
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 531

**О РАСЧЕТЕ СМЕШАННЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ И АВТОКОЛЕБАНИЙ
ПРИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ СВЯЗИ И ИСТОЧНИКЕ ЭНЕРГИИ
ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ**

© 2020 г. А. А. Алифов

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: alishir@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.12.2018 г.

Принята к публикации 25.12.2019 г.

Рассмотрена взаимодействующая с источником энергии ограниченной мощности фрикционная автоколебательная система с запаздыванием в силе упругости и внешним воздействием. Описана процедура применения методов прямой линеаризации для расчета смешанных вынужденных колебаний и автоколебаний в системе с запаздыванием и ограниченным возбуждением. На основе этой процедуры выведены уравнения нестационарных и стационарных движений.

Ключевые слова: автоколебательная система, запаздывание, источник энергии, метод прямой линеаризации, вынужденные колебания, автоколебания

DOI: 10.31857/S0235711920020054

1. Систематическая теория колебательных систем с ограниченным возбуждением или источниками энергии ограниченной мощности была создана В.О. Кононенко и изложена в его основополагающей монографии [1, 2]. Эта теория была развита в дальнейшем его последователями ([3–5] и др.). Особую актуальность она приобрела в связи с проблемами экологии. Связь проблем экологии с потребляемой энергией, метрологией, точностью моделей расчета систем, точностью обработки, колебаниями отмечена в работе [6].

В радиотехнике, устройствах автоматического управления, электронике и др. широко распространены системы с запаздыванием. Наличие запаздывания имеет двоякое значение: быть полезным (запаздывание вводится специально, например, на ультразвуковых станках) или вредным. В следящих системах, прокатных станах, регуляторах, вибрационных машинах и др. возникают колебания, обусловленные запаздыванием. Запаздывание в механических системах обуславливается характеристикой внутреннего трения в материалах, несовершенством их упругих свойств (наличие гистерезиса статической характеристики и упругое последствие) и др. [“Энциклопедия по машиностроению”]. Задачи с запаздыванием без учета взаимодействия колебательной системы и источника энергии рассматривались в большом числе работ ([7–10] и др.), а задачам с учетом этого взаимодействия посвящено мало работ.

Для анализа нелинейных колебательных систем существует ряд приближенных методов: усреднения, энергетического баланса, гармонической линеаризации ([8, 12, 13] и др.). Использование этих методов сопряжено большими затратами труда, времени и др. Эти недостатки значительно снижаются в случае применения методов прямой линеаризации нелинейностей, описанных в работах ([6, 14–16] и др.). Такое преимущество методов прямой линеаризации, наряду с простотой их применения, особенно

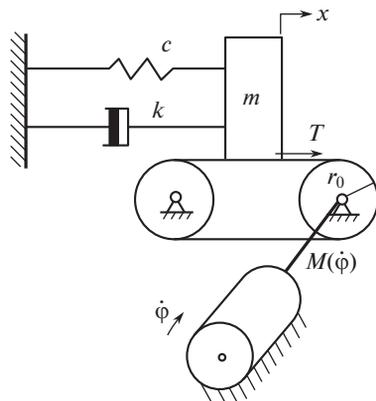


Рис. 1.

важно при создании реальных технических устройств. Целью работы является развитие на основе методов прямой линеаризации процедуры расчета смешанных колебаний в системах с ограниченным возбуждением. При наличии запаздывания и ограниченной мощности источника энергии в нелинейной системе можно использовать описанную процедуру применения методов прямой линеаризации. Эта процедура достаточно простая, что особенно важно с практической точки зрения — для расчета параметров механизмов, машин, оборудования на стадии их проектирования.

2. Рассмотрим известную модель (рис. 1) автоколебательной системы [1, 3, 17, 18]. С учетом запаздывающей упругой силы движение системы описывается уравнениями

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x + c_1x_\tau = \lambda \sin vt + T(U) - f(x), \quad J\ddot{\phi} = M(\dot{\phi}) - r_0T(U), \quad (1)$$

где $\lambda \sin vt$ — внешняя сила с постоянной амплитудой и частотой; $T(U)$ — нелинейная сила трения, зависящая от относительной скорости $U = V - \dot{x}$, $V = r_0\dot{\phi}$ и вызывающая автоколебания; $r_0 = \text{const}$ — радиус точки приложения силы трения $T(U)$ в месте контакта тела массы m с лентой; k_0 — коэффициент демпфирования; $c_0x + c_1x_\tau$ и $f(x)$ — соответственно линейная и нелинейная части силы упругости пружины; $c_0 = \text{const}$, $c_1 = \text{const}$, $x_\tau = x(t - \tau)$, $\tau = \text{const}$ — запаздывание; J — суммарный момент инерции вращающихся частей; $M(\dot{\phi})$ — разность вращающего момента источника энергии и момента сил сопротивления вращению, $\dot{\phi}$ — скорость вращения двигателя.

Характеристика силы трения широко распространена на практике в форме $T(U) = R(\text{sgn } U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3)$. Такая форма наблюдается также при рассмотрении проблемы измерения сил трения в космических условиях [19]. Представим ее в виде

$$T(U) = R[\text{sgn } U + F(\dot{x})], \quad F(\dot{x}) = \sum_{n=0}^3 \delta_n \dot{x}^n, \quad (2)$$

где R — нормальная сила реакции; $\text{sgn } U = 1$ при $U > 0$ и $\text{sgn } U = -1$ при $U < 0$, α_1 и α_3 — постоянные, $\delta_0 = -\alpha_1 V + \alpha_3 V^3$, $\delta_1 = \alpha_1 - 3\alpha_3 V^2$, $\delta_2 = 3\alpha_3 V$, $\delta_3 = -\alpha_3$.

Использование линейных характеристик в расчетах сил различной природы часто связано с решением уравнений, хотя в реальных условиях эти характеристики являются нелинейными. На практике при построении расчетных моделей они часто бывают

неизвестными и в большинстве случаев представляются полиномиальными функциями. Представим нелинейную часть силы упругости $f(x)$ полиномом

$$f(x) = \sum_j \gamma_j x^j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

где $\gamma_j = \text{const}$.

По методу прямой линеаризации [14] нелинейные функции $F(\dot{x})$ и $f(x)$ заменим линейными функциями

$$F_*(\dot{x}) = B_F + k_F \dot{x}, \quad f_*(x) = B_f + k_f x, \quad (4)$$

где B_F, k_F, B_f, k_f являются коэффициентами линеаризации, определяемыми выражениями:

а) $F(\dot{x})$

$$\begin{aligned} B_F(v, \Omega) &= \sum_n N_n \alpha_n v^n, \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (n - \text{четное}), \\ k_F(v, \Omega) &= \sum_n \bar{N}_n \alpha_n v^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (n - \text{нечетное}), \\ N_n &= (2r + 1)/(2r + 1 + n), \quad \bar{N}_n = (2r + 3)/(2r + 2 + n); \end{aligned} \quad (5a)$$

б) $f(x)$

$$\begin{aligned} B_f(a) &= \sum_j N_j \gamma_j a^j, \quad j = 0, 2, 4, \dots \quad (j - \text{четное}), \\ k_f(a) &= \sum_j \bar{N}_j \gamma_j a^{j-1}, \quad j = 1, 3, 5, \dots \quad (j - \text{нечетное}), \\ N_j &= (2r + 1)/(2r + 1 + j), \quad \bar{N}_j = (2r + 3)/(2r + 2 + j). \end{aligned} \quad (5b)$$

Здесь $a = \max|x|$, $v = \max|\dot{x}|$ и символ r представляет *параметр точности линеаризации*. Как показано в работе [14], параметр r может принимать различные значения, но может быть выбран из интервала $(0, 2)$.

Нелинейную характеристику источника энергии можно представить полиномом

$$M(\phi) = \sum_i \beta_i \phi^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad \beta_i = \text{const}.$$

Тогда линеаризованная характеристика источника будет иметь форму $M_*(\phi) = B_M + k_M \phi$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} B_M(\Omega) &= \sum_i N_i \beta_i \Omega_*^i, \quad i = 0, 2, 4, \dots \quad (i - \text{четное}), \\ k_M(\Omega) &= \sum_i \bar{N}_i \beta_i \Omega_*^{i-1}, \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (i - \text{нечетное}), \\ N_i &= (2r + 1)/(2r + 1 + i), \quad \bar{N}_i = (2r + 3)/(2r + 2 + i), \end{aligned}$$

где Ω_* – максимальное значение скорости Ω источника энергии.

Уравнения (1) с учетом линеаризации функций принимают вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + cx + c_1 x_\tau &= \lambda \sin vt + B + R \operatorname{sgn} U, \\ J\ddot{\phi} &= M(\phi) - r_0 R(\operatorname{sgn} U + B_F + k_F \dot{x}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k = k_0 - Rk_F$, $c = c_0 + k_f$, $B = RB_F - B_f$.

3. Решение уравнения (6) можно построить двумя методами [14], одним из которых является *метод замены переменных с усреднением*. Он позволяет рассмотреть стационарные и нестационарные процессы как в области резонанса, так и ее близких окрестностях, в которых возникают почти периодические колебания.

В [14] для нелинейного уравнения вида $\ddot{x} + \bar{F}(\dot{x}) + \bar{f}(x) = H(t, x)$, с нелинейными функциями $\bar{F}(\dot{x})$ и $\bar{f}(x)$, линеаризованными по методу прямой линеаризации с коэффициентами k и ω^2 аналогично форме (4), с использованием замены переменных $x = \nu p^{-1} \cos \psi$, $\dot{x} = -\nu \sin \psi$, $\psi = pt + \xi$, $\nu = \max |\dot{x}|$ (в зависимости от функции $H(t, x)$ символ p может отражать как частоту внешнего воздействия, так и частоту автоколебаний), в результате применения усреднения в системе, выведенной на основе замены переменных, для определения нестационарных значений ν и ξ получаются *стандартной формы уравнения*

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{k\nu}{2} - H_s(\nu, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{1}{\nu} H_c(\nu, \xi), \quad (7)$$

где

$$H_s(\nu, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\dots) \sin \psi d\psi, \quad H_c(\nu, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\dots) \cos \psi d\psi.$$

Рассмотрим процедуру построения решения уравнения источника энергии, которое в общем случае запишем в виде

$$J\ddot{\phi} = M(\phi) - H(\phi, \dot{\phi}, x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (8)$$

Представим теперь (8) посредством замены $\phi = \theta$ в форме

$$J \frac{d\theta}{dt} = M(\theta) - H(\phi, \theta, x, \dot{x}, \ddot{x}), \quad (9a)$$

или с учетом линеаризации характеристики источника энергии – в форме

$$J \frac{d\theta}{dt} = B_M + k_M \theta - H(\phi, \theta, x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (9b)$$

Полагая $\theta = \Omega + \tilde{\epsilon}$, где Ω – главная часть решения, $\tilde{\epsilon}$ – не учитываемые в дальнейшем малые вибрационные составляющие, и применив процедуру усреднения за период k уравнению (9a), получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} [M(\Omega) - H(\nu, \Omega)], \quad (10)$$

где

$$H(\nu, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(\phi, \theta, x, \dot{x}, \ddot{x}) d\psi.$$

С учетом замены $M(\Omega)$ на $B_M + k_M \Omega$ в (10), будем иметь выражение для случая линеаризации характеристики источника энергии и, для краткости, приведем лишь соотношения на основе (10).

Условия $d\nu/dt = 0$, $d\xi/dt = 0$, $d\Omega/dt = 0$ дают уравнения стационарных движений

$$\frac{k\nu}{2} + H_s(\nu, \xi) = 0, \quad \frac{\nu(\omega^2 - p^2)}{2p} - H_c(\nu, \xi) = 0, \quad M(\Omega) - H(\nu, \Omega) = 0. \quad (11)$$

Уравнения (7) и (10) позволяют изучить нестационарные процессы, а уравнения (11) определить характеристики стационарных колебаний. Амплитуда колебаний определяется выражением $a = \nu p^{-1}$. Уравнения (7) с учетом данного выражения можно преобразовать к виду, зависящему от амплитуды

$$\frac{da}{dt} = -\frac{ka}{2} - \frac{1}{p} H_s(a, \xi), \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2 - p^2}{2p} - \frac{1}{ap} H_c(a, \xi).$$

4. На основе выражений (7), (10) для уравнения (6) можно выписать соотношения, дополняя влияние запаздывания. Вычислив $H_s(\nu, \xi)$, $H_c(\nu, \xi)$ с учетом $x_\tau = \nu v^{-1} \cos(\psi - \nu\tau)$ и подставив в (7) вместо частоты p частоту ν , получим уравнения для определения нестационарных значений a , ξ , u

а) $u \geq av$

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= -\frac{k\nu}{2m} - \frac{\lambda}{2m\nu} \cos \xi + \frac{c_1\nu}{2m\nu} \sin \nu\tau, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega^2 - \nu^2}{2\nu} + \frac{\lambda}{2m\nu} \sin \xi + \frac{c_1}{2m\nu} \cos \nu\tau, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 R(1 + B_F) \right], \end{aligned} \quad (12a)$$

б) $u < av$

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dt} &= -\frac{\nu}{2m} \left[k + \frac{4R}{\pi\nu^2} \sqrt{\nu^2 - u^2} \right] - \frac{\lambda}{2m\nu} \cos \xi + \frac{c_1\nu}{2m\nu} \sin \nu\tau, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega^2 - \nu^2}{2\nu} + \frac{\lambda}{2m\nu} \sin \xi + \frac{c_1}{2m\nu} \cos \nu\tau, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{J} \left[M\left(\frac{u}{r_0}\right) - r_0 R(1 + B_F) - \frac{r_0 R}{\pi} (3\pi - 2\psi_*) \right], \end{aligned} \quad (12б)$$

где $\omega^2 = c/m = \omega_0^2 + k_f(a)m^{-1}$, $\omega_0^2 = c_0/m$, $u = r_0\Omega$, $\psi_* = 2\pi - \arcsin(u/av)$.

При $\dot{\nu} = 0$, $\dot{\xi} = 0$ из первых двух уравнений (12) получим соотношения для определения амплитуды автоколебаний. В случае $u < av$ амплитуда определяется приближенным выражением $a \approx u/\nu$.

Следующие уравнения позволяют определить стационарные значения скорости u

а) $u \geq av$

$$M(u/r) - S_+(u) = 0,$$

б) $u < av$

$$M(u/r) - S_-(u) = 0,$$

где $S_+(u) = r_0 R(1 + B_F)$, $S_-(u) \approx r_0 R[1 + B_F - \pi^{-1}(3\pi - 2\psi_*)]$.

Из системы (12) при малой расстройке частот $\omega_0 - \nu \sim \varepsilon$, где ε — достаточно малая величина, будем иметь уравнения гармонического захватывания. А если расстройка не мала, то уравнения (12) позволяют рассмотреть почти периодические колебания посредством их численного интегрирования. С помощью системы (12) можно вывести условия устойчивости колебаний на основе критериев Рауса—Гурвица.

В работе [14] приведено сравнение результатов, полученных методами прямой линеаризации и известными методами, и показано, что они полностью совпадают *качественно*. Имеются лишь небольшие *количественные* отличия (отсутствующие в ряде случаев), которые приведены в [14] при различных значениях параметра точности линеаризации. Нелинейное уравнение вида (1) подробно изучено в [17]. Останавливаться на анализе уравнений (12) и условиях устойчивости колебаний не будем, т.к. целью настоящей статьи является описание процедуры применения методов прямой линеаризации для расчета нелинейных колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Конonenko B.O.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
2. *Конonenko V.O.* Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe. 1969.
3. *Фролов К.В.* Избранные труды: в 2 т. Т. 1. Вибрация и техника. М.: Наука, 2007. 351 с.
4. *Kovruguine D.A.* Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns. Archive Appl. Mech. 2012. 82. 591e604.
5. *Samantaray A.K., Dasgupta S.S. and Bhattacharyya R.* Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems // International Journal of Engineering Science. 2010. 48. 21–36. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.06.005>
6. *Alifov A.A.* About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // “Ölçmə və keyfiyyət: problemlər, perspektivlər” mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları, 21–23 noyabr 2018, AzTU, Bakı, Azərbaycan. P. 289.
7. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.
9. *Асташев В.К., Герц М.Е.* Автоколебания вязкоупругого стержня с ограничителями при действии запаздывающей силы // Машиноведение. 1973. № 5. С. 3.
10. *Жирнов Б.М.* Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // Прикладная механика. 1973. Т. 9. № 10. С. 83.
11. Теория автоматического управления. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк. 1986. 367 с.
12. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
13. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1979. Т. 5. Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И.И. Блехмана. 1979. 351 с., ил.
14. *Алифов А.А.* Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2015. С. 74.
15. *Alifov A.A.* Method of the Direct Linearization of Mixed Nonlinearities // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017. V. 46. No. 2. P. 128.
16. *Alifov A.A., Farzaliyev M.G., Jafarov E.N.* Dynamics of a Self-Oscillatory System with an Energy Source. Russian Engineering Research. 2018, V. 38. № 4. P. 260.
17. *Alifov A.A., Frolov K.V.* Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. Hemisphere Publishing Corporation, New York, Washington, Philadelphia, London. 1990. P. 327.
18. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
19. *Броновец М.А., Журавлев В.Ф.* Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 3.