
ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 534

**ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ
ЛОКАЛЬНЫХ ДЕФЕКТОВ СТЕРЖНЕЙ**© 2020 г. А. М. Ахтямов^{1,2,*}, М. А. Ильгамов^{1,2,3}¹ *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, Уфа, Россия*² *Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*³ *Институт машиноведения им. А.А. Благодирова РАН, Москва, Россия***e-mail: AkhtyamovAM@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.06.2018 г.

Принята к публикации 25.12.2019 г.

В статье дается обзор исследований по трем подходам в решении задач идентификации локальных дефектов стержней и трубопроводов и смежных задач. В первом подходе локальные дефекты моделируются условиями сопряжения, во втором — дельта-функциями, входящими в дифференциальное уравнение, в третьем подходе продольные полости и трещины моделируются непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью. В обзоре, состоящем из двух частей, описываются работы, посвященные идентификации дефектов распределенных механических систем с помощью собственных частот, а также с помощью проходящих и отраженных волн. Вторая часть обзора посвящена обзору работ, использующих второй и третий подходы — моделированию дефектов дельта-функциями и непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью.

Ключевые слова: дефект, стержень, трубопровод, собственные частоты, проходящие и отраженные волны

DOI: 10.31857/S0235711920020042

Три основных подхода к обнаружению дефектов в упругих системах. Стержни, балки являются деталями конструкций, в которых могут образовываться локальные дефекты типа трещин, вмятин, полостей, местной коррозии. Важной является задача их ранней диагностики. Часто для выявления дефекта в стержне конечной длины и его местоположения используются собственные частоты колебаний.

В случае стержней большой длины по сравнению с длинами волн такой способ определения дефектов оказывается неудобным. Более подходящим оказывается метод определения дефектов по проходящим и отраженным от них волнам.

Для идентификации дефектов систем с помощью собственных частот, а также с помощью проходящих и отраженных волн будем рассматривать три основных подхода. В первом подходе локальные дефекты моделируются условиями сопряжения, во втором — дельта-функциями, входящими в дифференциальное уравнение. Третий подход применяется, как правило, для протяженных дефектов. В нем продольные полости и трещины моделируются непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью.

Существует другой подход, основанный на моделировании дискретной системой жестко закрепленных масс, невесомых пружин или конечно-элементной моделью и описываемой матричным обыкновенным дифференциальным уравнением по времени с постоян-

ными коэффициентами [1, 2]. Такое уравнение имеет конечное число собственных значений, а собственным формам колебаний отвечают собственные векторы. Исследования, выполненные с помощью такого подхода, не являются сложными [3].

В настоящем обзоре описываются работы, посвященные идентификации дефектов распределенных механических систем с помощью собственных частот, а также с помощью проходящих и отраженных волн. Рассматриваются балки, стержни и трубопроводы, которые моделируются непрерывной системой и описываются набором уравнений в частных производных по времени и по одной или нескольким пространственным координатам.

Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки, о которых более подробно написано в пунктах, посвященных каждому из подходов.

Заметим, что наш обзор связан с интересами авторов и ни в коей мере не претендует на полноту.

Моделирование дефекта условиями сопряжения. Локальные дефекты часто моделируют условиями сопряжения. Для трещин используют условия сопряжения для безмассовых пружин [1], а для полостей – условия для сосредоточенных масс (с отрицательным значением). Первыми, кто показал, что трещины могут быть смоделированы безмассовыми пружинами растяжения-сжатия при продольных колебаниях стержня и вращательной при изгибных колебаниях стержня были Райс и Леви [4]. Связь между глубиной двухсторонней трещины и коэффициентом жесткости пружины установлена в работе [5]. Начиная с работы Фрюнда и Херрманна (Freund, Herrmann) [6], моделирование раскрытой трещины как продольной пружины становится повсеместным, причем не только в теоретических, но и в инженерных исследованиях [7]. Моделировать полость условиями для сосредоточенных масс (или инерционных элементов) впервые было предложено для изгибных колебаний в работе [8], а для продольных – в работе [9].

В последнее время различными авторами предлагаются новые условия сопряжения для трещин. В работе [10] при помощи таких условий сопряжения получены новые результаты об идентификации местоположения и параметров надреза в балке по собственным частотам изгибных колебаний.

В работе [11] для диагностирования надреза предложено использовать собственные частоты из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). Ранее другими авторами использовались два спектра и более спектров [1]. Однако это были спектры задач, которые имели отличающиеся друг от друга краевые условия. А в [11] используются те же самые краевые условия, но рассматриваются колебания вокруг разных осей. Такой подход позволяет доказать корректность обратной задачи и однозначно идентифицировать размеры дефекта (трещины или полости) балки Эйлера–Бернулли. Он позволяет дать “объемное видение” дефекта, подобно тому, как трехмерный объект можно идентифицировать по трем его проекциям. Использование в качестве данных восстановления не только спектров разных задач с дифференциальными уравнениями одного порядка (например, спектров изгибных колебаний вокруг разных осей), но и спектров задач с дифференциальными уравнениями разных порядков (например, спектров изгибных и продольных колебаний стержня) позволяет решать актуальные задачи однозначной идентификации местоположения и размеров дефектов (полостей, надрезов, вмятин и т.п.), решение которых невозможно при использовании традиционных подходов.

Подробно ознакомиться с исследованиями по идентификации местоположения и параметров дефектов можно по двум главам работы [1]. Одна из глав посвящена выявлению дефектов с помощью собственных частот продольных колебаний стержня, другая – идентификации дефектов с помощью собственных частот изгибных колебаний стержня. Мы не будем подробно останавливаться на этих исследованиях. Укажем лишь, что в [12] решена задача нахождения положения s по изменениям двух собственных частот продольных колебаний стержня. В [13] рассматривается задача опре-

деления высоты и положения *точечной массы*, прикрепленной к тонкому стержню по ее воздействию на собственные частоты. В [14] показывается, что положение трещины однозначно определяется по асимптотическому виду спектра. В [16] показано, что жесткость и расположение повреждения однородной свободно опертой балки определяется единственным образом (за исключением симметрии) изменениями m -й и $2m$ -й частот. Альтернативное отождествление задается изменениями m -й частоты балки со свободно опертыми граничными условиями и $(m + 1)$ -й частоты балки с другими краевыми условиями.

Значительное число работ написано авторами, А.Г. Хакимовым, а также А.О. Ватульяном и его учениками.

В [17] по трем собственным частотам изгибных колебаний определяются координата надреза, его глубина и длина. В [18] по двум собственным частотам изгибных колебаний определяются коэффициенты жесткости опор консольной балки. А при известной координате надреза и его длине по собственной частоте определяется его глубина.

В [19] в статической и динамической постановке определяются место и размеры поперечного надреза в вертикальной штанге, растянутой под действием собственного веса и силы, приложенной на нижнем конце. В [20] эта же задача решается с учетом внутреннего трения в пределах надреза. По двум собственным значениям определяется место, соотношение размеров поперечного надреза, а также коэффициент внутреннего трения в пределах надреза в вертикальной штанге, растянутой под действием собственного веса.

В [21, 22] по трем собственным частотам изгибных (крутильных) колебаний балки определяются координата надреза, его глубина и длина.

В [22] по трем собственным частотам крутильных колебаний определены место и размеры повреждения в виде поперечного надреза вала.

В [23–25] по двум собственным частотам изгибных (поперечных) колебаний определяются радиус и толщина утонченной центральной области мембраны.

В [26] по двум собственным частотам крутильных колебаний определены начальная координата и длина продольного сквозного радиального разреза полого вала.

В [27] по трем собственным частотам продольных колебаний определяется начальная координата, величина прикрепленной распределенной массы к ступенчатому стержню и отношение площадей.

В [28] по трем собственным частотам крутильных колебаний определяются координата, длина и параметр надреза бурильной колонны.

В [29] представлено решение задачи идентификации условий замыкания (сопряжения) провода по первым собственным частотам колебаний напряжения в нем; показана корректность задачи; дан метод ее решения и приведены соответствующие примеры.

В [30] приведены результаты расчета местоположения трещины и жесткости в ее области по экспериментальным собственным частотам продольных колебаний.

В [31] показано, что местоположение полости и ее объем определяются по двум собственным частотам изгибных колебаний стержня. Результаты этих исследований хорошо согласуются с результатами работы А.О. Ватульяна, Н.О. Солюянова [32]. Аналогичная модель и выводы приводятся в работах [33, 34], но уже для продольных колебаний стержня.

В [35] предлагается метод, позволяющий вычислить местоположение и объем двух полостей в стержне по собственным частотам изгибных колебаний. В работе [36] полость моделируется условиями сопряжения для сосредоточенных масс (но с отрицательными значениями). В [37] аналогичная задача решена для двух масс, сосредоточенных на балке.

В [38] получены новые результаты об идентификации местоположения и параметров надреза в балке по собственным частотам изгибных колебаний.

Определение местоположения и параметров дефектов с помощью собственных частот удобно для механических распределенных систем конечной длины. Если же объект (например, стержень) оказывается бесконечным, то такой подход оказывается неудобным, т.к. спектр такой задачи является не дискретным, а непрерывным. Более удобным оказывается подход, основанный на использовании проходящих и отраженных волн. Так, например, в [39] рассмотрена задача обнаружения дефектов в протяженных объектах типа штанговых колонн нефтедобывающих скважин и магистральных трубопроводных систем. В таких объектах не все участки могут быть доступны для визуального осмотра и приборного диагностирования [40].

Решение обратной задачи позволяет определить координату надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной волн в месте наблюдения.

В [41–44] определяется координата надреза и параметр, содержащий его глубину и длину, по данным падающей и отраженной продольной и крутильной волн в месте наблюдения.

В [45] рассматривается отражение от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу, и прохождение изгибной бегущей волны. В этой работе решена обратная задача определения начальной координаты распределенной массы и ее величины по данным отраженной волны в точке наблюдения.

В [46, 47] определяется координата воздушной полости и ее длина по данным отраженной продольной и изгибной волны в месте наблюдения. В [48, 49] определяется начальная координата распределенной массы и ее величина по данным отраженной волны в точке наблюдения.

Изучение продольных и проходящих волн оказывается эффективным не только для протяженных объектов. Оно эффективно и для обнаружения дефектов конечных объектов, подвергшихся ударному воздействию или кратковременному возбуждению. Например, в [50] с помощью проходящих и отраженных волн решается задача определения момента времени удара, длины стержня, массы груза и скорости по данным датчика, который снимает значения смещения стержня в различные моменты времени. Задача решается теоретически с помощью уравнения продольных колебаний однородного стержня. Аналогичные задачи решаются в работах [51, 52].

В [53] получены формулы определения момента и места разрыва трубопровода по данным тензодатчика и предложена схема взаимодействия с ГЛОНАСС, которая позволяет мгновенно обнаруживать места утечек и повреждений трубопроводов, проложенных под водой, и своевременно ликвидировать последствия аварии. В [54] рассматривается обратная ретроспективная задача определения местоположения и момента времени возбуждения струны внешним объектом.

Использование дельта-функций. В предыдущем пункте при изучении колебаний стержней с поперечным надрезом для стыкования решений в двух областях принимается некоторая модель в виде условий сопряжения. Этот подход, приемлемый в случае одного надреза, становится весьма трудоемким при наличии нескольких надрезов в стержне. Кроме того, должна быть задана длина надреза вдоль стержня, между тем она известна не всегда, например, на стадии зарождения трещины. Трудно определить жесткость пружины в указанной выше модели. Поэтому желательно построить простейшую модель колебаний стержня с несколькими зарождающимися трещинами, в которой отсутствовали бы указанные выше жесткость пружины и длина надреза вдоль стержня (или расстояние между берегами трещины).

Подход, использующий дельта-функции оказывается более эффективным, когда диагностируется не одна, а несколько дефектов. В отечественной литературе, посвященной выявлению дефектов по собственным частотам колебаний, трещины моделируют дельта-функциями в работах Е.И. Шифрина и М.А. Ильганова. Однако подходы, используемые для моделирования трещин, у этих авторов отличаются.

Поясним сначала подход, используемый Е.И. Шифриным на примере продольных колебаний стержня. Он получает уравнения с дельта-функциями основываясь на условиях сопряжения для трещин. В работах [55, 56] вместо функции $u(x)$, характеризующей продольные смещения при продольных колебаниях стержня, используется функция, которая является решением уравнений Штурма–Лиувилля

$$u_j''(x) + \lambda u_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad x_{j-1} < x < x_j$$

и удовлетворяет условиям сопряжения

$$u_j'(x_j) = u_{j+1}'(x_j), \quad u_{j+1}(x_j) - u_j(x_j) = \Delta_j = EA c_j u_j'(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

а значит, имеет разрывы в точках x_j .

Вводится гладкая функция

$$u_0(x) = u(x) - \sum_{k=1}^n \Delta_k H(x - x_k),$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда для которой выполняются уравнения,

$$u_0''(x) + \lambda u_0(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \Delta_k H(x - x_k) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение и введя новую переменную

$$w(x) = u_0'(x),$$

получается уравнение

$$w''(x) + \lambda \left[1 + EA \sum_{k=1}^n c_k \delta(x - x_k) \right] w(x) = 0,$$

представляющее собой уравнение вида

$$\Phi''(\tau) + \lambda m(\tau) \Phi(\tau) = 0, \quad 0 < \tau < 1,$$

которое ранее уже изучалось М.Г. Крейнном, показавшим, что функция $m(\tau)$ однозначно восстанавливается по двум спектрам [57–59]. В результате удается доказать, что любое число трещин может быть обнаружено и идентифицировано с помощью двух спектров, отвечающих двум типам условий на концах стержня, свободные концы и свободный конец – закрепленный конец. Рассмотрены численные примеры, иллюстрирующие полученные теоретические результаты.

В [60] рассмотрена задача, аналогичная задаче [56], но для стержня переменного сечения. Предполагается, что площадь сечения является непрерывно дифференцируемой функцией координаты. Получены результаты, аналогичные результатам [56], т.е. путем сведения задачи к обратной задаче Штурма–Лиувилля доказано, что любое число трещин однозначно идентифицируется по двум спектрам, отвечающим условиям свободный – свободный и свободный закрепленный на концах. Рассмотрены численные примеры.

В работе [61] рассмотрены задачи идентификации конечного числа малых трещин в стержне и балке по собственным частотам. Малым трещинам отвечают пружины с малыми податливостями. Это позволяет упростить задачу и свести ее к линейным относительным податливостям пружин. Задачу о продольных колебаниях стержня со свободными концами удается свести к уравнениям, встречающимся в различных областях чистой и прикладной математики (в задачах анализа сигналов, идентификации простых полюсов мероморфной функции, реконструкции полигональной области по комплексным моментам, идентификации малых дефектов в упругих телах и др.). Методы решения таких уравнений хорошо известны. Получены следующие результаты.

Если известно, что в стержне имеется не более чем N трещин, то с помощью $2N$ собственных частот, отвечающих продольным колебаниям стержня со свободными концами, можно определить пары точек, расположенных симметрично относительно середины стержня, в которых могут находиться трещины, и суммарную податливость стержней, расположенных в симметричных точках. Кроме этого, показано, что с помощью $2N + 1$ собственных частот, отвечающих продольным колебаниям стержня, один конец которого закреплен, а другой свободен, можно определить пары точек, расположенных симметрично относительно середины стержня, в которых могут находиться трещины, и разность податливостей пружин, расположенных в симметричных точках. Рассмотрена также задача о поперечных колебаниях свободно опертой балки с малыми трещинами. В этой задаче получены результаты, аналогичные результатам для продольных колебаний стержня со свободными концами. Более точно, для случая, когда известно, что в балке находится не более N трещин, разработан алгоритм, позволяющий по $2N$ собственным частотам определить пары симметричных точек возможного расположения трещин и суммарную податливость пружин, работающих на поворот.

Другой подход к моделированию трещин дельта-функциями используется в работах М.А. Ильгамова. В нем учитывается особенность зарождающейся трещины, состоящая в том, что в фазе деформации сжатия она исчезает (смыкание берегов трещины), а в фазе деформации растяжения эти берега расходятся. В работе [62] предполагается, что при продольных колебаниях стержня в фазе деформации сжатия берега трещины приходят в соприкосновение, в результате чего движение не отличается от случая сплошного стержня (без трещины). В фазе деформации растяжения эти берега расходятся, в результате чего происходит частичное прохождение продольной волны и ее частичное отражение. Так же, как при моделировании трещины условиями сопряжения, не учитывается пространственное напряженно-деформированное состояние в зоне трещины. Оно предполагается одноосным. Последнее, естественно, не отражает истинную картину напряженно-деформированного состояния вблизи трещины, но может служить некоторым приближением при определении интегральных характеристик как собственные частоты продольных колебаний всего стержня. Указанное отражение волн от трещины в фазе растяжения приводит к взаимодействию разных гармоник продольных колебаний стержня конечной длины, что сильно усложняет анализ. Если принять отношение суммы площадей F_k трещин числом K к общей площади F поперечного сечения балки (рис. 1) порядка 0.1, то взаимодействие гармоник будет не сильным и собственные формы будут мало отличаться от соответствующих форм колебаний стержня без трещин. В [62] рассматривается именно случай $\sum_{k=1}^K (F_k/F) \ll 1$. Это простейшее качественное решение может быть уточнено при учете взаимодействия гармоник.

В уравнении продольного движения стержня $\partial N/\partial x - \rho F \partial^2 u/\partial t^2 = 0$ усилие N принимается в виде $N = E \left(F \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_k F_k L \delta(x - x_k) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, где E , ρ – модуль упругости и плотность материала; u – перемещение, $\delta(x - x_k)$ – дельта-функция; x_k – координата k -й трещины. Трещины могут быть расположены по длине L стержня произвольно. Из последних двух уравнений следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_k^K f_k \delta(\xi - \xi_k) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\xi = x/L, \quad \xi_k = x_k/L, \quad f_k = F_k/F, \quad \tau = (a/L)t, \quad a^2 = E/\rho.$$

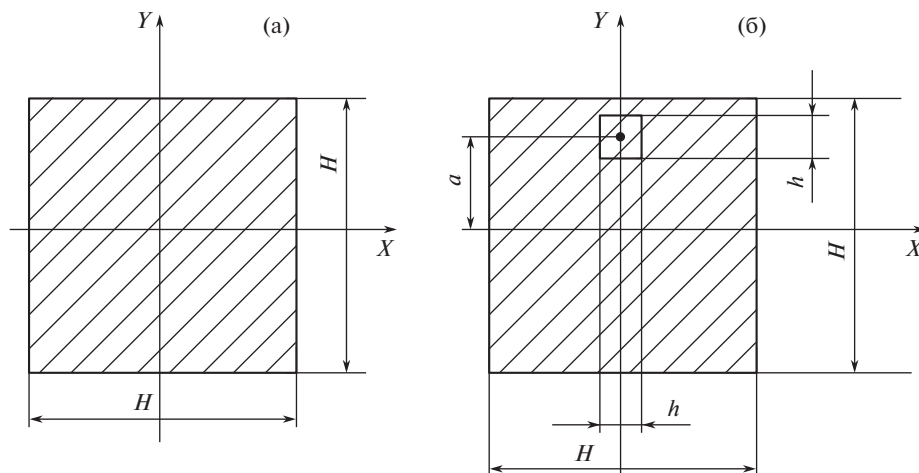


Рис. 1. Поперечные сечения рассматриваемых стержней: (а) сплошной стержень, форма сечения – квадрат; (б) трубчатый стержень, форма сечения – квадрат с полостью.

Для описания деформации сжатия второй член в последнем уравнении следует опустить (в отсутствии трещины $f_k = 0$).

Условия на концах стержня принимаются в виде

$$u = 0 \quad (\xi = 0), \quad \partial u / \partial \xi = 0 \quad (\xi = 1)$$

и условия стыкования решений при смене деформации растяжения на деформацию сжатия (в момент времени τ_*)

$$u(\xi, \tau_* - 0) = u(\xi, \tau_* + 0) = 0, \quad \frac{\partial u(\xi, \tau_* - 0)}{\partial \tau} = \frac{\partial u(\xi, \tau_* + 0)}{\partial \tau}.$$

Этим условиям на концах стержня и условиям стыкования решений удовлетворяют функции для обеих фаз деформации

$$u = U_i \sin \frac{i\pi\xi}{2} \sin \gamma_i \tau \quad (0 < \tau \leq \tau_*), \quad (i = 1, 3, \dots),$$

$$u = V_i \sin \frac{i\pi\xi}{2} \sin \mu_i (\tau - \tau_*) \quad (\tau_* \leq \tau \leq \tau_* + \pi/\mu_i), \quad \tau_* = \frac{\pi}{\gamma_i}.$$

Чем больше число зарождающихся трещин и чем более равномерно они расположены по длине стержня, тем одночленная аппроксимация перемещения точнее отражает картину деформации (в общем случае необходимо брать суммы по i).

С применением этой приближенной модели в [62] определяются собственные частоты, значения которых сравниваются с результатами другой модели, учитывающей не только площадь, но и продольный размер трещины. Показано, что при отношении длины трещины к общей длине стержня, имеющем порядок отношения площади трещины к площади поперечного сечения стержня, можно не учитывать размер трещины вдоль стержня.

Моделирование дефекта непрерывным участком стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью. Моделирование непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью, как правило, применяется при идентификации протяженных дефектов. Часто при ре-

шении задачи используются аналитические методы решения. Поэтому такой подход удобен для ответа на фундаментальные вопросы. Например, с помощью такого подхода может быть получен важный для дефектоскопии вопрос: Всегда ли по собственным частотам свободных изгибных колебаний стержня можно выявить дефект?

Как показывают исследования, проведенные в работах [8, 63, 64] собственные частоты поперечных колебаний балки с полостью на срединной оси *выше* собственных частот колебаний сплошной балки. Это в корне отличается от поведения частот колебаний балки с открытой трещиной. Собственные частоты балки с раскрытой трещиной *ниже* собственных частот сплошной бездефектной балки [65].

При перемещении полости балки от срединной оси к внешнему краю, балка с полостью становится в итоге балкой с открытой трещиной. На основе этого факта, а также учитывая сведения о том, что собственные частоты балки с полостью выше, а балки с трещиной, наоборот, ниже собственных частот сплошной бездефектной балки, сделаем предположение: при определенном положении полости балки, собственные частоты колебаний балки с полостью совпадают с собственными частотами колебаний сплошной бездефектной балки.

В работе [66] показана справедливость данного предположения на примере изгибных колебаний сплошного бездефектного стержня и стержня с призматической полостью, проходящей по всей длине стержня (трубчатого стержня) (рис. 1).

Задача об изгибных колебаниях консольной балки длины L заменой $u(x, t) = y(x) \cos \omega t$ сводится к спектральной задаче

$$y^{(4)}(x) = \lambda^4 y(x), \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0,$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$, ω – частотный параметр.

Как видно из рис. 1, параметр a определяет положение полости трубчатого стержня. При $a = 0$ полость лежит на срединной оси стержня. При значениях параметра $a \geq \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2}\right)$ рассматриваемый трубчатый стержень превращается в стержень с открытой трещиной. Как было отмечено ранее, собственные частоты стержня с полостью на срединной оси выше, а стержня с трещиной, наоборот, ниже собственных частот сплошного стержня. Следовательно, при определенных значениях параметра a собственные частоты трубчатого стержня совпадают с собственными частотами сплошного стержня. Необходимо выяснить при каких значениях параметра a происходит совпадение частот.

В терминах задачи (1), (2) данная задача сводится к исследованию того, при каких значениях параметра a выполняется соотношение $\frac{J_1}{F_1} = \frac{J_2}{F_2}$, где J_1, F_1 – момент инерции и площадь поперечного сечения сплошного стержня, J_2, F_2 – момент инерции и площадь поперечного сечения трубчатого стержня. В работе [66] показано, что при

$$a = \frac{(H^2 - h^2)\sqrt{3}}{2H} \quad \text{и} \quad a = \frac{-(H^2 - h^2)\sqrt{3}}{2H}$$

первая, вторая, третья и все последующие собственные частоты изгибных колебаний рассматриваемых стержней совпадают. Причем это значение a является общим для всех собственных частот. Если же полость проходит не по всей длине стержня, то существуют значения a , при которых первая, вторая, третья и все последующие собственные ча-

стоты изгибных колебаний рассматриваемых стержней совпадают. Однако эти a зависят от номера частоты и не являются общими для всех номеров частот [67].

Таким образом, выявить дефект по спектру частот колебаний стержня вокруг одной оси оказывается невозможным. В [66, 67] показано, что для идентификации полости необходимо использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). По двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний стержня с полостью вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a полости.

Третий подход позволяет также решать задачи идентификации дефектов. Так, в [68] исследованы собственные изгибные колебания трубопровода с движущейся жидкостью, находящегося под действием растягивающей силы и заземленного по краям. По трем частотам изгибных колебаний находят скоростной параметр, относительная масса продукта на единицу длины трубопровода и относительная масса отложений на стенках трубопровода.

В [69] исследуются собственные крутильные колебания трехэлементного вала. По четырем частотам свободных крутильных колебаний можно определить параметр жесткости, полярный момент инерции вала на втором участке, начальную координату и длину этого участка.

В [70] решена задача о поиске местонахождения границы между двумя участками стержня разной плотности по собственным частотам его свободных продольных колебаний.

В [71] сформулирована математическая модель неоднородного стержня с коррозионным участком. Решена задача определения длины, модуля упругости и плотности коррозионного участка стержня по трем собственным частотам продольных колебаний.

В [72] рассмотрена балка с поперечным сечением в виде полого прямоугольника. Определяются размеры полости балки по двум собственным частотам изгибных колебаний, взятым из разных спектров. Данные спектры принадлежат колебаниям в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

В [73] исследовано поведение собственных частот балки с продольным надрезом (трещиной). Для идентификации глубины и ширины предложено использование двух спектров частот (вокруг разных осей). Показано как по двум собственным частотам, взятым из разных спектров (вокруг разных осей), идентифицировать глубину и ширину надреза балки.

В [74] получены формулы идентификации размеров призматического стержня по трем собственным частотам (по одной из спектра продольных колебаний и из двух спектров изгибных колебаний вокруг разных осей). Найдены аналогичные формулы для стержней треугольного и эллипсовидного сечений.

Значительный вклад в вопросы идентификации дефектов, моделируемых участками с иной плотностью или жесткостью, внесен научной школой А.О. Ватульяна. В работах этой научной школы полости, сначала участки с другой плотностью или жесткостью рассматриваются как участки определенной формы, а затем предлагаются подходы, позволяющие рассматривать участки произвольной формы.

В [63] предложен подход к определению расположения и объема полости произвольной формы. Представлены результаты численных экспериментов и их анализ.

В [75] приведены схемы реконструкции полости в стержне при анализе продольных и изгибных колебаний стержня.

В [76] дан обзор работ по обратным задачам теории трещин в упругих телах. Отмечено, что наиболее популярным является модель, в которой трещина моделируется математическим разрезом, а берега не взаимодействуют в процессе установившихся колебаний.

В [77] представлен метод определения параметров малой осесимметричной полости в балке при анализе продольных и изгибных колебаний. Наиболее просто реализуется

предложенная схема для сферической полости в цилиндрическом стержне. Представлены вычислительные эксперименты по реконструкции параметров полости и его положения.

В [32] рассматривается задача об установившихся поперечных колебаниях цилиндрического стержня, содержащего осесимметричный дефект в форме полости малого характерного размера. Представлены численные результаты, показавшие достаточную эффективность предлагаемого в статье похода по восстановлению объема и центра полости.

В [78] рассматриваются задачи о восстановлении переменных модуля упругости и плотности для упругого неоднородного стержня при возбуждении продольных и изгибных колебаний.

В [79] исследованы поперечные колебания консольно закрепленной балки с тонким надрезом, который смоделирован как локальное изменение жесткости. Разработаны методы поэтапной реконструкции параметров надреза по известной информации о резонансных частотах балки с надрезом или об амплитудно-частотной характеристике торца.

В [80] представлен метод определения параметров симметричного тонкого надреза в балке при анализе изгибных колебаний. Реализована процедура поэтапного восстановления параметров тонкого надреза.

В [81] решены две обратные задачи. Первая состоит в определении центра и объема эллипсоидального включения, ослабляющего упругий стержень, при известных его физических характеристиках (модуль Юнга и плотность), а вторая – в определении физических параметров включения при известной его геометрии. В обеих задачах входной информацией являются значения первых трех или четырех резонансных частот.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gladwell G.M.L.* Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004. (Русский перевод: Гладвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. М. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2008).
2. *Chu M.T., Golub G.H.* Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications. Oxford University Press, USA, 2005. 406 p.
3. *Ахтямов А.М.* Диагностирование нагруженности механической системы // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2003. № 6. С. 60.
4. *Rice J.R., Levy N.* The part through surface crack in an elastic plate // J. Appl. Mech. 1972. V. 39. P. 185.
5. *Ruotolo R., Surace C.* Natural frequencies of a bar with multiple cracks // Journal of sound and vibrations. 2004. V. 272. P. 301.
6. *Freund L.B., Herrmann G.* Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending // Journal of applied mechanics. 1976. V. 76. P. 112.
7. *Cawley P., Adams R.D.* The location of defects in structures from measurements of natural frequencies // Journal of strain analysis. 1979. V. 14. P. 49.
8. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* Диагностирование полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. Т. 46. № 5. С. 29.
9. *Ахтямов А.М., Самыев Э.И.* Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний // Дефектоскопия. 2012. № 5. С. 78.
10. *Ватulyan A.O., Осипов А.В.* Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестник ДГТУ. 2012. № 8 (69). С. 34.

11. *Ахтямов А.М., Ильгамов М.А.* Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152.
12. *Morassi A.* Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies // Journal of sound and vibration. 2001. V. 242. P. 577.
13. *Morassi A., Dilena M.* On point mass identification in rods and beams from minimal frequency measurements // Inverse problems in engineering. 2002. V. 10. P. 183.
14. *Morassi A.* An uniqueness result on crack localization in vibrating rods // Inverse problems in engineering. 1997. V. 4. P. 231.
15. *Hald O.H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems // Communications on pure and applied mathematics. 1984. V. 37. P. 539.
16. *Morassi A.* The crack detection problem in vibrating beams, in Davini C. and Viola E. (Eds) Problems in Structural Identification and Diagnostics: General Aspects and Applications. New York: Springer, 2003. P. 163.
17. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83.
18. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика закрепления и повреждений балки на упругих опорах // Контроль. Диагностика. 2010. № 9. С. 57.
19. *Ильгамов М.А.* Диагностика повреждений вертикальной штанги // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5. Уфа: Гилем, 2007. С. 201.
20. *Ахметвалиева Э.Н., Ахтямов А.М.* Диагностика поперечного надреза вертикальной штанги // Контроль и диагностика. 2012. № 8. С. 31.
21. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений балки на шарнирных опорах // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2010. № 2. С. 42.
22. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // Дефектоскопия. 2010. № 6. С. 93.
23. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях круглой плиты с утонченной центральной областью // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 3. С. 63.
24. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях круглой плиты с утонченной центральной областью и прикрепленной распределенной массой // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 4. С. 38.
25. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях круглой мембраны с утонченной центральной областью // Контроль. Диагностика. 2011. № 4. С. 66.
26. *Хакимов А.Г.* О собственных крутильных колебаниях полого вала с продольным сквозным радиальным разрезом // Дефектоскопия. 2013. № 6. С. 32.
27. *Хакимов А.Г.* О собственных продольных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой // Контроль. Диагностика. 2013. № 11. С. 9.
28. *Хакимов А.Г., Сатыев Э.И.* О собственных крутильных колебаниях буровой колонны // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. 2014. № 6. С. 120.
29. *Ахтямов А.М., Ямилова Л.С.* Идентификация условий замыкания провода по собственным частотам колебаний напряжения переменного тока // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. Т. 11. № 2–3. С. 15.
30. *Ахтямов А.М., Каримов А.Р.* Идентификация трещины в стержне по двум собственным частотам продольных колебаний // В мире научных открытий. 2012. № 1. С. 111.
31. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия, 2010. № 5. С. 29.
32. *Ватульян А.О., Солуянов Н.О.* Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // ПМТФ. 2008. № 6. Т. 49. С. 152.
33. *Ахтямов А.М., Сатыев Э.И.* Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний // Дефектоскопия. 2012. № 5. С. 78.
34. *Ахтямов А.М., Сатыев Э.И.* Диагностика повреждения вертикальной штанги с учетом внутреннего трения // Контроль. Диагностика. 2013. № 6. С. 35.
35. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. 2010. Т. 12. № 3. С. 38.

36. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. 2010. № 5. С. 29.
37. *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* Диагностирование двух масс, сосредоточенных на балке // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2010. № 1. С. 42.
38. *Ватутьян А.О., Осипов А.В.* Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями // Вестник ДГТУ. 2012. № 8 (69). С. 34.
39. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение затухающей бегущей волны от надреза в стержне // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 4. С. 116.
40. *Сидоров Б.В., Мартынов С.А.* Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. С. 18.
41. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение продольной волны от надреза в стержне, погруженном в вязкую жидкость // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 3. С. 58.
42. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение продольной бегущей волны в стержне с повреждением // Контроль. Диагностика. 2009. № 7. С. 43.
43. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение продольной бегущей волны от надреза в стержне // Техническая акустика. 2008. Т. 8. С. 16.
44. *Хакимов А.Г.* Отражение крутильной бегущей волны в стержне с искусственным дефектом // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 1. С. 114.
45. *Хакимов А.Г.* Отражение изгибной волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 6. С. 80.
46. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Отражение продольной волны от воздушной полости в трубопроводе // Известия Уфимского научного центра РАН. 2012. № 4. С. 15.
47. *Хакимов А.Г.* Отражение длинной изгибной бегущей волны от точечной воздушной полости в трубопроводе // Контроль. Диагностика. 2012. № 4. С. 58.
48. *Хакимов А.Г.* Отражение изгибной волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 6. С. 80.
49. *Хакимов А.Г.* Отражение короткой изгибной бегущей волны от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9. № 2. С. 134.
50. *Ахтямов А.М.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня // Контроль. Диагностика. 2007. № 11. С. 59.
51. *Ахтямов А.М., Муртазина Р.Ф.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью показаний тензодатчика // Контроль. Диагностика. 2009. № 1. С. 36.
52. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9. № 2. С. 130.
53. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9. № 2. С. 130.
54. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Ретроспективная задача распространения поперечных волн // Контроль. Диагностика. 2010. № 4. С. 36.
55. *Shifrin E.I., Ruotolo R.* Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 222. № 3. P. 409.
56. *Shifrin E.I.* Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks // Mechanical Systems and Signal Processing. 2015. V. 56–57. P. 181.
57. *Крейн М.Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны // ДАН СССР. 1952. Т. 82. С. 669.
58. *Крейн М.Г.* Об одном обобщении исследований Стилтеса // ДАН СССР. 1952. Т. 87. С. 881.
59. *Крейн М.Г.* О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // ДАН СССР. 1953. Т. 93. С. 617.
60. *Shifrin E.I.* Inverse spectral problem for a non-uniform rod with multiple cracks // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 96. P. 348.
61. *Shifrin E.I.* Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. V. 70–71. P. 613.

62. *Ильгамов М.А.* Продольные колебания стержня с зарождающимися поперечными трещинами // МТТ. 2017. № 1. С. 23.
63. *Ватульян А.О., Солуянов Н.О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. 2005. № 9. С. 44.
64. *Ахтямов А.М., Каримов А.Р.* Диагностирование полости в призматической балке // Дефектоскопия. 2013. № 3. С. 15.
65. *Morassi A.* Crack-induced changes in eigenparameters on beam structures // Journal of engineering mathematics. V. 119. P. 1798.
66. *Ахтямов А.М., Саляхова Е.В.* Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? // Электронный журнал "Техническая акустика", <http://ejta.org>, 2011. 7.
67. *Ахтямов А.М., Саляхова Е.В.* Диагностирование полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. № 2. Т. 13. С. 47.
68. *Хакимов А.Г.* Определение массового расхода жидкости в трубопроводе и толщины отложений на его стенках по собственным частотам изгибных колебаний // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 3. С. 15.
69. *Хакимов А.Г.* К определению параметров трехэлементного вала по заданному спектру частот крутильных колебаний // Контроль. Диагностика. 2014. № 6. С. 29.
70. *Ахтямов А.М., Галеева Д.Р.* Исследование прямой и обратной задачи о колебаниях неоднородного стержня, состоящего из двух различных участков // Контроль. Диагностика. 2014. № 4. С. 58.
71. *Ахтямов А.М., Галеева Д.Р.* Определение длины, плотности и модуля упругости коррозионного участка стержня по собственным частотам продольных колебаний // Вестник Башкирского университета. 2015. Т. 20. № 2. С. 398.
72. *Ахтямов А.М., Каримов А.Р.* Диагностирование полости в призматической балке // Дефектоскопия. 2013. № 3. С. 15.
73. *Ахтямов А.М.* Идентификация продольного надреза балки по ее собственным частотам // Вестник Башкирского университета. 2012. Т. 17. № 2. С. 840.
74. *Ахтямов А.М.* Диагностирование размеров стержня по его собственным частотам // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2011. № 11. С. 51.
75. *Ватульян А.О.* О колебаниях упругих тел с малыми дефектами // Известия вузов, Сев.-Кавк. рег. 2004. Спецвыпуск. С. 19.
76. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Обратные задачи теории трещин в твердых телах // Известия вузов, Сев.-Кавк. рег. 2004. Спецвыпуск "Математика и механика сплошной среды". С. 74.
77. *Ватульян А.О., Бочарова О.В., Жарков Р.С.* Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв вузов. Сев.-Кавк. рег. Сер. естеств. науки. 2006. № 2. С. 28.
78. *Ватульян А.О., Бочарова О.В.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 275.
79. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об определении характеристик тонкого надреза при анализе изгибных колебаний балки // Экологический вестник ЧЭС. 2013. № 2. С. 27.
80. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // Дефектоскопия. 2014. № 11. С. 37.
81. *Ватульян А.О., Каишальян Д.О.* Об определении зоны деструкции в упругой балке // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. естеств. науки. 2015. № 4. С. 29.