
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.31

**К ВОПРОСУ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ
ПЕРЕХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ВАЛА**© 2020 г. М. Н. Ерохин^{1,*}, П. В. Дородов², А. С. Дорохов³¹Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия²Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия³Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Россия

*e-mail: sibirev2011@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.10.2019 г.

Принята к публикации 31.01.2020 г.

В статье представлено аналитическое решение прямой краевой и плоской задачи о напряженном состоянии в срединной поверхности ступенчатого вала. В краевой задаче применяется сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решение которого находится в виде неограниченного возрастания напряжений на концах интервала интегрирования. Плоская задача представлена в тригонометрических рядах, где постоянные коэффициенты определены из краевых условий, которые предварительно разложены в ряды Фурье. Сравнение полученных результатов с научными источниками и экспериментальные исследования напряженного состояния при помощи лазерного полярископа на плоских прозрачных моделях ступенчатых деталей с галтелями постоянной и переменной кривизны подтвердили адекватность представленного решения.

Ключевые слова: ступенчатый вал, концентрация напряжений, галтель, переходная поверхность, оптимизация формы

DOI: 10.31857/S0235711920030050

Целью исследований является разработка методики расчета оптимальной формы переходной поверхности ступенчатого вала.

Анализ современного состояния рассматриваемой проблемы. Проблемам определения напряжений в местах различных концентраторов с заданной геометрической формой (прямая задача) посвящена обширная область теории упругости и механики деформируемого твердого тела. Концентрация напряжений численно характеризуется коэффициентами концентрации, однако точные аналитические решения для их определения найдены только в некоторых задачах. В последнее время в связи с широким применением математических пакетов программ и численных методов в задачах теории упругости оказывается возможным найти теоретические коэффициенты концентрации напряжений с достаточной для практических целей точностью. Эти коэффициенты в упругой зоне нагружения для различных типов конструктивных элементов приведены в справочниках по концентрации напряжений, нормах, технических условиях на проектирование конструкций и в других аналогичных источниках. В иных задачах, не имеющих даже численного решения, для определения коэффициентов концентрации и закона распределения напряжений применяются экспериментальные методы: фотоупругости, голографической интерферометрии, тензометрии, муаровых полос и др. Но все экспериментальные методы отличаются большой трудоемкостью или высокой стоимостью лабораторного оборудования.

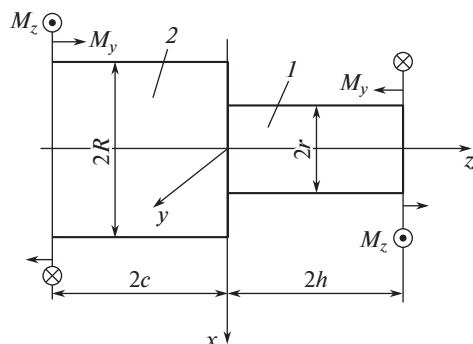


Рис. 1. Элемент ступенчатого вала при изгибе с кручением.

Отыскание оптимальных геометрических форм деталей при их проектировании (обратная задача), когда известно или задается напряженное состояние, встречается с серьезными математическими трудностями. В ряде случаев подобное проектирование оптимальной формы сводится к решению вариационных задач с неизвестными границами, для которых отсутствуют регулярные методы исследования. Известные трудности связаны также с тем, что задачи оптимизации формы упругих тел относятся к числу нелинейных задач механики [1–5].

Разработка методов оптимизации формы деталей конструкций машин, несущих основную нагрузку, имеет важное прикладное и теоретическое значение в решении задач повышения их надежности и в значительной степени активизирует развитие машинных технологий на производстве.

Обоснование актуальности рассматриваемой проблемы. Валы в любом механизме или машине принадлежат к числу наиболее ответственных деталей, выход из строя которых обычно представляет собой угрозу для всего привода. Часто валы имеют ступенчатую форму, разрушение которых связано с возникновением усталостных трещин в местах перехода от меньшего сечения к большему. Для снижения концентрации напряжений переходные поверхности скругляют галтелями постоянной или переменной кривизны, однако остается актуальным вопрос об их оптимальной форме [1, 2].

Задача исследований. Разработка методики расчета оптимальной формы переходной поверхности ступенчатого вала в условиях сложного сопротивления.

Методика исследований. Рассмотрим расчетную схему элемента ступенчатого вала при изгибе с кручением (рис. 1).

Проведем последовательный расчет ступенчатого вала, применяя для жесткого изотропного материала принцип независимости действия силовых факторов (суперпозиции). Вначале решим прямую задачу для элемента вала с концентрацией напряжений (без галтели). Для определения напряжений на линии сопряжения ступени 1 и основания 2 ($|x| \leq r$; $z = 0$) воспользуемся особым интегральным уравнением [6–11]

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i} \int_{-r}^r \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x), \quad (1)$$

где при чистом изгибе примем

$$\varphi(x) = \sigma_z(x; 0) = \sigma_{zM},$$

$$f(x) = -i \frac{dw_M}{dx},$$

при чистом кручении

$$\varphi(x) = \tau(x; 0) = \tau_M,$$

$$f(x) = -i \frac{dv_M}{dx}.$$

Здесь $\sigma_{zМ}$, τ_M – местные нормальные и касательные напряжения на линии сопряжения; w_M , v_M – местные перемещения на линии сопряжения; a , b – упругие постоянные.

Решение уравнения (1), в случае неограниченного возрастания напряжений на концах линии сопряжения, имеет вид [6, 7]

$$\varphi(x) = -\frac{A}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \int_{-r}^{+r} \frac{\sqrt{r^2 - \xi^2} f(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{B}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (2)$$

где A , B – постоянные, зависящие от упругих свойств и внешней нагрузки.

Примем

$$\left. \begin{aligned} w_M &= \theta x, \\ v_M &= \alpha x, \end{aligned} \right\}$$

где θ , α – углы наклона и поворота линии сопряжения.

Тогда из (2) получаем [7]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zМ} &= -\frac{A_1 \theta x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{B_1}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}}, \\ \tau_M &= -\frac{A_2 \alpha x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{B_2}{\pi \sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned} \right\}$$

Для определения постоянных воспользуемся условиями равновесия

$$\left. \begin{aligned} \int_{-r}^r \sigma_{zМ} dx &= 0, \\ \int_{-r}^r \tau_M dx &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда $B_1 = B_2 = 0$;

$$\left. \begin{aligned} \int_{-r}^r \sigma_{zМ} x dx &= \frac{8M_y}{3\pi r}, \\ \int_{-r}^r \tau_M x dx &= \frac{4M_z}{3\pi r}, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} A_1 \theta &= -\frac{16M_y}{3\pi^2 r^3}, \\ A_2 \alpha &= -\frac{8M_z}{3\pi^2 r^3}, \end{aligned} \right\}$$

где M_y , M_z – изгибающий и крутящий моменты соответственно.

Окончательно местные напряжения на линии сопряжения примут вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zМ} &= \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \\ \sigma_{x0} &= 0, \\ \tau_M &= \frac{8\beta M_y}{3\pi^2 r^3} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\beta = M_z/M_y$.

Функции (3), а также нормальные и касательные напряжения для крайнего правого сечения

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{4M_y}{\pi r^4} x, \\ \tau &= \frac{2M_z}{\pi r^4} x = \frac{2\beta M_y}{\pi r^4} x \end{aligned} \right\}$$

и для крайнего левого сечения вала

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{4M_y}{\pi R^4} x, \\ \tau &= \frac{2M_z}{\pi R^4} x = \frac{2\beta M_y}{\pi R^4} x \end{aligned} \right\}$$

раскладываем в ряды Фурье

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zМ} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\lambda x) + A_{n1} \sin(\lambda x)), \\ \tau_M &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \sin(\lambda x) + B_{n1} \cos(\lambda x)), \\ \sigma &= B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n^* \cos(\lambda x) + B_{n1}^* \sin(\lambda x)), \\ \tau &= D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin(\lambda x) + D_{n1} \cos(\lambda x)). \end{aligned} \right\}$$

Здесь для левой части вала 2 (основания) при $\lambda = n\pi/R$ свободные члены и коэффициенты рядов запишутся

$$A_{n1} = \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3 R} I_{n1}(\lambda r), \quad B_n = \frac{8\beta M_y}{3\pi^2 r^3 R} I_{n1}(\lambda r),$$

$$A_0 = A_n = B_0 = B_{n1} = B_0^* = B_n^* = D_0 = D_{n1} = 0,$$

$$B_{n1}^* = \frac{8M_y}{\pi \lambda^2 R^5} (\sin(n\pi) - (n\pi) \cos(n\pi)),$$

$$D_n = \frac{4\beta M_y}{\pi \lambda^2 R^5} (\sin(n\pi) - (n\pi) \cos(n\pi)),$$

$$\text{где } I_{n1} = \int_{-r}^r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \sin(\lambda x) dx.$$

Для правой части вала 1 (ступени) в вышеприведенных формулах необходимо R заменить на r . Записываем напряжения $\sigma_z(x, z)$, $\sigma_x(x, z)$, $\tau_{xz}(x, z)$ для срединной плоскости xz вала в тригонометрических рядах с постоянными коэффициентами C_{in} [7, 11]

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sigma_{z0} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 ((C_{1n} \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{2n} \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{3n} z \operatorname{ch}(\lambda z) + \\ + C_{4n} z \operatorname{sh}(\lambda z)) \cos(\lambda x) + (C_{5n} \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{6n} \operatorname{sh}(\lambda z) + \\ + C_{7n} z \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{8n} z \operatorname{sh}(\lambda z)) \sin(\lambda x)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_{x0} + \sum_{n=1}^{\infty} ((C_{1n} \lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{2n} \lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{3n} \lambda (2 \operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z)) + \\ + C_{4n} \lambda (2 \operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z))) \cos(\lambda x) + (C_{5n} \lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{6n} \lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda z) + \\ + C_{7n} \lambda (2 \operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z)) + C_{8n} \lambda (2 \operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z))) \sin(\lambda x)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{xz0} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda ((C_{1n} \lambda \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{2n} \lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{3n} (\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z)) + \\ + C_{4n} (\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z))) \sin(\lambda x) - (C_{5n} \lambda \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{6n} \lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + \\ + C_{7n} (\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z)) + C_{8n} (\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z))) \cos(\lambda x)). \end{aligned}$$

Для левой части 2 (основания) вала с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} 1) \sigma_z|_{z=c} &= \sigma_{zM}, \quad (|x| \leq r), \\ 2) \tau_{xz}|_{z=c} &= \tau_M, \quad (|x| \leq r), \\ 3) \sigma_z|_{z=-c} &= \frac{4M_y}{\pi R^4} x, \quad (|x| \leq R), \\ 4) \tau_{xz}|_{z=-c} &= \frac{2M_z}{\pi R^4} x, \quad (|x| \leq R) \end{aligned} \right\}$$

и началом координат в точке $(0; -c)$ постоянные C_{in} , а также свободные члены рядов определяем по формулам [7, 11]

$$C_{1n} = -\frac{(A_n + B_n^*)(\operatorname{sh}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)) + (B_n - D_n) \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{2n} = -\frac{(A_n - B_n^*)(\operatorname{ch}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)) + (B_n + D_n) \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{3n} = \frac{(A_n - B_n^*) \operatorname{ch}(\lambda c) + (B_n + D_n) \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{4n} = \frac{(A_n - B_n^*) \operatorname{sh}(\lambda c) + (B_n - D_n) \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{5n} = -\frac{(A_{nl} - B_{nl}^*)(\operatorname{sh}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)) - (B_{nl} - D_{nl}) \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{6n} = -\frac{(A_{nl} - B_{nl}^*)(\operatorname{ch}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)) - (B_{nl} + D_{nl}) \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{7n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) \operatorname{ch}(\lambda c) - (B_{n1} + D_{n1}) \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{8n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) \operatorname{sh}(\lambda c) - (B_{n1} - D_{n1}) \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$\sigma_{z0} = A_0, \quad \sigma_{x0} = A_0^*, \quad \tau_{xz0} = B_0.$$

Для правой части I (ступени) вала с граничными условиями

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sigma_z|_{z=+h} = \frac{4M_y}{\pi r^4} x, \\ 2) \tau_{xz}|_{z=+h} = \frac{2M_z}{\pi r^4} x, \\ 3) \sigma_z|_{z=-h} = \sigma_{zM}, \\ 4) \tau_{xz}|_{z=-h} = \tau_M, \\ (|x| \leq r) \end{array} \right\}$$

и началом координат в точке $(0; +h)$ постоянные C_{in} , а также свободные члены рядов определяем по формулам [7, 11]

$$C_{1n} = -\frac{(A_n - B_n^*) (\operatorname{sh}(\lambda h) + \lambda h \operatorname{ch}(\lambda h)) - (B_n - D_n) \lambda h \operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{2n} = \frac{(A_n - B_n^*) (\operatorname{ch}(\lambda h) + \lambda h \operatorname{sh}(\lambda h)) - (B_n + D_n) \lambda h \operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{3n} = -\frac{(A_n - B_n^*) \operatorname{ch}(\lambda h) - (B_n + D_n) \operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{4n} = \frac{(A_n - B_n^*) \operatorname{sh}(\lambda h) - (B_n - D_n) \operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{5n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) (\operatorname{sh}(\lambda h) + \lambda h \operatorname{ch}(\lambda c)) + (B_{n1} - D_{n1}) \lambda h \operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{6n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) (\operatorname{ch}(\lambda h) + \lambda h \operatorname{sh}(\lambda h)) + (B_{n1} + D_{n1}) \lambda h \operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{7n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) \operatorname{ch}(\lambda h) + (B_{n1} + D_{n1}) \operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{8n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^*) \operatorname{sh}(\lambda h) + (B_{n1} - D_{n1}) \operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$\sigma_{z0} = A_0, \quad \sigma_{x0} = A_0^*, \quad \tau_{xz0} = B_0.$$

По известной формуле

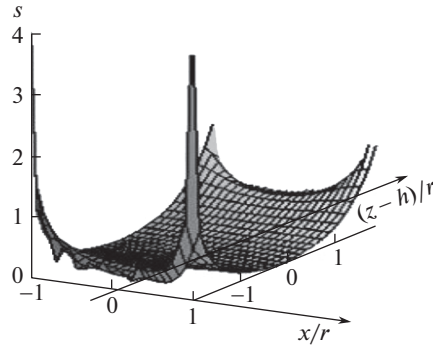


Рис. 2. Эпюра максимальных касательных напряжений в безразмерных величинах для ступени вала.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

определяем максимальные касательные напряжения и приводим их к безразмерным величинам согласно выражениям (4) и (5)

$$s(x/t; z/t) = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_H}, \tag{4}$$

где за эквивалентные номинальные напряжения примем

$$\sigma_H = \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3} \sqrt{1 + \beta^2}. \tag{5}$$

На рис. 2 представлена эпюра максимальных касательных напряжений в безразмерных величинах при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$ для ступени вала.

Исследование концентрации напряжений в ступенчатых деталях с плоской срединной поверхностью и постоянным радиусом скругления галтели представлено в [11]. Если за эквивалентные номинальные напряжения принять (5), то теоретический коэффициент концентрации α_T по наибольшим эквивалентным напряжениям

$$\sqrt{\sigma_{z0}^2 + 4\tau_0^2} = \frac{16M_y}{3\pi^3 r^3} \sqrt{1 + \beta^2} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

при $x \rightarrow r$ и условии ограниченности напряжений в галтелях вала, запишется

$$\alpha_T = \lim_{x \rightarrow r} \left(\frac{\sqrt{\sigma_{z0}^2 + 4\tau_0^2}}{\sigma_H} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}}, \tag{6}$$

где r_0 – радиус ступени вала без галтели ($r_0 > r$). Тогда, воспользовавшись выводами в [11] и выражением (6), получим уравнение

$$\frac{\alpha_T^2}{\alpha_T^2 - 1} - \frac{(\alpha_T - 1)^2 \rho_0^2}{2} - 2(2\sqrt{2} - 1)\rho_0^2 - 2\sqrt{2}\rho_0 - 1 = 0, \tag{7}$$

где $\rho_0 = \rho/2r$, ρ – радиус галтели переходной поверхности.

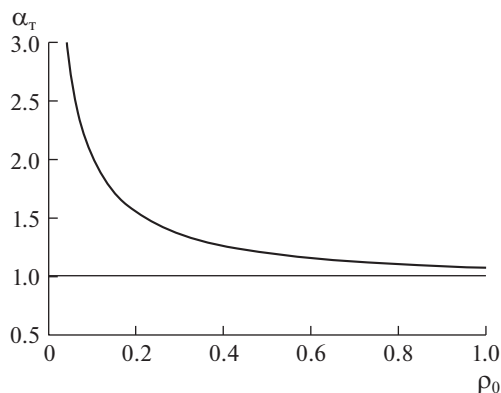


Рис. 3. Изменение теоретического коэффициента концентрации напряжений в зависимости от радиуса галтели ступенчатого вала.

На рис. 3 дано графическое представление уравнения (7) — зависимости теоретического коэффициента концентрации напряжений от радиуса галтели ступенчатого вала.

Полученная кривая хорошо согласуется с эмпирическими данными, приведенными в [11]. Отсюда можно заключить, что галтели ступенчатого вала с постоянным радиусом скругления не являются оптимальной формой переходной поверхности.

Для оптимизации формы переходной поверхности вала решим обратную задачу. Искривленное поле максимальных касательных напряжений (4) (рис. 2) разворачиваем на плоскости xz , тем самым получаем форму срединной поверхности вала в месте перехода ступень — основание, удовлетворяющую условию оптимальности [7, 11]

$$\frac{2\tau_{\max}}{\sigma_n} = k_\sigma \rightarrow 1 \quad \text{или} \quad s = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_n} \rightarrow 0.5.$$

Математически развертка искривленной поверхности $s(x/t; z/t)$ выполняется путем определения длины ветви L_s функции s

$$L_s(z/r) = \pm \int_0^{0.99r} \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2} dx.$$

Здесь знак “плюс” относится к интервалу $0 \leq x \leq +r$, “минус” — к $-r \leq x \leq 0$ и, из-за того, что при $x = r$ длина кривой L_s стремится к бесконечности, верхний предел интегрирования значением $x = 0.99r$.

В плоскости xz строим график $L_s = f(z)$ в пределах $|x/r| \leq R/r$, $0 \leq z/r \leq 2h/r$, который представляет собой оптимальную форму переходной поверхности ступенчатого вала.

Результаты и их обсуждение. На рис. 4 изображена оптимальная форма переходной поверхности ступенчатого вала, рассчитанная по разработанной методике, при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$.

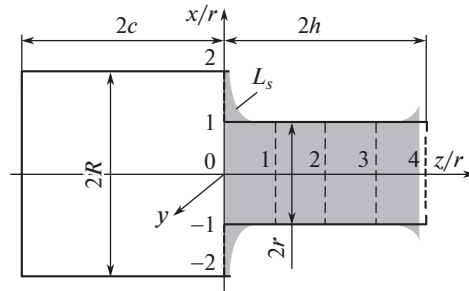


Рис. 4. Оптимальная форма переходной поверхности ступенчатого вала при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$.

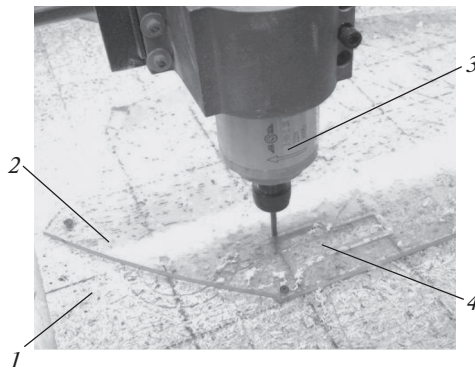


Рис. 5. Изготовление модели срединной поверхности ступенчатого вала.

Для проверки полученного результата проведены экспериментальные исследования напряженного состояния на плоских моделях из листового органического стекла толщиной $\delta = 6$ мм при помощи лазерного полярископа по методике, описанной в [7]. Плоская модель срединной поверхности ступенчатого вала устанавливалась между опорными плитами нагрузочного устройства по схеме шарнирно опертой балки в крайних сечениях и сосредоточенной силой P в месте переходной поверхности ($z = 0$). Чтобы исключить влияние контактных напряжений от жесткого индентора под действием силы P , максимальные касательные напряжения определялись в точках модели при $x \leq 0.2r$. Переходные поверхности моделей с постоянными радиусами скругления и оптимальной формы были изготовлены на фрезерно-гравировальном станке с ЧПУ (рис. 5).

Экспериментальное значение максимальных касательных напряжений определялось по формуле [7]

$$\tau_{\max} = C \left(\arcsin \sqrt{\frac{U}{U_{\max}}} - \theta \right),$$

где U – напряжение на фотоприемнике при нагружении модели силой P , мВ; $C = 2.226$ МПа, $\theta = 0.181$, $U_{\max} = 1500$ мВ – тарировочные постоянные.

Таблица 1. Результаты исследования максимальных касательных напряжений в модели срединной поверхности ступенчатого вала на лазерном полярископе

x , мм	Радиус галтели 5 мм		Радиус галтели 20 мм		Оптимальная форма	
	U , мВ	τ_{\max} , кПа	U , мВ	τ_{\max} , кПа	U , мВ	τ_{\max} , кПа
2.4	59	41.515	99	175.449	94	160.326
0	68	74.702	120	235.414	135	275.34
-2.4	110	207.52	193	413.761	257	547.064
-4.8	187	400.375	338	698.107	390	788.162
-7.2	370	754.038	500	967.152	560	1060.324
-9.6	560	1060.324	690	1256.255	718	1297.888
-12.0	1262	2181.705	824	1455.385	760	1360.231
-14.4	353	724.543	742	1339.454	573	1080.221
-16.8	196	420.387	461	905.122	281	593.494
-21.0	130	262.266	152	318.243	140	288.198

Основные результаты исследования для моделей при $R = c = h = 2.1r = 25.2$ мм, $P = 60$ Н, $z = -2$ мм и $\beta = 0$ представлены в табл. 1 и на рис. 6.

Обсуждение и заключения. 1. Из анализа эпюр (рис. 7) следует, что значения коэффициента концентрации напряжений $\alpha_T = k_{\sigma_{\max}} = 1.11$ при $\rho_0 = 0.83$ и $\alpha_T = 1.66$ при $\rho_0 = 0.21$ согласуются с теоретической кривой (рис. 3). **2.** Наименьшее значение α_T составляет 1.04 для формы переходной поверхности L_s , рассчитанной по предложенной методике, что указывает на достижение поставленной цели исследований.

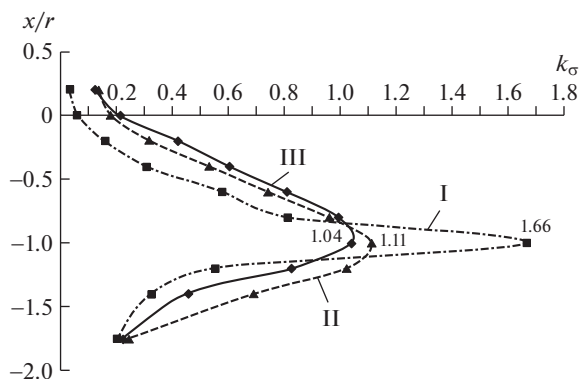


Рис. 6. Напряженное состояние модели ступенчатого вала в переходном сечении при $R = c = h = 2.1r = 25.2$ мм, $x \leq 0.2r$, $z = -2$ мм и $\beta = 0$: I – с постоянным радиусом скругления $\rho = 5$ мм ($\rho_0 = 0.21$); II – с постоянным радиусом скругления $\rho = 20$ мм ($\rho_0 = 0.83$); III – с оптимальной формой переходной поверхности.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Francavilla A., Ramakrishnan C.V., Zienkiewicz O.C.* Optimization of shape to minimize stress concentration // *J. Strain Anal.*, 1975. V. 10. P. 63.
2. *Sonmez F.O.* Optimal shape design of shoulder fillets for flat and round bars under various loadings // *J. Mechanical Engineering Science*. 2009. V. 223. P. 1741.
3. *Pedersen N.L.* Optimization of Bolt Stress // 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, May 19–24, 2013, Orlando, Florida, USA. P. 1.
4. *Yang L., Masatoshi S., Yoji S.* Parameter-free method for the shape optimization of stiffeners on thin-walled structures to minimize stress concentration // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2015. V. 29. P. 1383.
5. *Lian H., Christiansen A.N., Tortorelli D.A., Sigmund O., Aage N.* Combined shape and topology optimization for minimization of maximal von Mises stress // *Structural and multidisciplinary optimization*. 2017. V. 55(5). P. 1541.
6. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
7. *Дородов П.В.* Комплексный метод расчета и оптимального проектирования деталей машин с концентраторами напряжений: Монография. Ижевск: ФГБОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2014. 316 с.
8. *Кулиев В.Д.* Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева*. 2015. № 1(23). С. 132.
9. *Урбанович Т.М.* Об особом случае характеристического уравнения с ядром Коши // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 52. № 12. С. 1650.
10. *Урбанович Т.М.* Особый случай сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши // *Доклады НАН Беларуси*. 2016. Т. 60. № 2. С. 10.
11. *Ерохин М.Н., Дородов П.В.* Метод оптимизации формы несимметричных ступенчатых деталей // *Международный технико-экономический журнал*. 2016. № 2. С. 10.