

УДК 531

**К РАСЧЕТУ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ
С ПОВТОРНЫМИ СОУДАРЕНИЯМИ (ДРЕБЕЗГОМ)**

© 2020 г. В. Л. Крупенин

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия
e-mail: krupeninst@yandex.ru*

Поступила в редакцию 15.09.2019 г.

Принята к публикации 31.01.2020 г.

Рассмотрена задача расчета параметров затухающих колебаний с соударениями двух систем с одной степенью свободы. Такие колебания могут сопровождаться виброударными процессами с повторными соударениями (режимами с дребезгом). Характер этих процессов зависит от принятых моделей диссипации энергии и конструктивных особенностей соударяющихся объектов. Даны соответствующие уравнения движения. Приводится методика построения законов движения, основанная на методе усреднения виброударных систем. Приведены примеры. Рассмотрения могут быть использованы, например, при расчете и анализе специфических явлений, возникающих в элементах коммутационных устройств, а также и в других системах, в частности, связанных с описанием вибрационных полей, генерируемых при посредстве ударов.

Ключевые слова: соударения, виброударная система, дребезг, время дребезга, контактная система, переменные “импульс-фаза”, модели диссипации, системы с релаксацией

DOI: 10.31857/S0235711920030074

1. В общем случае под режимами с повторными соударениями (режимами с дребезгом) понимают явления, заключающиеся в возникновении большого числа соударений контактирующих твердых тел после того, как произошел первый удар. В простейшем случае, если ограничиться рассмотрением прямого и центрального удара, указанное явление заключается во всем известном эффекте подпрыгивания монеты, которую на некоторой высоте отпустили над массивной металлической или каменной плитой.

С механической точки зрения дребезг возникает, когда соударяющиеся тела находятся в поле сил, которые возвращают их в точку контакта, в результате чего и происходят повторные соударения.

Известно, что в ряде случаев дребезг контактов наносит техническим объектам весьма принципиальный вред. Он может происходить и происходит, в частности, в многочисленных электромеханических коммутационных устройствах, приборах и аппаратах — кнопках, реле, герконах, переключателях, контакторах, магнитных пускателях и других системах. Эффект проявляется в том, что после одного замыкания происходят многократные повторные размыкания/замыкания контактов и они определенное время отскакивают друг от друга при возникающих соударениях, размыкая и вновь замыкая электрические цепи.

Это заметно снижает надежность устройств, вносит в их работу нежелательные искажения и может привести к преждевременным отказам и потери работоспособности

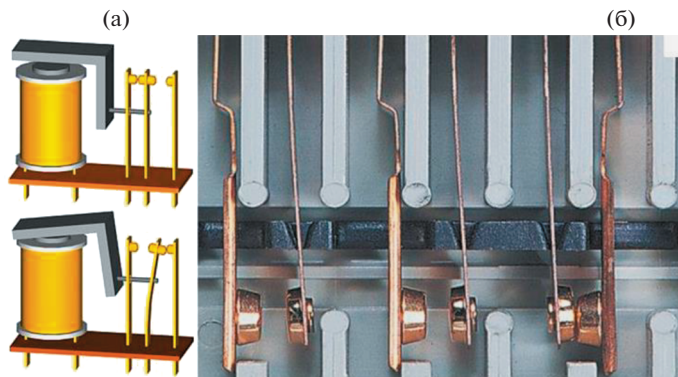


Рис. 1.

элементов оборудования. Например, коммутация достаточно мощных электроцепей может сопровождаться множественными зажиганиями и гашениями электрической дуги или возникновением искр, что вызывает быстрый износ контактов.

Использование электромеханических контактов из-за дребезга пагубно отражается на свойствах функциональности многих компонент электронных схем, а также приводит к сбоям некоторых типов цифровых устройств.

Важнейшими характеристиками дребезга являются импульсы ударного взаимодействия, число соударений от начала первого контакта до последнего (прекращения дребезжания), а также продолжительность (время) дребезга. Эти параметры зависят от конструктивных параметров систем. Времена дребезга варьируются от значений порядков 1–2 микросекунд у современных миниатюрных герконов до сотен миллисекунд у мощных контакторов.

Используемые методы борьбы с дребезгом основаны на аппаратных и алгоритмических методиках. Их описание широко представлено, например, в Интернете, особенно в связи с весьма широким распространением устройств, так или иначе связанных с платформой Arduino [1]. В основном указанные методы – паллиативны, не учитывают механику процессов и не могут быть вполне эффективными.

Математическое моделирование электромеханических контактов или им подобным систем, по-видимому, впервые провел Л.И. Мандельштам в своих знаменитых “Лекциях” [2]. Он рассмотрел систему, которую назвал “молоточком Н.Н. Андреева” и которая моделировала устройство для измерения амплитуды колебаний.

Проблема описания дребезга интересовала исследователей и здесь нельзя не отметить классические работы Р.Ф. Нагаева [3], который дал весьма полные и подробные описания явления дребезга для ряда нетривиальных механических задач.

В данной работе рассмотрены некоторые модельные аспекты проблемы и способы описания дребезга при помощи метода усреднения.

2. Типичный пример контактных систем, рассматриваемого типа показан на рис. 1.

На рис. 1а дана наиболее популярная схема, взятая с сайта “Заочник”. Реле электронного контроля “PMDsrange” компании “Pilz International”, Германия приведено на фото рис. 1б.

В качестве основной рабочей модели возьмем систему, показанную на рис. 2а.

На концах упругих невесомых балочек (пружин) закреплены соударяющиеся точечные тела с массами m_1 и m_2 [4]. Предположение о точечности тел обозначает, что всеми их геометрическими параметрами можно пренебречь по сравнению с величиной

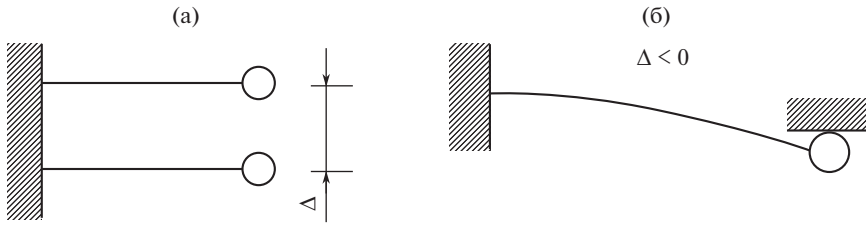


Рис. 2. Примеры рабочих моделей: (а) – система с зазором ($\Delta \geq 0$; две степени свободы); (б) – система с предварительным натягом ($\Delta < 0$; одна степень свободы).

зазора $\Delta \geq 0$ (отрицательные значения величины Δ соответствуют предварительному натягу).

Уравнения движения системы в отсутствии постоянно действующих сил внешнего возбуждения имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + \Phi(x, \dot{x}) = -B_1(p; x_1); \quad m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - \Phi(x, \dot{x}) = -B_2(p; x_2). \quad (1)$$

Здесь x_1 и x_2 – координаты соударяющихся тел; $x = x_1 - x_2$ – относительная координата. Соударения происходят при $x = \Delta$. Через $B_1(p; x_1)$ и $B_2(p; x_2)$ обозначены операторные функции $p \equiv d/dt$, описывающие диссипацию энергии в системах без учета потери энергии при ударах. Здесь можно учесть не только стандартные факторы, приводящие к использованию моделей вязкого трения, но и обстоятельства, связанные с внутренними несовершенствами и особенностями материала балочек (пружин). Например, они могут находиться в оплетках, выполненных из полимерных материалов.

В уравнениях (1) фигурирует еще сила удара $\Phi(x, \dot{x})$, зависящая от относительных координаты и скорости. Пусть удар Ньютонский, и происходит в некоторый произвольный момент времени $t = t_\alpha$ тогда $\dot{x}(t_\alpha - 0) = -R\dot{x}(t_\alpha + 0)$; $0 < R \leq 1$ и $\Phi(x, \dot{x}) = \Phi_0(x, \dot{x}) + (1 - R)\Phi_1(x, \dot{x})$, где Φ_0 и $(1 - R)\Phi_1$ – упругая и диссипативная составляющая силы удара, записываемые через обобщенные функции. Для каждого удара можно записать [5, 6]

$$\Phi|_{t=t_\alpha} = J\delta(t - t_\alpha); \quad J = (1 + R)|\dot{x}(t_\alpha - 0)|,$$

где J – импульс удара; $\delta(t)$ – δ -функция; t_α – момент некоторого α -го удара; $0 < R \leq 1$ – коэффициент восстановления.

К уравнениям (1) должны быть добавлены начальные условия.

На практике многие коммутационные системы, в которых имеет место дребезг, обладают регулярной или квазирегулярной структурой. То есть для нашей модели $m_1 \approx m_2$; $c_1 \approx c_2$. Также распространены устройства, для которых $m_1 \gg m_2$. В обоих случаях моделирование сводится к исследованию системы с одной степенью свободы.

В первом случае, предположив, что операторы $B_1(p; x_2)$ и $B_2(p; x_2)$ – линейны, вычтем из первого уравнения (1) второе. Имеем

$$m_0 \ddot{x} + c_0 \dot{x} + 2\Phi(x, \dot{x}) = -B_0(p; x),$$

где в рассматриваемом приближении при $m_0 = m_1 = m_2$; $c_0 = c_1 = c_2$, $B_0 = B_1 = B_2$ и учтена линейность операторов B_1 и B_2 .

Окончательно запишем

$$m\ddot{x} + cx + \Phi_0(x, \dot{x}) + \epsilon r\Phi_1(x, \dot{x}) = -\epsilon B(p; x), \quad (2)$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр; $1 - R \equiv r$. Смысл обозначений очевиден и сделано предположение о малости уровня диссипации.

Таким образом модель процесса описывается посредством системы с одной степенью свободы, определяющая координата которой является относительной координатой, а все гладкие члены уравнения движения вдвое меньше исходных.

Проведем анализ именно модели (2). В случае $m_1 \gg m_2$ модель аналогична. Здесь $m = m_2$, так как можно считать $m_1 \rightarrow \infty$ и задача сводится к анализу динамики ударного осциллятора, взаимодействующего с неподвижным ограничителем (рис. 2б, здесь $\Delta < 0$).

3. Проанализируем уравнение (2) с помощью метода усреднения в виде, который применительно к виброударным системам был предложен и алгоритмизирован в работе [7] и развит в книгах [5, 6, 8]. Изложим кратко схему методики построения первого приближения.

Предположим, что вырожденная (консервативная) система имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0,$$

где учтено, что $\Phi(x, \dot{x}) = \Phi_0(x, \dot{x}) + (1 - R)\Phi_1(x, \dot{x})$.

Решение задачи в вырожденном случае хорошо известно и изучено [4, 5]

$$x(t) = -J\chi(t - \varphi); \quad \chi(t) = \frac{1}{2\Omega} \frac{\cos\left(\Omega t - \frac{T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}, \quad 0 < t \leq T,$$

$$J = -2\Omega\Delta \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Omega T \geq 0; \quad (3)$$

$$\chi(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik\omega t)}{\Omega^2 - k^2\omega^2}.$$

Здесь и далее $\Omega = \sqrt{cm^{-1}}$ – собственная частота соответствующего линейного осциллятора.

Вторая формула (3) имеет место только при $0 < t \leq T$, а при t вне этого промежутка должно быть произведено продолжение по периодичности или использовано представление в виде ряда Фурье (пятая формула (3)). Импульс удара J – по определению неотрицателен. В консервативной системе он определяется из условия удара $x(0) = \Delta$. Удар в силу автономности системы совмещен здесь с началом отсчета времени.

Осуществим переход к фазовым переменным “импульс-фаза” $(x, \dot{x}) \rightarrow (J, \psi)$ в соответствии с формулами

$$x = -J\chi[\psi, \omega(J)], \quad \dot{x} = -J\omega(J)\chi_\psi[\psi, \omega(J)]. \quad (4)$$

При этом $\omega(J) = 2\pi T^{-1}(J)$ и из четвертого соотношения (3) можно получить

$$\omega(J) = \frac{\pi\Omega}{\pi - \arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega < 2\Omega,$$

$$\omega(J) = -\frac{\pi\Omega}{\arctg[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega < \infty, \quad (5)$$

$$\omega(J) = 2\Omega = \operatorname{const}, \quad \Delta = 0.$$

Системы с зазором – жестко анизохронны, с натягом – мягко анизохронны, с нулевым зазором – изохронны. Первая вновь введенная переменная J (импульс) – мед-

ленная, а переменная ψ (фаза) – быстрая. После ряда преобразований, для новых переменных можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\varepsilon\omega(J)\{rJ\delta^{2\pi}(\psi) + 4B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\chi_{\psi}[\psi, \omega(J)]\}, \\ \dot{\psi} &= \omega(J)\{1 + 4\varepsilon J^{-1}B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\}\{\chi[\psi, \omega(J)] + J\chi_{\omega}[\psi, \omega(J)]\omega'(J)\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где обобщенная функция $\delta^{2\pi}(\psi)$ – 2π -периодическая последовательность δ -функций [5, 6].

Для получения медленно изменяющейся эволюционной составляющей процесса достаточно усреднить по быстрой фазе первое уравнение (6). Пусть начальные условия выглядят так: $x(0) = \Delta$, $J = J_0 > 0$. Усредняя первое уравнение (6), после ряда вычислений можно получить “укороченное” уравнение вида

$$\dot{J} = \varepsilon E_1(J) \equiv -\varepsilon \left\{ rT^{-1}(J)J + 4 \int_0^{T(J)} B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\chi_{\psi}[\psi, \omega(J)]d\psi \right\}, \quad (7)$$

причем зависимость $T(J) = 2\pi/\omega(J)$ устанавливается при помощи соотношений (5). В первом приближении второе уравнение может не использоваться [8].

Таким образом, рассматривая различные модели трения, можно оценить параметры режима с затухающими соударениями.

4. Рассмотрим вначале случай, когда $B = 0$ и на процесс влияет только потеря энергии при соударениях. То есть $r \neq 0$ ($R < 1$). Из уравнения (7) и первого соотношения (5) находим при $\Delta > 0$

$$\dot{J} = -\frac{\varepsilon r J \Omega}{2\{\pi - \text{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]\}}, \quad (8)$$

где приняты во внимание неравенства, входящие в первое соотношение (5).

Уравнение (8) – уравнение с разделяющимися переменными. Для упрощения задачи заметим, что единственному стационарному режиму соответствует прекращение соударений – обращение импульса удара в ноль: $J = J_0 = 0$. Этот режим – асимптотически устойчив, поскольку при малом возмущении стационарного режима δJ уравнение в вариациях и его решение примут вид

$$\delta \dot{J} = -\frac{1}{2}\varepsilon r \Omega \delta J; \quad \delta J = \delta J_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon r \Omega t\right). \quad (9)$$

Время возвращения системы на незатухающие свободные синусоидальные колебания (время прекращения виброударного процесса, сопровождаемого дребезгом) – в такой модели бесконечно.

Если система имеет предварительный натяг и $\Delta < 0$, то имеется мягкий анизохронизм и действует второе соотношение (5). В этом случае уравнение (7) при $B = 0$ принимает вид

$$\dot{J} = -\frac{\varepsilon r J \Omega}{2\{\text{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]\}}. \quad (10)$$

В данном случае стационарное решение отсутствует, поскольку при $J \sim 0$ $\dot{J} > 0$. Считая импульс малым, линеаризуем уравнение (10)

$$\dot{J} = \varepsilon r \Omega^2 \Delta = -\varepsilon r \Omega^2 |\Delta|; \quad J(t) = J_0 - \varepsilon r \Omega^2 |\Delta| t, \quad J_0 \sim \varepsilon. \quad (11)$$

Теперь можно оценить время дребезга (t_D)

$$t_D = J_0(\varepsilon r \Omega^2 |\Delta|)^{-1}. \quad (12)$$

В данном случае при $J \rightarrow 0$: $\omega(J) \rightarrow \infty$, $T(J) \rightarrow 0$. Следовательно за время t_D должно произойти бесконечное число соударений. Р.Ф. Нагаев называл такое динамическое явление квазипластическим ударом [3]. Квазипластический удар – прямой результат идеализации, вносимой гипотезой Ньютона, предполагающей мгновенность ударного взаимодействия.

5. Пусть $\Delta > 0$. Рассмотрим теперь случай $B(p; x) \neq 0$. Поскольку численный анализ основного уравнения (7) не представляет труда при любой модели диссипации энергии, а наша цель – качественный аналитический анализ моделей дребезга, положим теперь $R = 1$, т.е. будем считать соударения упругими и в качестве механизма диссипации выберем вязкое трение: $B(p; x) = 2bpx \equiv 2b\dot{x}$; $b > 0$. Тогда, используя (3), (7), а также вычисления, проведенные в [5, 6] можно получить после интегрирования

$$\dot{J} = -\varepsilon J b (4\Omega^2 \Delta^2 J^{-2} + 1) \{1 - [\Omega T(J)]^{-1} \sin[\Omega T(J)]\} \equiv \varepsilon E_1(J). \quad (13)$$

Анализ уравнения (13) сведется к интегралу, невыражаемому через элементарные функции и это уравнение не допускает стационарного решения, поскольку $E_1(J) < 0$.

Проведем оценку времени дребезга. Пусть импульс соударений достаточно мал. Например, начальный импульс для уравнения (13) $J_0 \sim \sqrt{\varepsilon}$. Тогда, оценивая функцию $E_1(J)$, можно показать, что $E_1(J) = -4\varepsilon \Omega^2 \Delta^2 b J^{-1} + \varepsilon^2 \dots$ и, подставляя это выражение в (13), находим

$$J(t) = \sqrt{J_0^2 - 8\varepsilon \Omega^2 \Delta^2 b t}; \quad t_D = J_0^2 (8\varepsilon \Omega^2 \Delta^2 b)^{-1}. \quad (14)$$

Причем время дребезга определяется из условия неотрицательности подкоренного выражения. Данная система – жестко анизохронна и период стремится к конечной величине с уменьшением импульса, поэтому число соударений, приходящихся на время t_D – конечно. Рассмотрим случай, когда потери энергии происходят за счет учета свойств материала соударяющихся тел, например, балочки (пружины) (рис. 2) имеют полимерную оплетку. Тогда в уравнении (2)

$$-B(p; x) = \int_{-\infty}^t \Gamma(t-s)x(s)ds,$$

где $\Gamma(t)$ – ядро релаксации [9, 10], параметры которого определяются характеристиками материала балочки с полимерной оплеткой.

Правая часть уравнения (7)

$$\begin{aligned} \varepsilon E_1(J) &\equiv -4\varepsilon \int_0^{T(J)} B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)]) \chi_\psi[\psi, \omega(J)] d\psi = \\ &= 4\varepsilon J \int_0^{T(J)} \int_0^\infty \Gamma(s) \chi[\psi, \omega(J)] ds \chi_\psi[\psi, \omega(J)] d\psi. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла возьмем форму записи функции $\chi[\psi, \omega(J)]$, определяющую решение (3) в форме бесконечного ряда. Используя вычисления, проведенные ранее в [5, 6], можно получить

$$\varepsilon E_1(J) = -4\varepsilon J \omega^3 \frac{\tilde{\Gamma}_s(\omega)}{\pi^2 (\Omega^2 - \omega^2)^2} + \dots, \quad (15)$$

где многоточие обозначает члены высоко порядка малости, а $\tilde{\Gamma}_s(\omega) = \int_0^\infty \Gamma(s) \sin \omega s ds$ – синус-преобразование Фурье ядра релаксации. Диссипативные свойства материала определяются именно этой величиной [9].

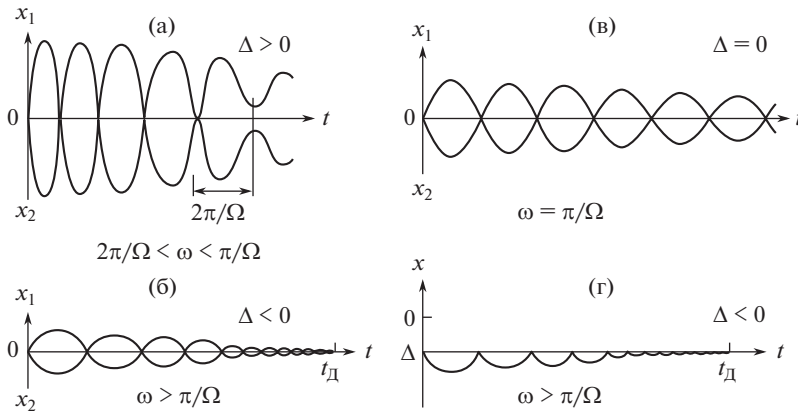


Рис. 3.

Дальнейшее зависит от конкретного вида ядра релаксации, поскольку именно оно определяет правую часть уравнения (7). Подробные рассмотрения здесь невозможны. В любом случае качественно здесь принципиально возможен переход на безударный режим по типу уравнения (8), когда существует стационарное решение $J = 0$, или по типу (13) когда стационарного решения нет. В первом случае модель даст бесконечное время затухания режима с соударениями, во втором – некоторое конечное время дребезга $t_{Д}$.

Совершенно аналогично рассматриваются и другие случаи действия диссипативных механизмов, а также не рассмотренные случаи комбинации этих механизмов.

Если исходная система близка к изохронной, т.е., если $\Delta = 0$ или $\Delta \approx 0$, усредненные уравнения (6) принимают особенно простой вид. Пусть в системе действуют вязкое трение и учитываются потери энергии при ударе. Тогда, с учетом третьего соотношения (5) $\dot{J} = -\epsilon(r\Omega\pi^{-1} + b)J$; $\dot{\psi} = 2\Omega$.

Следовательно, для изохронной системы с нулевым зазором или для квазиизохронной системы, когда $\Delta \sim \epsilon$, $J(t) = J_0 \exp[-\epsilon(r\Omega\pi^{-1} + b)t]$, $\psi(t) = 2\Omega t$.

6. Таким образом, можно, используя вид замены переменных (4), получить представление для закона изменения относительной координаты $x(t) = -J(t)\chi[t, \omega(J)]$, где функция χ определяется при помощи второго или пятого соотношения (3).

Учитывая предпосылки, при которых выводилось уравнение движения (2), можно получить законы движения $x_1(t)$ и $x_2(t)$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}J(t)\chi[t, \omega(J)]; \quad x_2(t) = \frac{1}{2}J(t)\chi[t, \omega(J)].$$

Эскизы соответствующих графиков даны на рис. 3а, б, в. В верхних полуплоскостях показаны законы движения $x_1(t)$, в нижних – $x_2(t)$. Ось симметрии соответствует точкам контакта.

Характер изменения относительной координаты $x(t)$ показан на рис. 3г. Здесь взят случай бесконечноударного процесса конечной продолжительности при $\Delta < 0$ (12).

Такой же характер движения будет носить и при соударениях некоторого тела с неподвижным ограничителем или телом очень большой массы (п. 2).

Приведенные соотношения дают простые формулы и их можно использовать при проведении “прикидочных” расчетов конкретных систем, например, реле или других

контактных и коммуникационных устройств. Более сложные задачи, конкретизирующие характер возможных движений, могут быть рассмотрены при использовании численных методик.

В связи с проведенными рассмотрениями отметим важную проблему описания характеристик глобальных вибрационных полей [11, 12], генерируемых виброударными и редкоударными процессами с дребезгами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

При поддержке проекта РФФИ (проект № 18-08-00168).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ревич Ю.В.* Азбука электроники. Изучаем Arduino. М.: АСТ: Кладезь, 2017. 224 с.
2. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 466 с.
3. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
4. *Кобринский А.А.* Механизмы с упругими связями. М.: Наука, 1964. 292 с.
5. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1972. 390 с.
6. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 404 p.
7. *Бабицкий В.И., Ковалева А.С., Крупенин В.Л.* Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 1. С. 41.
8. *Бурд В.Ш., Крупенин В.Л.* Усреднение в квазиконсервативных системах. М.: Белый Ветер, 2016. 172 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
10. *Илюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. *Erofeev V.I., Pavlov I.S., Leontiev N.V.* A Mathematical Model for Investigation of Nonlinear Wave Processes in a 2D Granular Medium Consisting of Spherical Particles // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2013. V. 4. № 3. P. 239.
12. *Крупенин В.Л.* Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 9.