МЕХАНИКА МАШИН

УДК 536.461:537.84: 621.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФУЗИИ ГАЗА В ВАКУУМЕ

В. А. Котельников[2,*], М. В. Котельников[2,*], Г. С. Филиппов[1,2,], М. А. Платонов[2]**

[1]Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Россия

**e-mail: mvk_home@mail.ru*

***e-mail: filippov.gleb@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.09.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Методами математического моделирования исследована эффузия газа через небольшое отверстие прямоугольной формы в разреженное пространство. Получены функции распределения частиц газа, истекающих из отверстия и моменты этих функций: поля концентраций и скоростей частиц газа. Исследована зависимость эффузии от объема, из которого происходит истечение.

Ключевые слова: функция распределения, уравнение Власова, эффузия, разгерметизация

DOI: 10.31857/S0235711920030062

Истечение газа через относительно малые отверстия в результате теплового движения молекул часто встречается в природе и современной технике. Например, при движении космических аппаратов в ионосфере всегда существует опасность разгерметизации жилых отсеков в результате столкновений с метеоритами, частицами космического мусора, деградации сварных швов, различных аварий и других причин. Появлению больших течей часто предшествуют малые течи, которые трудно поддаются диагностике. Авария на орбитальной станции “Мир” в 1997 году привела к разгерметизации одного из ее модулей [1]. Тогда удалось изолировать поврежденный модуль, однако в конечном итоге это повлияло на срок ее функционирования.

Появление электроракетных двигателей (ЭРД) привело к необходимости создания вакуумных стендов больших размеров для их исследования, диагностики, совершенствования конструкции. Первые работы в области создания ЭРД начались в 60-х годах прошлого столетия по инициативе С.П. Королева и продолжаются до настоящего времени [2]. В практике использования вакуумных стендов приходится уделять много внимания исключению течей при герметизации люков, смотровых окон, в местах введения измерительных систем, в сварных швах и т.д.

Явление эффузии лежит в основе ряда технологических процессов, связанных с разделением смесей газов на отдельные компоненты путем ее пропускания через пористые вещества.

В настоящей статье методами математического моделирования исследуется эффузия газа в разреженное пространство. По этому вопросу встречается достаточно много опубликованных работ [3–18], однако строгого решения задачи на кинетическом

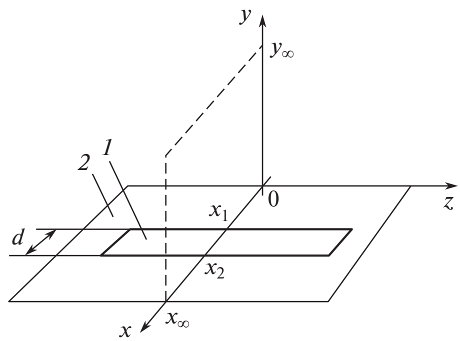

Рис. 1. Расположение отверстия на плоскости (x, z). *1* – отверстие прямоугольной формы; *2* – элемент поверхности; $x_2 - x_1 = d$ – ширина отверстия.

уровне найти не удалось. Отсутствуют детальные исследования особенностей функций распределения частиц газа, истекающих в разреженное пространство.

При выборе физических, математических и численных моделей эффузии газа авторы использовали опыт, накопленный при исследовании динамики потоков разреженной плазмы в теоретических и прикладных задачах [19–22].

Физическая, математическая и численная модели задачи. Рассмотрим разреженный газ, истекающий из объема V в вакуумное пространство через отверстие, размер которого много меньше средней длины свободного пробега частиц газа. Газ в объеме V предполагается равновесным, толщиной стенок пренебрегаем, в струе газа, истекающей из отверстия, столкновениями пренебрегаем.

В общем случае такая задача оказывается шестимерной в фазовом пространстве и нестационарной [19–22]. С целью сокращения размерности задачи отверстие, через которое происходит утечка газа, берется в форме удлиненного прямоугольника. Соответствующие этой физической модели проблемы встречаются на практике в виде малых течей через трещины в обшивках летательных аппаратов и корпусах вакуумных камер.

С учетом сдвиговой симметрии математическая модель задачи оказывается четырехмерной. В декартовой системе координат (рис. 1) функция распределения частиц газа зависит от четырех фазовых переменных (x, y, v_x, v_y) и времени t.

В этом случае кинетическое уравнение (уравнение Власова) имеет вид [19–22]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) решается при следующих начальных и граничных условиях: за начальный момент времени принимается момент образования щели. На срезе отверстия (граница “втекания”) функция распределения предполагается Максвелловской [24]

$$f\Big|_{\substack{\text{граница}\\ \text{втекания}}} = \frac{n_0}{\pi}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2)\right], \tag{2}$$

где n_0 – невозмущенная концентрация частиц газа в объеме V, m – масса молекул газа, T – температура, k – постоянная Больцмана.

Функция распределения f на срезе отверстия совпадает с (2) с учетом того, что по мере истечения газа из объема V концентрация частиц n_0 изменяется со временем.

На границе “вытекания” ставились “мягкие” граничные условия, получаемые путем экстраполяции функции распределения с прилегающих расчетных слоев.

Формулы для расчета средних скоростей частиц газа и их потоков имеют вид

$$\langle v_x \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x f dv_x dv_y}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y}, \quad \langle v_y \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f dv_x dv_y}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y}, \tag{3}$$

$$J_{\text{из отверстия}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} v_y f(v_x, v_y)\Big|_{\substack{\text{граница}\\ \text{втекания}}} dx dv_x dv_y, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} J_{\text{внешняя граница}} = {} & \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int\limits_{0}^{x_\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} v_y f(t, x, y_0, v_x, v_y) dx dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{x_\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} v_y f(t, x, y_\infty, v_x, v_y) dx dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{y_\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f(t, x_0, y, v_x, v_y) dy dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{y_\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f(t, x_\infty, y, v_x, v_y) dy dv_x dv_y. \end{aligned} \tag{5}$$

Математическая модель (1)–(5) приводилась к безразмерному виду с помощью системы масштабов: $M_n = n_\infty$ – масштаб концентраций; $M_L = d$ – масштаб длины; $M_V = (2kT/m)^{1/2}$ – масштаб скорости. Остальные масштабы выражаются через данные по формулам размерности.

Вычислительная модель задачи основана на методе последовательных итераций по времени, когда моделируется переходный процесс от начального к конечному стационарному состоянию, которое соответствует установлению параметров газа в расчетной области. При этом уравнение Власова (1) решается методом характеристик [23].

Алгоритм расчета реализован в виде компьютерной программы на языке C++ с использованием средств графической библиотеки Open GL. При этом были задействованы более миллиарда ячеек расчетной сетки (400 × 400 × 80 × 80). Область исследования струи имела размер 10 × 10 безразмерных единиц. Расчет на настольном компьютере (четырехъядерный процессор Intel Core i7-6700K, тактовая частота каждого ядра составляет 4 ГГц, оперативная память компьютера 32 Гб) продолжался 44 часа.

Контроль времени окончания счета (момента установления решения) осуществляется визуально с использованием графического окна, выводимого на экран монитора в режиме реального времени [24]. Визуально фиксировался момент, когда поток частиц, вытекающий из отверстия, становился равным потоку через внешние границы расчетной области (рис. 2).

Это свидетельствовало о сохранении массы газа в расчетной области в установившемся стационарном состоянии при реализации вычислительного алгоритма.

Результаты вычислительных экспериментов. На рис. 3 представлены функции распределения частиц истекающего из отверстия газа на различных расстояниях от отверстия на оси симметрии.

На рис. 4 для наглядности те же функции распределения представлены на плоскости (v_x, v_y) в виде изолиний.

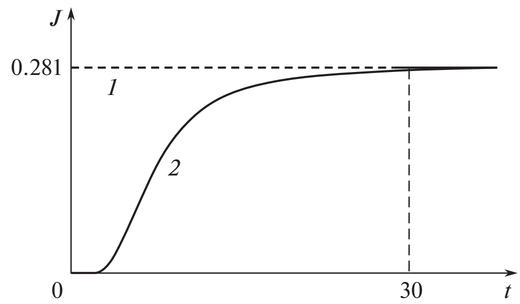

Рис. 2. Эволюция потока частиц газа через границы расчетной области. *1* – поток частиц газа, истекающий из отверстия в расчетную область; *2* – поток частиц газа, вытекающий из расчетной области.

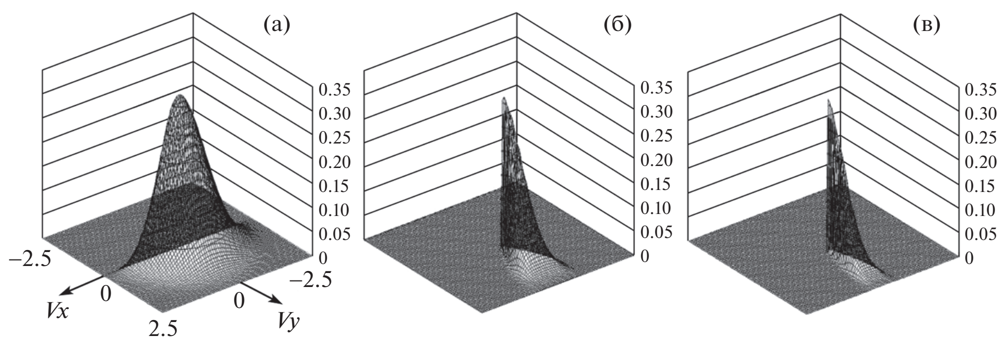

Рис. 3. Зависимость функции распределения частиц газа от координаты y ($x = 5$; $t = 30$): (а) $y = 0.025$; (б) $y = 1.5$; (в) $y = 3$.

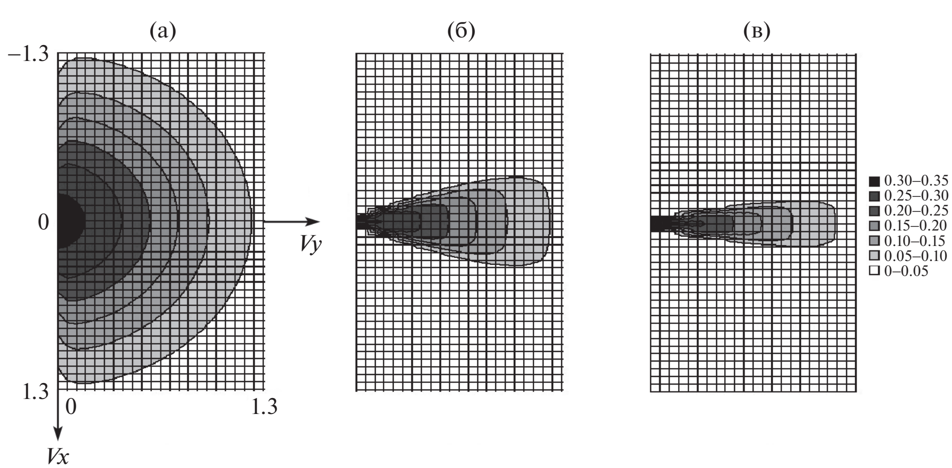

Рис. 4. Изолинии функции распределения частиц газа в зависимости от координаты y ($x = 5$; $t = 30$): (а) $y = 0.025$; (б) $y = 1.5$; (в) $y = 3$.

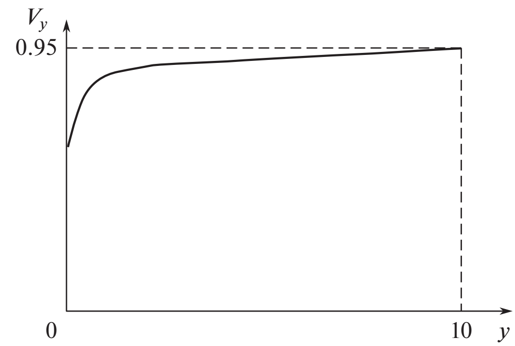

Рис. 5. Зависимость средних скоростей частиц от координаты y вдоль оси симметрии струи ($t = 30$).

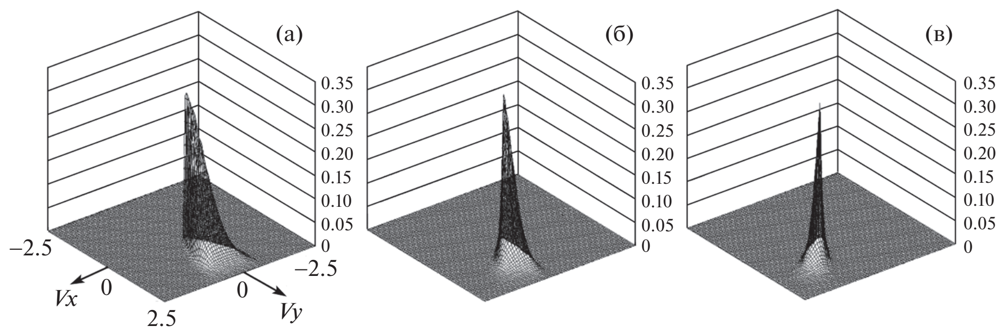

Рис. 6. Зависимость функции распределения частиц газа от координаты x ($y = 1.5$; $t = 30$): (а) $x = 5$; (б) $x = 5.75$; (в) $x = 6.5$.

Из графиков следует, что функция распределения частиц газа деформируется с удалением от отверстия. Каждая последующая функция является частью предыдущей, что является следствием рассеяния струи. Таким образом, форма функции распределения зависит от взаимного расположения исследуемой точки и эффузионного отверстия.

Изменение формы функции распределения при перемещении по оси y ведет к смещению ее “центра тяжести” в сторону увеличения составляющей v_y. В свою очередь смещение “центра тяжести” функции распределения ведет к увеличению средней скорости частиц в струе (рис. 5).

На рис. 6, 7 показана зависимость функции распределения частиц газа и ее изолиний от координаты x. Отчетливо просматривается рассеивание частиц газа с ростом координаты x. Если на оси симметрии струи (рис. 6а, 7а) средняя скорость частиц направлена по оси y, то с увеличением x угол поворота вектора средней скорости относительно оси симметрии струи увеличивается (рис. 6б, в; 7б, в).

Перейдем теперь к рассмотрению моментов функции распределения. На рис. 8а, б приведено поле концентраций в расчетной области при $t = 1.5$ (начало эволюции) и в момент $t = 30$ (установившееся решение).

Распределение концентрации частиц газа вдоль оси симметрии струи приведено на рис. 9.

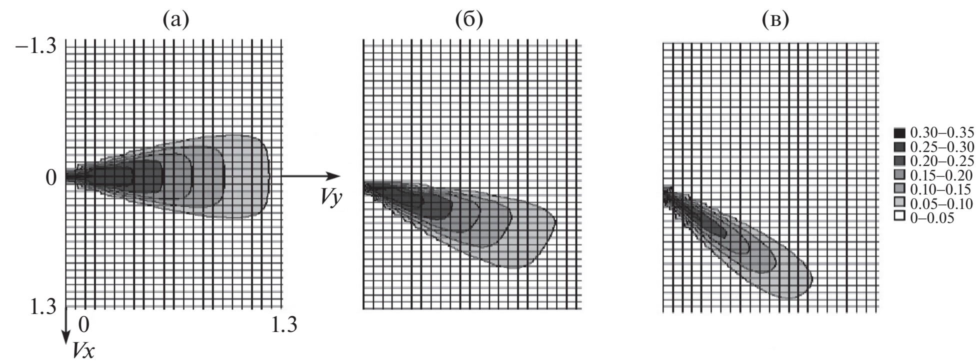

Рис. 7. Изолинии функции распределения частиц газа в зависимости от координаты x ($y = 1.5$; $t = 30$): (а) $x = 5$; (б) $x = 5.75$; (в) $x = 6.5$.

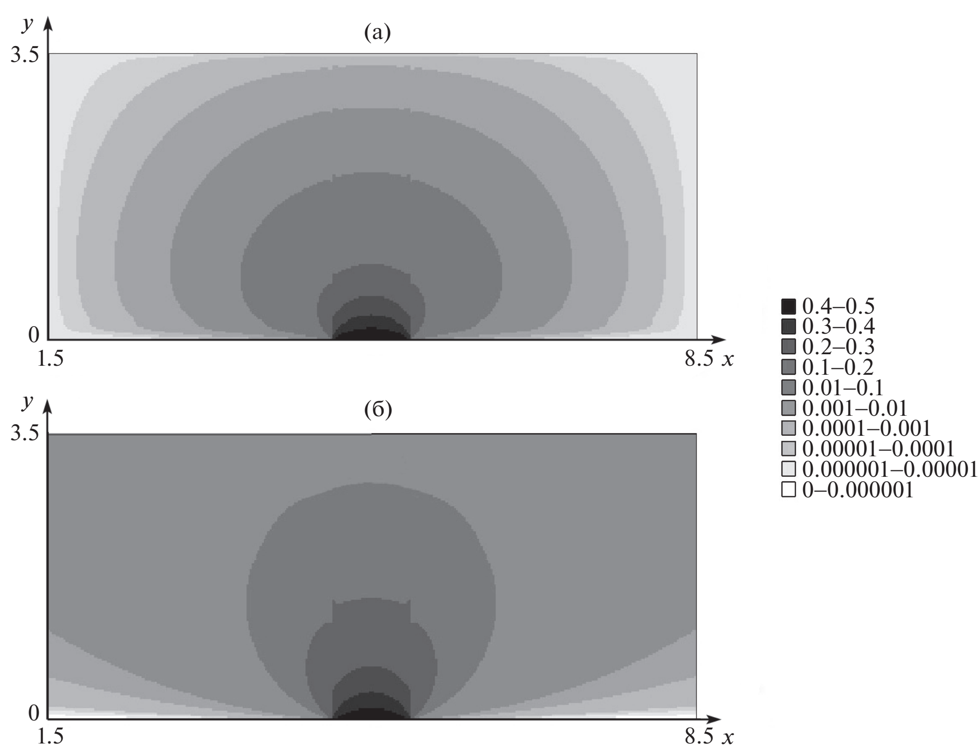

Рис. 8. Изолинии концентраций частиц газа в расчетной области: (а) $t = 1.5$; (б) $t = 30$.

На рис. 10 дано поле скоростей частиц газа на момент установления решения. Поле скоростей имеет осевую симметрию. Из рис. 10 видно, что рассеяние струи усиливается к краям отверстия.

Уточнение граничного условия на срезе отверстия. Граничная функция распределения на срезе отверстия (2) содержит параметр n_0, соответствующий невозмущенной

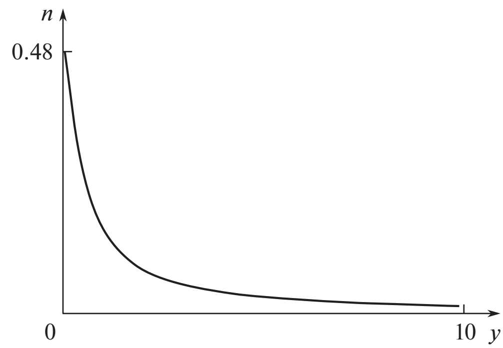

Рис. 9. Эволюция распределения концентрации компонент газа по оси y ($x = 5$).

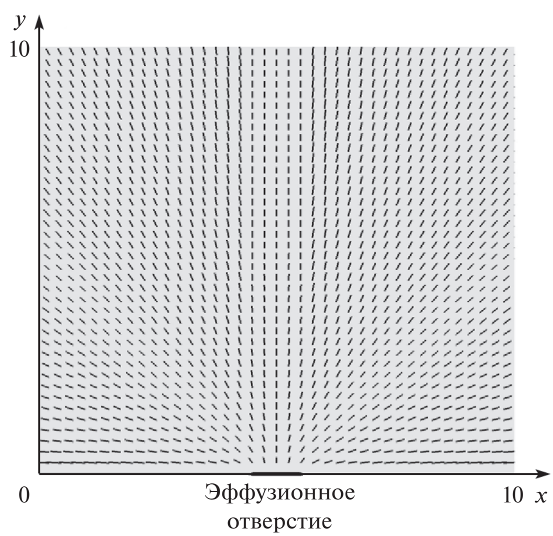

Рис. 10. Поле скоростей частиц газа ($t = 30$).

концентрации газа в объеме V. Этот параметр принят за масштаб концентрации, вследствие чего не входит в безразмерный вид уравнений. Для корректной интерпретации полученных результатов необходимо учитывать, что концентрация в объеме V вследствие эффузии уменьшается. Поэтому зависимость $n_0(t)$ является частью решения данной задачи.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Имеется резервуар объемом V (например, жилой отсек космической станции), заполненный газом при нормальных условиях. На стенке резервуара образуется микротрещина площадью S, через которую начинает истекать газ. Считаем, что температура T газа в резервуаре постоянна и равновесное состояние газа со временем не нарушается вследствие малого размера микротрещины. Число частиц ΔN в объеме V, участвующих в хаотическом движении и пересекающих площадку S за интервал времени Δt равно [25]

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t. \tag{6}$$

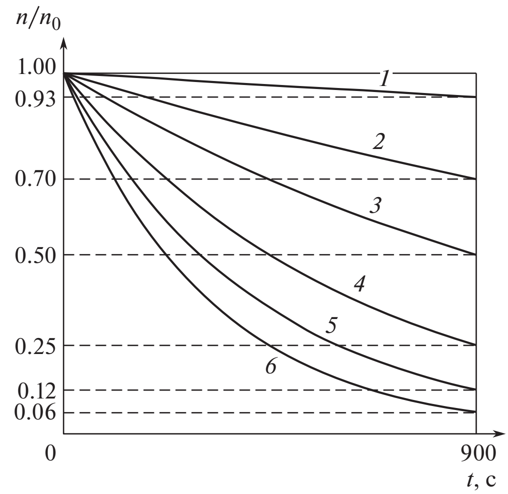

Рис. 11. Зависимость концентрации в резервуаре от времени по формулам (7) и (8) (T = 300 K; μ = 0.029 кг/моль; Δt = 1 с): *1* – $S/V = 10^{-6}$ м$^{-1}$; *2* – 5×10^{-6} м$^{-1}$; *3* – 10^{-5} м$^{-1}$; *4* – 2×10^{-5} м$^{-1}$; *5* – 3×10^{-5} м$^{-1}$; *6* – 4×10^{-5} м$^{-1}$.

Если в момент времени $t = 0$ концентрация частиц n_0, то в момент времени $t = \Delta t$ концентрация равна n_1, в момент $t = 2\Delta t - n_2$ и т.д. Элементарный расчет позволяет получить

$$t = 0; \quad n = n_0;$$

$$t = \Delta t; \quad n = n_1 = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right);$$

$$t = 2\Delta t; \quad n = n_2 = n_1\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right) = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^2;$$

$$\ldots$$

$$t = N\Delta t; \quad n = n_N = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^N = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

Итак,

$$\frac{n(t)}{n_0} = \left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}}. \tag{7}$$

При этом должно выполняться неравенство $\frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t < 1$, или $\Delta t < \frac{6V}{\langle v\rangle S}$.

Численные эксперименты показали, что расчет $\frac{n(t)}{n_0}$ по формуле (7) практически не зависит от шага по времени Δt, если безразмерный шаг по времени

$$\Delta t_{\text{безразм}} = \frac{\Delta t}{M_t} < 10^{-2}.$$

Еще один вывод зависимости $n_0(t)$ приведен в работе [6].

$$\frac{n(t)}{n_0} = e^{-\frac{1}{6}\langle v\rangle\frac{S}{V}t}. \tag{8}$$

Расчет зависимости $\frac{n(t)}{n_0}$ по формулам (7) и (8) практически совпадает и приведен на рис. 11, при этом параметр S/V варьировался.

При исследовании эффузии методами математического моделирования установление решения в расчетной области наступает при времени расчета $t = 30$ единиц безразмерного времени. При ширине микротрещин $d = 10^{-4}$ м [6]

$$t_{\text{уст}} = t_{\text{безраз}} M_t \approx 7.5 \times 10^{-6} \text{ с}. \qquad (9)$$

Из (7) и (9) следует, что изменение концентрации в резервуаре в результате эффузии за время установления решения незначительно и им можно пренебречь.

Заключение. Математическое моделирование эффузии разреженного газа в вакуумное пространство позволило получить функции распределения истекающих частиц. Исследована эволюция этих функций в процессе установления решения. Получена зависимость функции распределения от координат (x, y). Вычислены моменты функций распределения: поля концентраций частиц и их скоростей. Сравнение полученных данных с результатами работ [5] и [6] показало удовлетворительное согласование.

Приведенные результаты математического моделирования эффузии газа в вакуумное пространство могут быть полезны разработчикам портативных приборов диагностики малых течей, используемых в вакуумной промышленности и в космической технике. Разработанный оригинальный программный код, основанный на кинетическом подходе к решению эффузионных задач, который сопровождается компьютерной графикой, позволяющей получить наглядное представление об исследуемых физических явлениях, может быть полезен специалистам в области математического моделирования, а также в учебном процессе.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарева В.Л.* Космонавтика в личном измерении. М.: Космоскоп, 2016. 386 с.
2. *Кубарев Ю.В.* Полеты на Марс, электрореактивные двигатели настоящего и будущего // Наука и технологии в промышленности. 2006. № 2. С. 19.
3. *Дэшман С.* Научные основы вакуумной техники. М.: Мир, 1964. 715 с.
4. *Саксаганский Г.Л.* Молекулярные потоки в сложных вакуумных структурах. М.: Атомиздат, 1980. 216 с.
5. *Ананьин А.А., Занин А.Н., Семкин Н.Д.* Моделирование процессов утечки газа из модуля космического аппарата // Измерительная техника. 2001. № 4. С. 29.
6. *Занин А.Н.* Устройство регистрации места утечки воздуха из модуля космической станции: Дисс.... к.т.н. СГАУ, 2009. 185 с.
7. *Нестеров С.Б., Васильев Ю.И., Андросов А.В.* Расчет сложных вакуумных систем. М.: МЭИ, 2001. 180 с.
8. *Нестеров С.Б., Асташина М.А., Незнамова Л.О., Васильев Ю.К.* Задачи и методы исследования среды разреженного газа вблизи космического аппарата // Вакуумная техника и технология. 2007. Т. 18. № 3. С. 183.
9. *Асташина М.А.* Молекулярные потоки в сложных объектах с учётом газовыделения поверхностей. Дисс.... к.т.н. М.: МЭИ, 2009. 156 с.
10. *Розанов Л.Н., Скрябнев А.Ю.* Течение газа через круглый трубопровод при больших перепадах давления // Вакуумная техника и технология. 2010. Т. 20. № 1. С. 3.
11. *Скрябнев А.Ю.* Вакуумметрический метод мониторинга герметичности крупных технических объектов. Дисс.... к.т.н. Санкт-Петербург. СПбГПУ, 2012. 146 с.

12. *Tang M.J., Cox R.A., Kalberer M.* Compilation and evaluation of gas phase diffusion coefficients of-reactive trace gases in the atmosphere: v. 1. Inorganiccompounds // Atmos. Chem. Phys. 2014. № 14. P. 9233.
13. *Krewinkel R.* A review of gas turbine effusion cooling studies // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. V. 66. P. 706.
14. *Schumacher J.C., Zupanc F.J.* Rodolphe Dudebout Segmented effusion cooled gas turbine engine combustor // US Patent US7546737B2, 2006.
15. *Wahlbeck P.G.* Effusion. VII. The Failure of Isotropy of a Gas in an Effusion Cell and the Transition Region // J. Chem. Phys. 2003. V. 55. № 1709 (1971).
16. *Malhotra M., Kumar S.* Thermal gas effusion from diamond-like carbon films // Diamond and Related Materials, 1997. V. 6. Iss. 12. P. 1830.
17. *Bronson T.J., Zupanc F.J., Yankowich P., Rudrapatna N.* Effusion cooled dual wall gas turbine combustors // US Patent US9897320B2, 2010.
18. *Iczkowski R.P., Margrave J.L., Robinson S.M.* Effusion of Gases through Conical Orifices // J. Phys. Chem. 1963. № 67. 2. P. 229.
19. *Котельников В.А., Ульданов С.В., Котельников М.В.* Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. М.: Наука, 2004. 422 с.
20. *Котельников В.А., Котельников М.В., Гидаспов В.Ю.* Математическое моделирование обтекания тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы. М.: Физматлит, 2010. 266 с.
21. *Котельников М.В., Котельников В.А., Морозов А.В.* Математическое моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с поперечным магнитным полем. М.: Издательство МАИ, 2015. 170 с.
22. *Котельников В.А., Гурина Т.А., Демков В.П., Попов Г.А.* Математическое моделирование электродинамики летательного аппарата в разреженной плазме. М.: Изд-во Нац. Акад. Прикл. Наук РФ, 1999. 255 с.
23. *Котельников М.В., Котельников В.А.* Усовершенствованный метод характеристик // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 85.
24. *Котельников М.В., Нгуен Суан Тхау*. Методика использования компьютерной графики в вычислительных экспериментах // Электронный журнал “Труды МАИ”. 2011. № 53.
25. *Савельев И.В.* Курс физики. М.: Наука, главная редакция физ. мат. Литературы. 1989. Т. 1. 352 с.