta\tilde{\omega}_0^{**},$$

где α – значимость (вес) первого условия, β – значимость (вес) второго условия, а $\alpha + \beta = 1$.

Надежность функционирования рассматриваемой механической системы [5] можно оценить:

– вероятностью того, что перемещение $y(t)$ подрессоренной массы за время t ни разу не превысит допустимого значения y_* (т.е. вероятностью непробоя за это время амортизатора)

$$P\{y(\tau) \le y_*, \tau \in (0,t)\}; \tag{14}$$

– вероятностью того, что деформация $u(t)$ упругого элемента за время t ни разу не превысит допустимого значения u_* (т.е. при $u_* = mg/c$ – вероятностью того, что за это время не произойдет отрыва колеса от дороги)

$$P\{u(\tau) \le u_*, \tau \in (0,t)\}; \tag{15}$$

– вероятностью того, что дифферент $\varphi(t)$ прицепа за время t ни разу не превысит допустимого значения φ_*

$$P\{\varphi(\tau) \le \varphi_*, \tau \in (0,t)\}; \tag{16}$$

– вероятностью того, что ускорение $a(t)$ подрессоренной массы за время t ни разу не превысит допустимого значения a_* (т.е. вероятностью того, что сила инерции при $m\ddot{y}$, действующая на ограничитель хода, не превысит допустимого значения ma_*)

$$P\{a(\tau) \le a_*, \tau \in (0,t)\}; \tag{17}$$

– вероятностью того, что "резкость" движения, определяемая как, $k(t) = \dddot{y}(t)$ за время t ни разу не превысит допустимого значения k_*

$$P\{k(\tau) \le k_*, \tau \in (0,t)\}. \tag{18}$$

Соотношения (14)–(18) можно обобщить и записать в виде одной формулы для расчета надежности как вероятности того, что параметр качества $x(t)$ функционирования системы за время t ни разу не превысит допустимого значения x_*, определяемого как

$$P(t) = P\{x(\tau) \le x_*, \tau \in (0,t)\} = \exp\left(-n(t)\exp\left(-\frac{x_*^2}{2s_x^2}\right)\right), \tag{19}$$

где $n(t) = \dfrac{t}{2\pi}\dfrac{s_{\dot{x}}}{s_x}$ – ожидаемое за время t число максимумов процесса $x(t)$; s_x^2 – дисперсия процесса $x(t)$; $s_{\dot{x}}^2$ – дисперсия его первой производной.

Из соотношения (19) следует, что наиболее вероятное за время t наибольшее значение x^* процесса $x(t)$ ориентировочно можно вычислить по формуле

$$x^*(t) = s_x\sqrt{2\ln(n(t))}, \tag{20}$$

а надежность системы оценить коэффициентом запаса надежности за время t как

$$\alpha(t) = x^*(t)/x_*.$$

Из соотношения (20) следует, что обычно принимаемое в технике правило "трех стандартов" требует уточнения. При $n = 100$ имеем $x^* \approx 3S_x$, а при $n = 10000$ $x^* \approx 4.29S_x$.

В заключение отметим, что практическая реализация предложенной методики расчета надежности механических систем при случайных внешних воздействиях связана с определенными трудностями:

1. Определение вероятностных характеристик кинематических воздействий $h(t)$ по вероятностным характеристикам пути $h(x)$ и скорости движения машины v обусловлена возможностью вычисления производных от $h(t)$, тогда как эти процессы описываются обычно формально недифференциальными случайными функциями. Это требует предварительного статистического сглаживания этих траекторий, например, так как это сделано в работе [2].

2. Определение вероятностных характеристик процесса $F(t)$, а, следовательно, и вероятностных характеристик процесса $\varepsilon(t)$, требует решения задачи о переезде случайных неровностей пути, приводящее к флуктуации скорости движения машины и появлению соответствующих сил инерции [6]. Эта задача может быть решена с использованием энергетического соотношения

$$v(t)|v(t)| = 2gh(t) \tag{21}$$

и методов статистической линеаризации нелинейных функций.

При линеаризации соотношения (21) по методу равенства дисперсий дисперсия пульсационной составляющей скорости движения будет определяться по формуле

$$s_v^2 = \frac{2}{\sqrt{3}}gs_h,$$

где $g = 9.8$ м с$^{-2}$; s_h – стандарт высоты неровностей.

Спектральные плотности $v(t)$ и $\dot{v}(t)$ определяются известными методами теории случайных функций [7].

3. Возможность использования в работе метода сведения случайных процессов с переменными по частоте спектрами к белым шумам с постоянными спектрами обусловлена фильтрующими свойствами динамических систем реагировать в основном на воздействия по частоте близкие к частоте собственных колебаний системы. При большом демпфировании это может приводить к определенным неточностям.

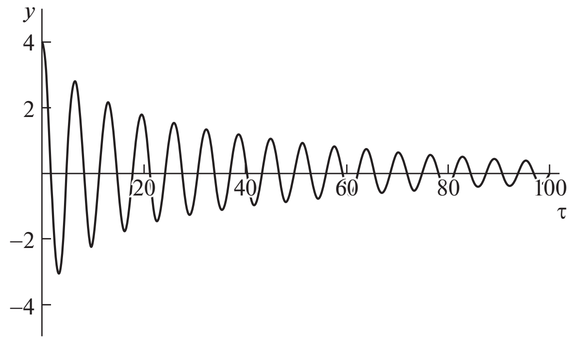

Рис. 3. Траектория процесса $y(\tau)$.

4. Возможность практического использования в расчетах устойчивости приближенного соотношения (10) требует его экспериментальной проверки. Здесь это было сделано путем вычислительного эксперимента – численного решения стохастического аналога уравнения Матье–Хилла вида

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + (1 + \varepsilon(\tau))y = 0.$$

При спектральной плотности процесса $\varepsilon(\tau)$ вида

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{s_\varepsilon^2}{1+\omega^2}, \quad \omega \geq 0, \tag{22}$$

где s_ε^2 – дисперсия процесса $\varepsilon(\tau)$; τ – безразмерное время; n – безразмерный коэффициент демпфирования.

Условие устойчивости (10) получаем в виде

$$s_\varepsilon^2 < 5n, \tag{23}$$

где число 5 соответствует некоторой скорости $\tilde{v}$.

Из (23) следует, что при увеличении демпфирования система становится более устойчивой. При $n = 0$ система всегда устойчива.

Траектория процесса $\varepsilon(\tau)$ моделируется по следующей формуле Шинозуки

$$\varepsilon(\tau) = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} c_i \cos(\omega_i\tau + \alpha_i),$$

где $c_i^2 = S_\varepsilon(\omega_i)\Delta\omega_i$, $\Delta\omega_i$ – шаг квантования спектральной плотности (22) , α_i – случайная величина равномерно распределенная в интервале $(0; 2\pi)$.

Одна из полученных траекторий процесса $y(\tau)$ для устойчивой системы при $n = 0.05$, $y(0) = 4$, $s_\varepsilon^2 = 0.2$ показана на рис. 3.

По результатам численных экспериментов был сделан вывод о возможности использования соотношения (10) для практических расчетов.

Заключение. В статье рассмотрен комплекс вопросов, возникающих при создании новой техники, предназначенной функционировать в условиях одновременного воздействия на нее интенсивных случайных силовых, кинематических и параметрических воздействий. Получены формулы для расчета надежности рассмотренной механической системы как вероятности непревышения параметрами качества ее функционирования (перемещениями, ускорениями и т.п.) допустимых для них значений.

Разработана методика выбора оптимальных параметров систем виброзащиты мобильных машин и методика расчета критической скорости их движения по дорогам со случайными неровностями.

Полученное приближенное условие устойчивости движения экспериментально проверено численно на моделях со случайными параметрическими воздействиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем. Москва, Машиностроение, 1999. С. 504.
2. *Гусев А.С.* Вероятностные методы в механике машин и конструкций. Москва. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. С. 223.
3. *Чирков В.П., Окопный Ю.А., Радин В.П.* Колебания линейных систем. Москва. Изд-во “Спектр”, 2014.
4. *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. Москва, Машиностроение. 1984. С. 240.
5. *Махутов Н.А.* Критериальная база прочности, ресурса, надежности, живучести машин и человеко-машинных комплексов // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 5.
6. *Ротенберг Р.В.* Подвеска автомобиля. Москва, Машиностроение. 2004. С. 270.
7. *Whitney C.A.* Random processes in physical systems. New York: John Willey, 1990.