

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.26

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,
ПОГРУЖЕННОЙ В ЖИДКОСТЬ© 2020 г. О. И. Косарев¹, А. К. Пузакина^{1,*}, Д. Ф. Нахатакян¹¹ Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*e-mail: alla-puzakina@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.07.2019 г.

Принята к публикации 25.12.2019 г.

Предложен численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний оболочечной конструкции, погруженной в жидкость. Конструкция состоит из набора конечных упругих цилиндрических оболочек и упругих колец, к которым приложены сосредоточенные дискретные возмущающие силы. Приведены примеры сравнительного расчета амплитудно-частотных характеристик и форм колебаний оболочечной конструкции в вакууме и в жидкости.

Ключевые слова: вынужденные колебания, цилиндрическая оболочка, жидкость, дисперсионное уравнение, уравнение движения

DOI: 10.31857/S0235711920020091

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях оболочечной конструкции со свободными граничными условиями на торцах, погруженной в жидкость. Конструкция состоит из секций, каждая из которых представляет собой конечную упругую цилиндрическую оболочку с упругими кольцами на концах. На оболочечную конструкцию действуют дискретные вынуждающие силы. Попытки решения этой задачи методом конечных элементов по ряду причин нельзя признать успешными [7]. Численно-аналитические методы расчета колебаний конечных цилиндрических оболочек в жидкости до сих пор не разработаны [1–9] и решение этой задачи является актуальным.

Цель – разработать численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических оболочек в жидкости.

Идея предлагаемого метода расчета состоит в следующем. Система условно разбивается на подсистемы, включающие оболочки и кольца. Для каждой оболочки составляются дисперсионные уравнения и определяются их корни. Решение свободных колебаний оболочки записывается в виде вектора (матрицы-столбца) перемещений (u , v , w , w'). Функции распределения перемещений оболочек по их длине записываются через перемещения торцевых сечений. Внутренние силы в оболочках приводятся к торцам оболочек. Определяются матрицы динамических жесткостей колец по тем же четырем перемещениям. Общее матричное уравнение вынужденных колебаний всей оболочечной конструкции записывается так же, как для цепной системы. Вынуждающие силы приложены к кольцам и распределены по окружному углу φ по гармоническому закону $P = p \cos n\varphi$. Дискретные вынуждающие силы могут задаваться в любом месте по длине цилиндрической оболочки без применения δ -функции. Получается матричное уравнение ленточного типа, состоящее из блок-матриц четвертого порядка, диагонально расположенных в общей матрице. Это позволяет упростить составле-

ние и ускорить решение сводных матричных уравнений высокого порядка (нескольких сотен).

Уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях, основанные на моментной теории упругих оболочек Кирхгофа–Лява, имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \rho_* h a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1 a &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) - \rho_* h a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2 a &= 0, \\ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} \right) - T_2 - \rho_* h a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 a &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, w – осевые (продольные), окружные (касательные) и радиальные перемещения оболочки; T_1, T_2, S, H, M_1, M_2 – упругие силовые факторы; q_1, q_2, q_3 – поверхностные нагрузки; a – радиус оболочки; h – толщина оболочки; $\xi = x/a$, φ – координаты в осевом и окружном направлениях; t – время; ρ_* – плотность материала оболочки, $0 \leq x \leq L$; L – длина оболочки.

Решения уравнений свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки (1) записываются в форме [9]

$$\begin{aligned} u &= U \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad v = V \sin(n\varphi) e^{i\omega t}, \quad w = W \cos(n\varphi) e^{i\omega t}, \\ U &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad V = \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad W = \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где n – окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; α_{jn} – корни дисперсионного уравнения; $j = 1-8$ – порядковые номера корней; C_{jn} – искомые коэффициенты; Δ_{jn} – миноры матрицы уравнения движения оболочки (3); $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний; f – частота колебаний. В решение (2) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn} . Для получения дисперсионного уравнения примем $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ и решение уравнения представим в упрощенном виде

$$v = V e^{i\alpha y} \sin n\varphi, \quad u = U e^{i\alpha y} \cos n\varphi, \quad w = W e^{i\alpha y} \cos n\varphi.$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (1) получим уравнение свободных колебаний оболочки в матричном виде [10]

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_s \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Дисперсионное уравнение для конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0(\alpha)}{\Delta^1(\alpha)} - \frac{\rho_0 \omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{q k H_n^{(2)'}(ka)} &= 0, \\ \Delta^{(1)} &= \begin{vmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 \end{vmatrix} = L_{11} L_{22} + L_{12}^2 + \omega_*^2 (L_{11} + L_{22}) + \omega_*^4, \\ \Delta_0 &= (L_{11} + \omega_*^2)(L_{22} + \omega_*^2)(L_{33} + \omega_*^2) - L_{12} L_{23} L_{13} - L_{13} L_{12} L_{23} + \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& + L_{13}(L_{22} + \omega_*^2)L_{13} - (L_{11} + \omega_*^2)L_{23}^2 + L_{12}^2L_{33}, \\
& \frac{A_8\alpha^8 + A_6\alpha^6 + A_4\alpha^4 + A_2\alpha^2 + A_0}{D_4\alpha^4 + D_2\alpha^2 + D_0} - \frac{\rho_0\omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{qk H_n^{(2)'}(ka)} = 0, \\
& A_8 = -k\delta^2, \\
& A_6 = \delta^2(1 + k_{22})\omega_* - \delta(k_{12}^2 + b_{22} + b_{11}k_{22}) + k_{23}^2 - k_{22}k_{33} \\
& A_4 = -\omega_*^2\delta^2 + [(b_{11} + b_{22})\delta^2 - k_{23}^2 + k_{22} + k_{33} + k_{22}k_{33}]\omega_* - b_{22}k_{33} - k_{12}^2k_{33} - \\
& \quad - k_{22}b_{33} + 2k_{23}b_{23} + \mu^2k_{22} - b_{11}b_{22}\delta^2 - b_{11}k_{22}k_{33} + 2i\mu k_{12}k_{23} + b_{11}k_{23}^2, \\
& A_2 = -(1 + k_{22} + k_{33})\omega_*^2 + (k_{12}^2 - 2k_{23}b_{23} - \mu^2 + b_{33} + b_{11}k_{33} + b_{22}k_{33} + \\
& \quad + b_{11}k_{22} + b_{33}k_{22})\omega_* - k_{12}^2b_{33} - b_{22}b_{33} + \mu^2b_{22} - b_{11}b_{22}k_{33} - b_{11}k_{22}b_{33} + \\
& \quad + 2b_{11}k_{23}b_{23} + b_{23}^2 + 2i\mu k_{12}b_{23}, \\
& A_0 = \omega_*^3 - (b_{11} + b_{22} + b_{33})\omega_*^2 + (b_{11}b_{22} - b_{23}^2 + b_{22}b_{33} + b_{11}b_{33})\omega_* - b_{11}b_{22}b_{33} + b_{11}b_{23}^2, \\
& D_4 = k_{22}(1 + b_1), \\
& D_2 = -(1 + b_1 + k_{22})\omega_* + k_{12}^2 + b_{22}(1 + b_1) + b_{11}k_{22}, \\
& D_0 = \omega_*^2 - (b_{11} + b_{22})\omega_* + b_{11}b_{22}, \\
& \omega_* = \frac{\omega^2 a^2 \rho_m (1 + \mu)}{E}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12a^2}, \quad q = \frac{Eh}{1 - \mu^2},
\end{aligned} \tag{5}$$

a_1, b_1 – параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 – параметры шпангоутов; $E = E_0(1 + i\eta)$ – комплексный модуль упругости; η – потери в материале оболочки; $r = a$ – радиус оболочки; μ – коэффициент Пуассона; $i = \sqrt{-1}$. Каждое из решений U, V, W (2) состоит из восьми слагаемых по числу конечных граничных условий оболочки. Соответственно числу слагаемых для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний ω надо определить восемь корней α_j , (5).

Для составления уравнений вынужденных колебаний оболочечной конструкции, состоящей из набора оболочек, соединенных между собой кольцами, каждое уравнение движения записывается для перемещений трех соседних подсистем с номерами: k -текущей, $k - 1$ -предыдущей и $k + 1$ -последующей. Подсистемами являются оболочки и кольца. Внутренние силы оболочки, приложенные, например, к кольцу k , выражаются через перемещения концов оболочек, присоединенных к кольцу слева (в конце предыдущей оболочки $k - 1$) и справа (в начале последующей оболочки $k + 1$).

Определим перемещения торцевых сечений оболочек. Представим распределение перемещений по длине y для каждой оболочки с учетом дополнительной координаты $w' = dw/dy$ в матричном виде

$$\zeta_{(y)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_1)}{\Delta^1(\alpha_1)} & \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_2)}{\Delta^1(\alpha_2)} & \dots & \frac{\Delta^{(2)}(\alpha_8)}{\Delta^1(\alpha_8)} \\ \frac{\Delta^{(1)}(\alpha_1)}{\Delta^1(\alpha_1)} & \frac{\Delta^{(1)}(\alpha_2)}{\Delta^1(\alpha_2)} & \dots & \frac{\Delta^{(1)}(\alpha_8)}{\Delta^1(\alpha_8)} \\ \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_1)}{\Delta^1(\alpha_1)} & \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_2)}{\Delta^1(\alpha_2)} & \dots & \frac{\Delta^{(3)}(\alpha_8)}{\Delta^1(\alpha_8)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ i\alpha_1 & i\alpha_2 & \dots & i\alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1 y} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2 y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3 y} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\alpha_8 y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_8 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Дополнительная координата w' введена для возможности формирования блок-матриц в уравнениях стыковки цилиндрических оболочек с кольцами по четырем основным силовым факторам. Выражение (6) используются для каждой оболочки при составлении системы уравнений движения для всей оболочечной конструкции в целом. Обозначим $A(y)$ произведение матриц в правой части выражения (6)

$$A(y) = G_y \alpha(y).$$

Представим перемещения торцев оболочки, имеющей длину ℓ , в начале при $y = 0$ и в конце $y = \ell$ в виде

$$\xi_{(0)} = A(0)W^0, \quad \xi_{(\ell)} = A(\ell)W^0.$$

Составим блок-матричное уравнение

$$\begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix}.$$

Из этого уравнения определим вектор-столбец коэффициентов $W^0 = \{C_1 - C_8\}$

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = [\bar{C}] \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = [\bar{C}_1 \bar{C}_2] \begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix},$$

$$W^0 = \{\bar{C}_1\} \{\xi_{(0)}\} + \{\bar{C}_2\} \{\xi_{(\ell)}\}.$$

Текущие перемещения по длине оболочки, выраженные через перемещения ее торцов, определяются выражением

$$\xi(y) = G_y \alpha(y) [\{\bar{C}_1\} \{\xi_{(0)}\} + \{\bar{C}_2\} \{\xi_{(\ell)}\}].$$

Таким образом, вектор перемещений оболочки с произвольным номером k

$$\zeta_K(y) = \{u_k, v_k, w_k, w'_k\}^T = G_k(y) [C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k\ell})], \quad (7)$$

где $\zeta_{k0} = \zeta_k(0)$, $\zeta_{k\ell} = \zeta_k(\ell_k)$ – перемещения торцевых сечений оболочки номера k , $C_k^1 = \bar{C}_1$, $C_k^2 = \bar{C}_2$.

Матрица $G_k(y)$ размером 4×8 состоит из столбцов G_{pk} , в которых $p = 1, 2, \dots, 8$ по числу корней дисперсионного уравнения.

$$G_k(y) = \{G_{pk}\}, \quad G_{pk} = e^{iy\alpha_{pk}} \left\{ \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1}, \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1}, 1, i\alpha_{pk} \right\}^T,$$

где $\Delta_{pk}^1 = \Delta^1(\alpha_{pk})$, $\Delta_{pk}^2 = \Delta^2(\alpha_{pk})$, $\Delta_{pk}^3 = \Delta^3(\alpha_{pk})$ – миноры матрицы уравнения (3).

Матрицы C_k^1, C_k^2 являются блоками размером 8×4 квадратной матрицы C_k размером 8×8

$$C_k = \begin{bmatrix} G_{ko} \\ G_{k1} \end{bmatrix}^{-1} = [C_k^1, C_k^2].$$

Приведем внутренние силы в оболочке к ее торцевым сечениям. Вектор-столбец внутренних сил в оболочке номера k имеет вид

$$\eta_k(y) = \left(T_1, T_{12}, N, \frac{M}{r_k} \right)^T.$$

Соответствие между этими внутренними силами и перемещениями оболочки следующее

$$u \rightarrow T_1, \quad v \rightarrow T_{12}, \quad w \rightarrow N, \quad w_k' \rightarrow M/r_k.$$

Связь внутренних сил оболочки с перемещениями торцевых сечений оболочки может быть представлена вектором

$$\eta_k(y) = G_k^*(y) [C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k1})],$$

где $G_k^*(y)$ – матрица размером 4×8 , состоящая из столбцов G_{pk}^* ,

$$G_k^*(y) = \{G_{pk}^*\}, \quad p = 1, 2, \dots, 8,$$

$$G_{pk}^*(y) = q_k e^{iy\alpha_{pk}} \begin{pmatrix} i\alpha_{pk} \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}} + \mu n \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}} + \mu \\ \frac{1-\mu}{2} \left(-n \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}} + i\alpha_{pk} \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}} (1+4\delta^2) + 4in\alpha_{pk}\delta_k^2 \right) \\ i\alpha_{pk}\delta^2 \left(n(2-\mu) \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}} + (2-\mu)n^2 + \alpha_{pk}^2 \right) \\ n\mu \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}} \delta_k^2 + (\mu n^2 + \alpha_{pk}^2) \delta_k^2 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда к кольцу (слева и справа) крепятся оболочки разного диаметра, необходимо выполнить соответствующее приведение координат (перемещений) торцов оболочек к центру масс поперечного сечения кольца. Векторы перемещений торцов оболочки

$$\zeta_{k1} = H_k^1 Z_k, \quad \zeta_{k+1,0} = H_k^2 Z_k, \quad Z_k = \{U_k, V_k, W_k, \theta R_k\}^T,$$

где H_k^1 и H_k^2 – матрицы приведения координат; Z_k – вектор перемещений кольца: внутренние силы, действующие в торцевых сечениях оболочек (в конце предыдущей оболочки $\eta_{k,1}$ и в начале последующей оболочки $\eta_{k+1,0}$), приведем к соединяющему их кольцу с помощью матриц приведения H_k^3 и H_k^4 . Силы, приложенные к центру масс поперечного сечения кольца с номером k

$$F_k^{(1)} = H_k^3 \eta_{k,1}, \quad F_k^{(2)} = H_k^4 \eta_{k+1,0}. \quad (8)$$

Матричное уравнение движения оболочечной конструкции формируется следующим образом. С учетом принятых обозначений уравнение движения кольца номера k в матричной форме имеет вид

$$M_k Z_k = P_k - F_k^{(1)} + F_k^{(2)}, \quad (9)$$

где P_k – вектор возмущающих сил; $F_k^{(1)}$, $F_k^{(2)}$ – векторы внутренних сил, приложенные от оболочки к кольцу слева и справа; M_k – матрица динамических жесткостей кольца номера k .

Подставляя в уравнение движения кольца (9) значения сил (8) и перемещений оболочек (7), получим систему уравнений порядка $4(N + 1)$, где N – общее количество оболочек; $N + 1$ – общее количество колец. В уравнениях движения порядковые номера колец обозначим q , где $0 \leq q \leq p$. Уравнения составляются для каждого кольца последовательно.

Уравнения для первого кольца $q = 0$, для каждого промежуточного кольца от $q = 1$ до $q = N - 1$ и для последнего кольца $q = N$ имеют вид

$$\begin{aligned} [M_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^1 H_0^2] Z_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^2 H_1^1 Z_1 &= P_0, \\ H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^1 H_{q-1}^2 Z_{q-1} + [M_q + H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^2 H_q^1 - H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^1 H_q^2] Z_q - \\ - H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^2 H_{q+1}^1 Z_{q+1} &= P_q, \\ H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^1 H_{p-1}^2 Z_{p-1} + [M_p + H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^2 H_p^1] Z_p &= P_p. \end{aligned} \quad (10)$$

Общее матричное уравнение для оболочечной конструкции имеет ленточную диагональную структуру расположения блок-матриц размером 4×4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются искомые векторы перемещений колец Z_q .

После определения векторов перемещений Z_q на кольцах q из уравнения (10) можно построить амплитудно-частотные характеристики колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом.

Форма колебаний для каждой оболочки определяется выражением

$$\zeta_q(y) = G_q^1(y) [C_q^1 (H_{q-1}^2 Z_{q-1}) + C_q^2 (H_q^1 Z_q)], \quad 0 \leq y \leq \ell_q.$$

Метод расчета реализован в виде алгоритмов и компьютерных программ, написанных на языке Fortran, применительно к динамической модели, показанной на рис. 1. Ниже приведены результаты расчетной оценки влияния присоединенной жидкости на АЧХ и формы колебаний оболочек в вакууме (“сухой”) и в жидкости (“мокрой”), что представляет теоретический и практический интерес. Для чистоты эксперимента принята упрощенная модель оболочечной конструкции, состоящей из соединенных между собой восьми одинаковых секций, состоящих из цилиндрических оболочек постоянного радиуса и колец. Конструктивные параметры составной оболочки: общая длина $L = 70$ м; радиус $a = 4$ м; толщина $h = 0.04$ м. Материал – сталь. Возмущающая сила $P = 1000$ Н приложена на левом конце оболочечной конструкции.

На рис. 2–4 приведены результаты расчетов АЧХ и форм колебаний в диапазоне частот $f = 1–100$ Гц для окружной гармоники $n = 1$. На рис. 2 приведены АЧХ радиальных колебаний w в dB составной оболочки в вакууме. Три линии на рис. 2 – сплошная, точками и штриховая соответствуют АЧХ в сечениях: 1 – левый конец; 2 – середина; 3 – правый конец оболочечной конструкции. Первые три резонансные частоты изгибных колебаний оболочки на рис. 2: $f = 8.75$ Гц; 28.25 Гц; 35.5 Гц.

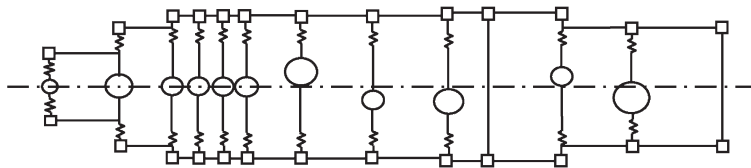


Рис. 1. Динамическая модель оболочки.

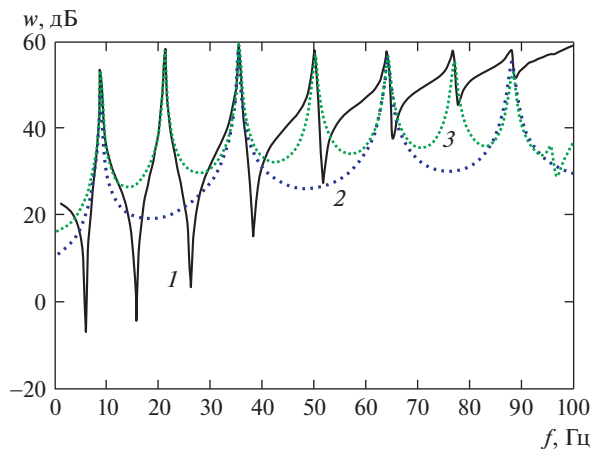


Рис. 2. АЧХ колебаний оболочки в вакууме.

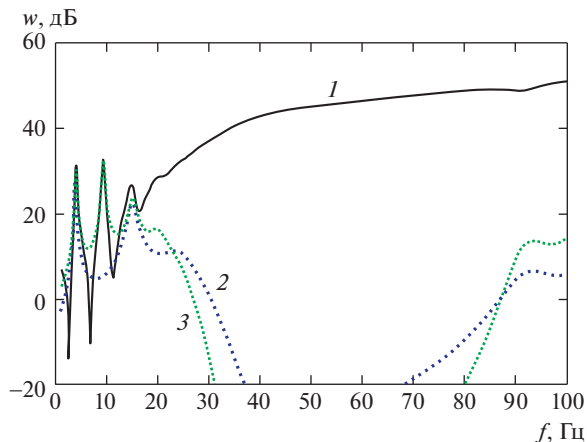


Рис. 3. АЧХ колебаний оболочки в жидкости.

На рис. 3 приведены АЧХ колебаний той же оболочки в жидкости в том же диапазоне частот. Первые три резонансные частоты уменьшились и стали: $f = 4$ Гц; $f = 9.25$ Гц; $f = 14.25$ Гц. Уровни колебаний на соответствующих резонансных частотах существенно снизились, примерно на 20–30 дБ. В оболочке, погруженной в жидкость, резонансы на частотах выше 14.7 Гц вообще не проявились (задемпфировались).

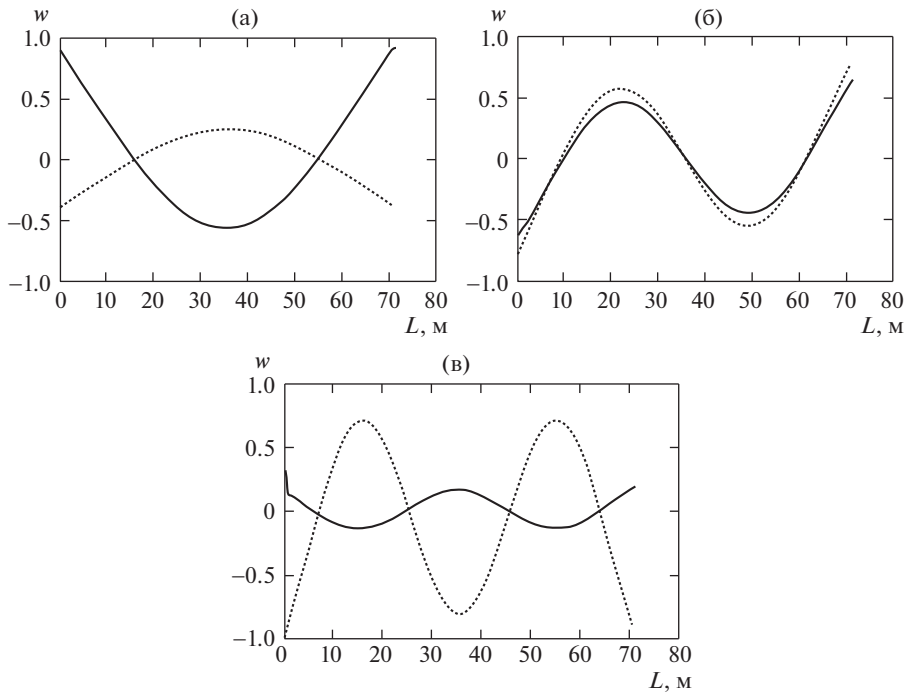


Рис. 4. Формы резонансных колебаний оболочки в жидкости на частотах: (а) $f = 4$ Гц; (б) $f = 9.25$ Гц; (в) $f = 14.25$ Гц.

На рис. 4 приведены формы радиальных колебаний W оболочки в жидкости соответственно на первых трех резонансных частотах: а) $f = 4$ Гц; б) $f = 9.25$ Гц; в) $f = 14.25$ Гц. Сплошные линии – реальные составляющие $\text{Re}(W)$, пунктирные линии – мнимые составляющие $\text{Im}(W)$ комплексного радиального перемещения w . Полученные формы колебаний соответствуют типичным низшим формам изгибных колебаний оболочки и балки со свободными краями, что подтверждает правильность расчетов. Резонансные (собственные) формы колебаний оболочек в вакууме и в жидкости полностью совпадают, что является подтверждением правильности расчета оболочки в жидкости. Результаты расчетной оценки влияние жидкости на резонансные частоты (их величины) получены впервые. Это влияние оказалось весьма существенным, что является новым и принципиально важным результатом.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Forsberg K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // AIAA Journal. V. 2. № 12. Dec. 1964. P. 2150.
2. Скенк Г.А., Бентхайн Дж. В. Эффективное вычисление и визуализация дисперсионных кривых для тонкой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Акустический журнал. 1995. № 5. С. 828.

3. *Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
4. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Импеданс излучения ограниченной цилиндрической области // *Акустический журнал*. 1990. № 5. С. 898.
5. *Романов В.Н., Иванов В.С.* Излучение звука элементами судовых конструкций. СПб.: Судостроение, 1993. 212 с.
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд. ФМЛ, 1961. С. 221.
7. *Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С.* Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов // *Сб. трудов XX сессии РАО*. Т. 1. М.: ГЕОС, 2008. С. 169.
8. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. С. 260.
9. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. С. 423.
10. *Косарев О.И.* Дисперсионное уравнение свободной конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2019. № 5. С. 36.