ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 36–44

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО РЕСУРСА

Г. С. Садыхов[1],*, С. С. Кудрявцева[1]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*
**e-mail: gsadykhov@gmail.com*

Поступила в редакцию 31.07.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

На надежность сложных технических объектов влияет не только длительность безотказной наработки (непрерывный ресурс), но и число безотказных срабатываний типа “включен” объект в работу или “выключен” из нее (дискретный ресурс). Настоящая статья написана с целью частично восполнить этот пробел.

Ключевые слова: средний дискретный ресурс, интенсивность отказов, гамма-процентный дискретный ресурс, геометрический закон распределения ресурса

DOI: 10.31857/S0235711920030116

Анализ отказов технических объектов, работающих в режиме многократного циклического применения, показывает, что доля отказов при частых срабатываниях (типа объект “включен” в нагруженный режим работы или “выключен” из нее) составляет значительную часть в общем потоке отказов и она сопоставима с долей отказов в непрерывном режиме эксплуатации [1, 2]. В существующей обширной литературе по надежности отсутствуют теоретические основы дискретного ресурса.

Попытки найти способ заменить один цикл срабатываний “включено/выключено” на эквивалентную длительность непрерывной работы объекта не привели к успеху [3–7].

Помимо сложных систем, работающих в режиме многократного циклического применения, для ряда технических объектов ресурс определяют только по определенному количеству безотказных срабатываний. Так, для переключателей – это число безотказных переключений, для поршневых насосов – это число безотказных циклов, содержащих срабатывания “сжатие” и “разжатие”, для ламп вспышек – это число безотказных вспышек и т.д.

Определение предельных циклов в результате допустимых нагрузок является одним из основных факторов для обоснования величины назначенного ресурса и срока безопасной эксплуатации объекта [8, 9].

Средний дискретный ресурс. Пусть ζ – число срабатываний объекта до отказа. Тогда средний дискретный ресурс определяется по формуле

$$r = E(\zeta), \qquad (1)$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Для расчета среднего дискретного ресурса объекта справедлива формула

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \qquad (2)$$

где

$$P_k = P_r(\zeta \geq k+1) \tag{3}$$

— вероятность того, что k срабатываний объекта будет безотказно (здесь $P_r(\cdot)$ — вероятность события, заключенного внутри скобок).

Доказательство. Согласно определению математического ожидания (1) имеем

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta = n).$$

Так как $P_r(\zeta = n) = P_r(\zeta \geq n) - P_r(\zeta \geq n+1)$, то $r = \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta \geq n+1)$.

Откуда найдем $r = 1P_r(\zeta \geq 1) + \sum_{k=2}^{\infty} k P_r(\zeta \geq k) - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)P_r(\zeta \geq k)$.

Объединяя два ряда в один, получим

$$r = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}(k-(k-1))P_r(\zeta \geq k). \tag{4}$$

Откуда имеем $r = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} P_r(\zeta \geq k)$. Так как $1 + \sum_{k=2}^{\infty} P_r(\zeta \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P_r(\zeta \geq k+1)$, то, согласно (3), получим искомую формулу (2), что и доказывает теорему.

Замечание 1. Выражение (4) позволяет определить размерность среднего ресурса, которая равна числу срабатываний.

Замечание 2. Доказанная формула (2) имеет аналог формулы расчета среднего непрерывного ресурса $\rho = \int_0^{\infty} P(t)\,dt$, где $P(t)$ — вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Пример 1. Пусть число безотказных срабатываний объекта имеет следующий закон распределения вероятностей ($P_r(\zeta = k) = p^{k-1}q$):

$$\begin{array}{cccccccc} \zeta & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots, \\ P_r & q & pq & p^2q & \ldots & p^{k-1}q & \ldots, \end{array} \tag{5}$$

где p — вероятность безотказности объекта при каждом срабатывании, $q = 1 - p$, $(0 < q < 1)$. Рассчитать средний дискретный ресурс объекта.

Решение. Согласно (3), имеем $P_k = p^k q + p^{k+1}q + \ldots$.

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем, равным p, получим

$$P_k = p^k. \tag{6}$$

Используя полученную формулу (6) в (2), имеем $r = \sum_{k=0}^{\infty} p^k$.

Отсюда, суммируя ряд, находим средний дискретный ресурс объекта для закона (5), равный

$$r = \frac{1}{q}. \tag{7}$$

Интенсивность отказов. Пусть n — число срабатываний объекта, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Обозначим через

$$R_n = P_r\left[(\zeta = n)/(\zeta \geq n)\right] \tag{8}$$

условную вероятность отказа объекта в результате n-го срабатывания при условии, что до этого срабатывания отказа не было.

Определение. Интенсивностью отказа объекта в результате n-го срабатывания λ_n назовем отношение величины (8) к единице срабатывания, т.е.

$$\lambda_n = P_r\left[(\zeta = n)/(\zeta \le n)\right](\text{ср.})^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Используя известную формулу для условной вероятности

$$P_r(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \tag{10}$$

где события A: $(\zeta = n)$; B: $(\zeta \ge n)$, из (8) получим $R_n = \dfrac{P_r(\zeta = n)}{P_r(\zeta \ge n)}$.

Подставляя полученное выражение в (9), найдем формулу расчета интенсивности отказов при n-м срабатывании объекта

$$\lambda_n = \frac{P_r(\zeta = n)}{P_r(\zeta \ge n)}(\text{ср.})^{-1}, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Для краткости, единицу измерения интенсивности отказов приводить не будем.

Из формулы (11) видно, что

$$0 \le \lambda_n \le 1, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

При рассмотрении оценки (12) возникает вопрос: достижима ли правая часть оценки для какого-то закона распределения безотказных срабатываний?

Покажем, что если ζ – число безотказных срабатываний объекта имеет любое конечное распределение

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & m, \\ P_r & \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_i & \ldots & \Phi_m, \end{array}$$

где $\Phi_i = P_r(\zeta = i)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то интенсивность отказов объекта при последнем срабатывании равна единице, т.е. $\lambda_m = 1$.

Согласно (11) находим $\lambda_m = \dfrac{\Phi_m}{\Phi_m} = 1$, что доказывает достижимость правой части оценки (12); левая часть оценки (12) – очевидна.

Известно, что традиционный показатель “интенсивность отказов объекта в момент времени t” для объектов с непрерывным распределением ресурса определяется по формуле

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}, \tag{13}$$

где $f(t)$ – плотность распределения безотказной наработки, равная $f(t) = -P'(t)$, где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Видно, что формула (11) расчета интенсивности отказов в результате n-го срабатывания, равная λ_n, не является следствием формулы (13).

Простейшая модель расходования дискретного ресурса. Пусть вероятность того, что каждое срабатывание объекта будет безотказно, равна p, $(0 < p < 1)$, тогда вероятность отказа объекта при n-м срабатывании, согласно теореме умножения независимых событий, равна

$$P_r(\zeta = n) = p^{n-1}q, \tag{14}$$

где $q = 1 - p$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Поскольку выражение (14) — это общий член геометрической прогрессии: $q, pq, p^2 q, \ldots, p^{k-1} q, \ldots$, то модель расходования ресурса (14) называют геометрическим законом.

Теорема 2. Для того, чтобы модель расходования дискретного ресурса подчинялась геометрическому закону (14), необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов при всех срабатываниях объекта была бы тождественна постоянной и удовлетворяла условия

$$\lambda_n \equiv q, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

где q — вероятность отказа объекта при каждом срабатывании, $(0 < q < 1)$.

Доказательство. Докажем необходимость условия (15) для закона (14).

Используя формулы (3) и (6), при $k = n - 1$ имеем $P_r(\zeta \geq n) = p^{n-1}$.

Следовательно, согласно формуле (11), с учетом (14), получим $\lambda_n \equiv q$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, что доказывает необходимость условия (15) для модели расходования дискретного ресурса (14).

Докажем достаточность условия (15), а именно из условия (15) следует, что закон расходования дискретного ресурса имеет вид (14).

Так как $P_r(\zeta = n) = P_{n-1} - P_n$, где правая часть определена соотношением (3) при $k = n - 1$ и $k = n$, то, с учетом (6), получим формулу (14), что доказывает достаточность условия (15).

Теорема 2 имеет аналог для непрерывного ресурса.

Утверждение. Для того, чтобы модель расходования ресурса подчинялась экспоненциальному закону, плотность распределения безотказных наработок которых равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{16}$$

где $\lambda > 0$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(t)$ — интенсивность отказов была тождественно равной постоянной и удовлетворяла условию $\lambda(t) \equiv \lambda$.

Для экспоненциального закона, плотность распределения которого равна (16), средний ресурс рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \tag{17}$$

Сравнивая формулу (7) с формулой (17), видим, что формула (7) является аналогом формулы (17). Другими словами, формулы расчета средних значений дискретного и непрерывного ресурсов через интенсивности отказов обоих законов одинаковы.

Теорема 3. Пусть k и m — целые положительные числа. Тогда для геометрического закона распределения ресурса вероятность безотказной работы объекта при срабатывании от $k + 1$ до $k + m$ не зависит от числа предшествующих срабатываний k, а зависит только от последующего количества срабатываний m.

Доказательство. Пусть ζ — число безотказных срабатываний объекта, имеющее геометрический закон распределения ресурса. Тогда вероятность отказа объекта при срабатываниях от $k + 1$ до $k + m$ (в предположении, что объект проработал безотказно до этого) равна $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right] / \zeta \geq k+1\right]$.

Используя формулу (10), получим

$$P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right] / \zeta \geq k+1\right] = \frac{P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right]\right]}{P_r(\zeta \geq k+1)}. \tag{18}$$

Так как $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = P_r(\zeta = k+1) + P_r(\zeta = k+2) + \ldots + P_r(\zeta = k+m)$, то используя (14), имеем

$$P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = p^k q(1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}). \tag{19}$$

Учитывая известное соотношение $1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1} = \dfrac{1-p^m}{1-p}$ в правой части (19), получим $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = p^k(1-p^m)$. Подставляя полученное выражение в (18), найдем $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = 1 - p^m$, так как, согласно (3) и (6), $P_r(\zeta \geq k+1) = p^k$.

Следовательно, вероятность безотказной работы объекта при срабатываниях от $(k+1)$ до $(k+m)$ (в предположении, что объект проработал безотказно при срабатываниях до этого) равна p^m, т.е.

$$P_r\left[\zeta \overline{\in} \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = p^m. \tag{20}$$

Поскольку правая часть (20) не зависит от числа предшествующих срабатываний k, то доказательство теоремы завершается.

В частности, при $k = 0$, согласно (20), имеем

$$P_r(\zeta \geq m+1) = p^m, \tag{21}$$

т.е. безусловная вероятность безотказной работы объекта в результате m срабатываний равна p^m.

Учитывая (21) в (20), получим

$$P_r\left[\zeta \overline{\in} \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = P_r(\zeta \geq m+1),$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Видно, что все условные вероятности безотказной работы объекта при срабатываниях от $(k+1)$ до $(k+m)$ (в предположении, что объект проработал безотказно при срабатываниях до этого) равны безусловной вероятности безотказной работы объекта в результате m срабатываний.

Другими словами, для геометрического закона безотказная работа объекта “в прошлом” не сказывается на величине вероятностей его безотказной работы в “в будущем”.

Теорема 3 имеет аналог в классе непрерывных распределений ресурса.

Утверждение. Пусть η — наработка до отказа объекта, имеющая экспоненциальное распределение (16). Тогда условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(t_0, t_0 + t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале $(0, t_0)$, равна

$$P_r\left[(\eta \overline{\in} (t_0, t_0 + t))/\eta > t_0\right] = e^{-\lambda t}.$$

Правая часть не зависит от времени t_0 предшествующей работы объекта до начала рассматриваемого интервала времени, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивности отказов λ).

Выражение вероятности безотказной работы через интенсивности отказов. Для моделирования надежности важно знать связь характеристик надежности через интенсивности отказов.

Теорема 4. Пусть P_k — вероятность безотказной работы объекта в результате k срабатываний. Тогда справедлива формула

$$P_k = \prod_{i=1}^{k} (1 - \lambda_i), \tag{22}$$

где λ_i — интенсивность отказов объекта при i-м срабатывании, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Используя формулу (11), найдем

$$1 - \lambda_i = \frac{P_r(\zeta \geq i + 1)}{P_r(\zeta \geq i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

С учетом (3), получим рекуррентную формулу

$$P_i = (1 - \lambda_i) P_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{23}$$

Так как $P_0 = 1$, то

$$P_1 = 1 - \lambda_1. \tag{24}$$

Для выражения вероятности воспользуемся формулами (23) и (24), откуда получим

$$P_2 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2). \tag{25}$$

Для выражения вероятности P_3 воспользуемся формулами (23) и (25), откуда имеем $P_3 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)$.

Продолжая и далее этот процесс, найдем $P_k = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\ldots(1 - \lambda_k)$, что доказывает формулу (22) и тем самым теорему.

Доказанная формула (22) имеет непрерывный аналог, а именно: пусть $\lambda(u)$ — интенсивность отказов, тогда вероятность безотказной работы объекта в течение времени t вычисляется по формуле

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right). \tag{26}$$

При малых значениях интенсивностей отказов λ_i формуле (22) можно придать более схожий вид с формулой (26) $P_k = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \ln(1 - \lambda_i)\right)$, откуда получим приближенную формулу

$$P_k \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right), \tag{27}$$

поскольку при малых значениях λ_i, $\ln(1 - \lambda_i) \approx -\lambda_i$.

Сравнивая формулы (26) и (27), видим их схожесть.

Формулы (22) и (26) позволяют моделировать надежность.

Пример 2. Пусть интенсивность отказов при срабатываниях объекта равны следующим значениям: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = q$, $\lambda_k = 1$, где $0 < q < 1$. Необходимо найти закон распределения вероятностей для числа срабатываний объекта до отказа ζ и доказать, что события

$$\zeta = 1, \quad \zeta = 2, \quad \zeta = 3, \quad \ldots, \quad \zeta = k - 1, \quad \zeta = k \tag{28}$$

образуют полную группу.

Решение. Согласно формуле (22) имеем

$$P_1 = p, \quad P_2 = p^2, \quad P_3 = p^3, \quad \ldots, \quad P_{k-1} = p^{k-1}, \quad P_k = 0, \tag{29}$$

где $p = 1 - q$.

Для первого значения случайной величины ζ получим $P_r(\zeta = 1) = P_r(\zeta \geq 1) - P_r(\zeta \geq 2)$. Так как правая часть равна $1 - P_1$, то, согласно (29), имеем $P_r(\zeta = 1) = q$.

Для второго значения случайной величины ζ получим $P_r(\zeta = 2) = P_r(\zeta \geq 2) - P_r(\zeta \geq 3)$. Поскольку правая часть равна $P_1 - P_2$, то, согласно (29), имеем $P_r(\zeta = 2) = pq$.

Продолжая и далее этот процесс, найдем

$$P_r(\zeta = k-1) = p^{k-2}q,$$
$$P_r(\zeta = k) = P_{k-1} - P_k.$$

Т.к. правая часть второго равенства, согласно (29), равна p^{k-1}, то имеем

$$P_r(\zeta = k) = p^{k-1}.$$

Следовательно, число срабатываний объекта до отказа ζ имеет следующий закон:

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & 1 & 2 & 3 & \ldots & k-1 & k, \\ P_r & q & pq & p^2q & \ldots & p^{k-2}q & p^{k-1}. \end{array}$$

Видно, что найденный закон является усеченным полного геометрического закона.

Докажем, что события (28) образуют полную группу. Для этого надо показать, что сумма вероятностей всех принимаемых значений ζ равна единице.

В самом деле, $q + pq + p^2q + \ldots + p^{k-2}q + p^{k-1} = q\dfrac{1-p^{k-1}}{1-p} + p^{k-1} = 1.$

Гамма-процентный дискретный ресурс. Пусть задано значение γ, $(0 < \gamma < 1)$. Определим целые числа m, для которых

$$P_m \geq \gamma, \tag{30}$$

где P_m – вероятность того, что m срабатываний объекта будут безотказны.

Определение. Гамма-процентным дискретным ресурсом будем называть наибольшее целое число срабатываний m_γ, которое удовлетворяет оценке (30), т.е.

$$m_\gamma = \max(m/P_m \geq \gamma). \tag{31}$$

В некоторых случаях уровень γ можно задавать не в долях единицы, а в процентах, отсюда и название этого показателя.

Для непрерывного ресурса гамма-процентный ресурс t_γ определяют из уравнения $P(t) = \gamma$, как решение уравнения относительно t, где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Пример 3. Для геометрического закона распределения ресурса (14) найдем формулу расчета гамма-процентного дискретного ресурса.

Решение. Используя форму (6) в оценке (30), получим $p^m \geq \gamma$.

Логарифмируя, имеем $m \ln p \geq \ln\gamma$, отсюда $m \leq \dfrac{\ln\gamma}{\ln p}$, поскольку $\ln p < 0$ при $0 < p < 1$.

Следовательно, согласно определению гамма-процентного дискретного ресурса (31), найдем искомую формулу

$$m_\gamma = \left[\frac{\ln\gamma}{\ln p}\right], \tag{32}$$

где $[\cdot]$ – целая часть выражения, стоящая внутри скобок.

Заметим, что формула расчета гамма-процентного ресурса для экспоненциального закона распределения равна

$$t_\gamma = \frac{-\ln\gamma}{\lambda}, \tag{33}$$

где $\lambda > 0$ – интенсивность отказов.

Видно, что формула (32) является аналогом формулы (33).

Оценка среднего дискретного ресурса. Покажем, что для целой части среднего дискретного ресурса r справедлива формула

$$[r] = m_\gamma, \tag{34}$$

где $\gamma = P_{[r]}$.

Согласно (31), имеем $m_{P_{[r]}} = \max\left(m/P_m \ge P_{[r]}\right)$.

Для правой части получим $\max\left(m/P_m \ge P_{[r]}\right) = \max\left(m/m \le [r]\right) = [r]$, что доказывает (34).

Так как при больших значениях r уровень γ, равный $P_{[r]}$, мал, то использовать формулу (34) затруднительно, поскольку потребуется большой объем выборки для проведения ресурсных испытаний. Тогда возникает вопрос: как оценить средний дискретный ресурс в этом случае?

В связи с этим, докажем утверждение, которое свободно от этого недостатка.

Теорема 5. Для среднего дискретного ресурса справедлива достижимая оценка

$$r \ge \gamma\left(1 + m_\gamma\right), \tag{35}$$

где γ – заданный уровень, $(0 < \gamma \le 1)$; m_γ – гамма-процентный дискретный ресурс.

Доказательство. Используя формулу (2), имеем

$$r \ge \sum_{k=0}^{m_\gamma} P_k. \tag{36}$$

Из определения показателя, согласно (30), при $k \le m_\gamma$, получим $P_k \ge \gamma$.

Учитывая это неравенство в (36), найдем искомую оценку (35).

Докажем, что оценка (35) достижимая, т.е. существует хотя бы один закон распределения безотказных срабатываний ζ, для которого левая и правая части (35) равны.

В связи с этим рассмотрим закон

$$\begin{array}{ccc} \zeta & 1 & 2, \\ P_r & 0 & 1. \end{array}$$

Видно, что $r = 2$; $m_1 = 1$. Следовательно, правая часть (35) равна 2, что совпадает со значением левой части, что и доказывает теорему.

Выводы. Определены основные понятия дискретного ресурса. Введены показатели дискретного ресурса и доказаны расчетные формулы для них. Установлены оценки для основных показателей дискретного ресурса. Проведен сравнительный анализ расчетных формул, полученных в работе, с показателями непрерывного ресурса. Исследована достижимость установленных оценок. Приведены примеры использования полученных результатов работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-08-00574-а и № 10-08-00507-а).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
2. *Автушенко А.Ф., Алексеев С.В., Садыхов Г.С. и др.* Мощные надгоризонтные РЛС дальнего обнаружения: разработка, испытания, функционирование / Под ред. С.Ф. Боева. М.: Радиотехника, 2013. 168 с.
3. *Klass P.J.* Cycling Tests Increase Reliability Factor “Aviation Week”. 1960. V. 73. Sept., № 5. P. 14.
4. *Жаднов В.В., Тихменев А.Н., Полесский С.Н.* Современные подходы к исследованию безотказности электронных средств циклического применения // Надежность и качество: Труды междунар. симпозиума. В 2-х томах / под ред. Н.К. Юркова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2012. Т. 1. С. 70.
5. *Садыхов Г.С., Савченко В.П.* Оценка остаточного ресурса с использованием физической модели аддитивного накопления повреждения // Докл. АН. 1995. Т. 343. № 4. С. 469.
6. *Артюхов А.А.* Оценка средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Труды ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. С. 295.
7. *Басов В.Н., Нестеренко Г.И.* Экспериментальное исследование характеристик статической прочности, усталостной долговечности и циклической трещиностойкости листов из алюминиево-литиевых сплавов // Труды ЦАГИ. 2007. В. 2675. С. 181.
8. *Ганиев Р.Ф., Балакшин О.Б., Кухаренко Б.Г.* Флаттер с предельным циклом колебания лопаток ротора турбокомпрессора // Докл. АН. 2012. Т. 446. № 2. С. 159.
9. *Махутов Н.А.* Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Ч. 2. Обоснование ресурса и безопасности. Новосибирск: Наука, 2005. 610 с.