ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 5, с. 36–42

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 519.718

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ И УСКОРЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ

В. А. Проурзин

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: proursin@gmail.com

Поступила в редакцию 24.12.2019 г.
Принята к публикации 29.05.2020 г.

Предложена новая формулировка физического принципа надежности и построена модель надежности с учетом переменных нагрузок в виде системы дифференциальных уравнений. На вход динамической системы подается нагрузка, а на ее выходе формируется функция вероятности безотказной работы. Получены условия эквивалентности динамических моделей. При наличии автомодельности процессов накопления повреждений общая динамическая модель сведена к эквивалентной упрощенной базовой динамической модели. Полученные результаты могут иметь применение в теории надежности систем с переменными нагрузками, в анализе выживаемости, в теории ускоренных и форсированных испытаний.

Ключевые слова: надежность, переменные нагрузки, мера повреждения, динамическая модель, ускоренные испытания, автомодельность.

DOI: 10.31857/S0235711920050119

В рамках традиционного подхода [1] показатели надежности вводятся как функции времени при условии, что все изделия эксплуатируются в сходных условиях. Распространенный в инженерной практике способ учета влияния эксплуатационных нагрузок заключается в построении зависимостей показателей надежности от постоянных уровней эксплуатационных факторов. В качестве примера можно привести модели расчета вероятностей усталостного разрушения при регулярном многоцикловом нагружении. Для учета переменных нагрузок используются полуэмпирические модели суммирования повреждений. В первую очередь это широко известное правило линейного суммирования повреждений (гипотеза Пальмгрена–Майнера) и различные нелинейные обобщения этого правила [2, 3]. Сюда же можно отнести многостадийные модели накопления повреждений, модели, использующие полуэмпирические функции меры повреждений [3]. Существуют определенные проблемы с обоснованностью применения и точностью этих подходов.

Большое внимание уделяется разработке физических моделей отказов, описывающих развитие физических процессов накопления повреждений и критерии возникновения отказов [4–10]. Отказ как правило трактуется как детерминированный момент достижения некоторого предельного состояния. Отсутствует связь с традиционными показателями надежности.

Модели зависимостей показателей надежности от нагрузок в настоящее время интенсивно развиваются в рамках методов ускоренных (форсированных) испытаний. Достаточно полный обзор современных методов ускоренных испытаний дан в [11]. Наиболее популярными моделями ускоренных испытаний являются модель пропорциональных интенсивностей [12] и AFT (accelerated failure time) модель [11, 13]. Важным результатом в теории ускоренных испытаний является физический принцип Седякина [14]. Этот принцип инициировал работы многих исследователей: принцип наследственности Карташова [15], модель Пешеса–Степановой [16], обобщенный принцип Седякина [13]. В работах [17, 18] этот подход развивается применительно к системам с переменными нагрузками. В работах [15] и [19] показано, что принцип Седякина и его обобщения имеют узкую область строгого применения.

В настоящей статье формулируется общий физический принцип надежности, из которого выводится динамическая модель, связывающая функцию вероятности безотказной работы системы с динамикой изменения некоторой меры повреждения изделия [21]. Здесь рассмотрены простые модели со скалярной нагрузкой и исследованы их свойства. Обосновано применение динамической модели к анализу надежности систем с переменной нагрузкой и к ускоренным испытаниям.

1. Модели ускоренных испытаний. Методы ускоренных испытаний позволяют принимать решение о надежности систем при их эксплуатации в стандартных условиях по результатам экспериментов, проведенных в условиях повышенных нагрузок за более короткое время. Комплекс воздействующих факторов представляется в виде вектор-функции $\theta(t)$. В теории ускоренных испытаний θ называется вектором поясняющих переменных, вектором ковариант, стрессом или просто нагрузкой. Компоненты нагрузки θ могут соответствовать различным характеристикам, оказывающим влияние на работоспособность объекта: внутренним характеристикам объекта, внешним воздействующим факторам, эксплуатационным нагрузкам и т.п. Через E обозначено множество возможных нагрузок, а через E_1 – множество нагрузок, постоянных во времени, $E_1 \subset E$.

Пусть θ_0 – вектор нагрузки, соответствующий нормальным условиям эксплуатации; $P_0(t) = P(t;\theta_0)$ и $\lambda_0(t) = \lambda(t;\theta_0)$ – функции вероятности безотказной работы (функция надежности) и интенсивность отказов при нормальной нагрузке θ_0; $P(t;\theta)$ и $\lambda(t;\theta)$ – функции надежности и интенсивность отказов при произвольной нагрузке θ. При известной интенсивности отказов $\lambda(t)$ функция надежности $P(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{P} = -P\lambda(t), \quad P(0) = 1. \tag{1}$$

В моделях ускоренных испытаний основной вопрос заключается в построении связи между функцией надежности $P(t;\theta)$ и функцией надежности $P_0(t)$ при постоянных нагрузках: $\theta \in E_1$. Существует две известные модели ускоренных испытаний на множестве E_1, называемые моделями Лемана [13]. Рассматривается положительная функция $r(\theta)$ – функция связи, которая описывает суммарный эффект влияния нагрузки на продолжительность безотказной работы системы. Согласно *первой модели Лемана*

$$P(t,\theta) = P_0^{r(\theta)}(t), \quad \lambda(t;\theta) = r(\theta)\lambda_0(t). \tag{2}$$

К моделям этого типа относится, например, модель пропорциональных интенсивностей Кокса [12]. Согласно *второй модели Лемана*

$$P(t,\theta) = P_0(r(\theta)t), \quad \lambda(t;\theta) = r(\theta)\lambda_0(r(\theta)t). \tag{3}$$

Модель интенсивности отказов в виде (3) обычно называется AFT (accelerated failure time) моделью на E_1.

Задача ускоренных испытаний состоит в построении функции связи $r(\theta)$. Основные проблемы применения изложенных подходов заключаются в следующем. В состав вектора стрессов θ включают не только нагрузки, но и переменные состояния объекта. Одако связь между нагрузками и переменными состояния при этом не используется.

Возникают проблемы использования построенных моделей для учета переменных нагрузок.

Ниже рассмотрен подход к описанию влияния нагрузок на показатели надежности, основанный на динамических моделях накопления повреждений, и применение этих моделей к ускоренным испытаниям.

2. Динамическая модель надежности. Рассматривается модель надежности, при которой эксплуатационная нагрузка описывается скалярной величиной $\theta(t)$. Рассматривается одна причина отказа вследствие определенного деградационного процесса (механического, физического, химического...). Вводится скалярная величина y — мера накопления повреждения. Этот параметр может иметь физический смысл (например, длина трещины, величина износа, расход рабочего тела, степень коррозии и т.п) или представлять из себя обобщенный полуэмпирический показатель [3]. Для нагрузки и меры повреждения вводится связь — дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = F(y, \theta), \quad y(0) = y_0. \tag{4}$$

Вероятность безотказной работы $P(t; \theta)$ в момент времени t зависит от значений нагрузки $\theta = \theta(t)$ на всем интервале времени $(0, t)$. Используя физические соображения, эту зависимость можно уточнить. В качестве постулата принимается марковское свойство физических систем.

Физический принцип надежности. *Существует показатель меры повреждения $y = y(t)$ такой, что вероятность отказа на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ при условии исправности системы в момент времени t, определяется только текущим значением $y(t)$ и не зависит от предыстории.*

Данный принцип есть обобщение известного физического принципа Седякина [14]. В качестве обоснования сформулированного физического принципа можно рассмотреть процедуру технической диагностики. В процессе диагностики измеряют именно текущие значения диагностических параметров (меры повреждения) и только по этим значениям выносят заключение о состоянии объекта и возможности его отказа в ближайшее время. Предыстория изменения меры повреждения как правило не рассматривается. Например, вероятность отказа тормозов автомобиля на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ зависит лишь от величины износа тормозных колодок y в рассматриваемый момент и не зависит от истории этого износа.

С другой стороны, текущее значение меры повреждения $y(t)$ есть интегральная характеристика всей истории нагружения. Она определяется дифференциальным уравнением (4). Вероятность отказа, которая определяется достигнутым значением меры повреждения, таким образом опосредованно зависит от всей истории нагружения.

Сформулированный физический принцип эквивалентен условию существования неотрицательного коэффициента D, зависящего только от значения меры повреждения в момент времени t: $D = D(y(t))$, и такого, что

$$\frac{P(t + \Delta t; \theta)}{P(t; \theta)} = 1 - D(y(t))\Delta t + o(\Delta t). \tag{5}$$

Выражение слева от знака равенства есть вероятность безотказной работы системы на малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$ при условии, что система не отказала на интервале $[0, t]$, а выражение справа — линеаризованное по Δt значение этой условной вероятности, зависящее только от текущего значения y. Функция $D(y)$ имеет смысл *опасности отказа* при достижении мерой повреждения значения y. Переход в выражении (5) к пределу при стремлении Δt к нулю дает дифференциальное уравнение

$$\dot{P}(t) = -P(t)D(y). \tag{6}$$

Из сравнения уравнений (1) и (6) следует связь между интенсивностью отказов и функцией опасности отказа при нагрузке $\theta(t)$

$$\lambda(t;\theta) = D(y(t;\theta)). \tag{7}$$

Объединение уравнений (4) и (6) дает систему дифференциальных уравнений – динамическую модель надежности

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y,\theta), & y(0) = y_0, \\ \dot{P} = -PD(y), & P(0) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

На вход системы (8) подается нагрузка $\theta = \theta(t)$, на выходе получается зависимость меры повреждения от времени и функция надежности $P(t)$.

Ниже приведены примеры динамических моделей. Для наглядности, полагается, что нагрузка постоянна во времени: $\theta(t) \in E_1$.

2.1. Пример 1. Пусть в системе (8) $F(y,\theta) = -H(\theta)(y - R(\theta))$, $H(\theta) > 0$, $R(\theta) > 0$, $D(y) = \lambda_0 y$. Решение первого уравнения системы (8) при $\theta(t) \in E_1$ имеет вид $y(t) = R(\theta) + (y_0 - R(\theta))\exp(-H(\theta)t)$. Мера повреждения $y(t)$ с ростом времени стремится к $R(\theta)$, а функция опасности $D(y)$ стремится к постоянному значению $R(\theta)\lambda_0$ тем быстрее, чем больше $H(\theta)$. Если положить $y_0 = R(\theta)$, то это постоянное значение достигается сразу и решение второго уравнения системы (8) дает экспоненциальное распределение $P = \exp(-R(\theta)\lambda_0 t)$. Если $y_0 > R(\theta)$, то моделируется случай повышенной интенсивности отказов в начальный период времени ("детская смертность") с переходом к постоянной интенсивности. Если $y_0 < R(\theta)$, то имеем случай пониженной интенсивности отказов в начальный период времени.

2.2. Пример 2. Пусть в системе (8) $F(y,\theta) = y^{1-\alpha}R(\theta)$, $\alpha \neq 1$, $y_0 = 0$. При постоянной нагрузке θ решение первого уравнения системы (8) задается выражением $y(t) = \alpha(R(\theta)t)^{\frac{1}{\alpha}}$. Пусть функция опасности отказа имеет степенную зависимость от меры повреждения: $D(y) = cy^{\beta}$, c, $\beta > 0$. Тогда решение второго уравнения системы (8) дает функцию надежности в виде распределения Вейбулла. Пусть в этом примере задана другая функция опасности отказа: $D(y) = \exp(-f^2(y)/2)/(\sqrt{2\pi}\sigma\Phi(f(y)))$, где $f(y) = (\alpha\ln(y/\alpha) - \mu)/\sigma$; параметры $\sigma, \mu > 0$; $\Phi(x)$ – функция Лапласса. Тогда при $\theta(t) \in E_1$ система (8) порождает логнормальные распределения времени безотказной работы.

2.3. Свойство автомодельности. Пусть справедлива гипотеза об автомодельности в ускоренных испытаниях. В основе автомодельности лежит предположение о подобии процессов накопления повреждений при различных нагрузках. В [3] показано, что при справедливости гипотезы об автомодельности уравнение [4] для меры повреждения y должно быть дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, т.е. должно быть выполнено следующее представление правой части: $F(y,\theta) = S(y)R(\theta)$. Динамическая модель (8) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = S(y)R(\theta), & y(0) = y_0; \\ \dot{P} = -PD(y), & P(0) = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Замечание 1. *По своему физическому смыслу мера повреждения y при постоянной нагрузке должна изменяться монотонно. Отсюда следует, что функция $S(y)$ является знакопостоянной.*

Задача ускоренных испытаний в рамках модели (9) сводится к построению функций $S(y)$, $R(\theta)$ и $D(y)$. Чем интенсивнее нагрузка, тем быстрее величина $y(t)$ будет пробегать диапазон значений, на котором строятся эти функции.

3. Эквивалентность моделей и базовая динамическая модель надежности. Пусть для описания одного и того же отказа под действием нагрузки $\theta(t) \in E$ рассмотрены две различные меры повреждения y_1, y_2 и построены две динамические модели надежности

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(y_1, \theta), & y_1(0) = y_{10}, \\ \dot{P}_1 = -P_1 D_1(y_1), & P_1(0) = 1; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2 = F_2(y_2, \theta), & y_2(0) = y_{20}, \\ \dot{P}_2 = -P_2 D_2(y_2), & P_2(0) = 1. \end{cases} \tag{11}$$

Исследуются условия эквивалентности этих моделей.

Определение. *Две динамические модели надежности* (10), (11) *эквивалентны на заданном множестве нагрузок* E, *если тождество* $P_1(t;\theta) \equiv P_2(t;\theta)$ выполнено для каждого $\theta \in E$.

Пусть отношение функций F_1 и F_2 знакопостоянно. Далее, не уменьшая общности, можно считать его положительным. И пусть это отношение не зависит от нагрузки: $F_1(y_1,\theta)/F_2(y_2,\theta) = H(y_1, y_2) > 0$. Разделив первое уравнение системы (10) на первое уравнение системы (11) получим дифференциальное уравнение $dy_1/dy_2 = H(y_1, y_2)$ с начальным условием $y_1(y_{20}) = y_{10}$. Пусть $y_1 = \varphi(y_2)$ – решение этого уравнения. В силу положительности $H(y_1, y_2)$ функция $\varphi(y_2)$ монотонно возрастает. Зададим функцию опасности системы (11) как $D_2(y_2) = D_1(\varphi(y_2))$. Тогда для всех $t > 0$ и нагрузок θ выполняется условие эквивалентности

$$P_1(t) = \exp\left(-\int_0^t D_1(y_1(s))\,ds\right) = \exp\left(-\int_0^t D_1(\varphi(y_2(s)))\,ds\right) =$$
$$= \exp\left(-\int_0^t D_2(y_2(s))\,ds\right) = P_2(t).$$

В результате доказано утверждение 1.

Утверждение 1. *Если отношение функций* $F_1(y_1,\theta)/F_2(y_2,\theta)$ *знакопостоянно и не зависит от нагрузки, то выбором функции* $D_2(y_2)$ *динамическую модель* (11) *можно сделать эквивалентной динамической модели* (10).

Свойство эквивалентности позволяет обосновать использование полуэмпирических моделей: можно использовать любую меру повреждения, даже не имеющую определенного физического смысла, лишь бы ее значение монотонно зависело от величины реального ущерба.

Пусть модели надежности (10) и (11) имеют вид (9), т.е. $F_1(y_1,\theta) = S_1(y_1) R_1(\theta)$, $F_2(y_2,\theta) = S_2(y_2) R_2(\theta)$. В силу утверждения 1 эти модели будут эквивалентны, когда функции R_1 и R_2 совпадают с точностью до постоянного множителя: $R_1(\theta) = aR_2(\theta)$, $a \neq 0$. В этом случае отношение $H(y_1, y_2) = aS_1(y_1)/S_2(y_2)$ не зависит от нагрузки. Это отношение знакопостоянно в силу замечания 1.

Отсюда следует важный вывод: для автомодельной системы (9) существует бесконечное множество эквивалентных систем, которые характеризуются одной и той же функцией $R(\theta)$ и любой знакопостоянной функцией $S(y)$. Из множества этих эквивалентных моделей выделяется модель самого простого вида при $S(y) \equiv 1$. Тем самым для любой модели вида (9) существует эквивалентная ей динамическая модель, которую будем называть *базовой динамической моделью надежности*

$$\begin{cases} \dot{x} = R(\theta), & x(0) = x_0, \\ \dot{P} = -PD_0(x), & P(0) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Новая мера повреждения x есть нелинейное преобразование исходной меры y: $x = \psi(y)$, $D_0(x)$ – функция опасности отказа базовой динамической модели. Не уменьшая общности, функцию $R(\theta)$ в этой модели можно считать положительной. Переход от базовой модели (12) к модели (9) с некоторой функцией $S(y)$ осуществляется переобразованием $D(y) = D_0(\psi(y))$, где $\psi(y) = x_0 + \int_{y_0}^{y} dy/S(y)$ – решение уравнения $dx/dy = 1/S(y)$, $x(y_0) = x_0$. Решение системы (12) записывается в общем виде

$$x(t) = x_0 + \int_0^t R(\theta(s))\,ds, \quad P(t) = \exp\left(-\int_0^t D_0(x(s))\,ds\right). \tag{13}$$

Рассмотрим базовую модель (12) при постоянных нагрузках. Тогда $x(t) = x_0 + R(\theta)t$ и применение этого равенства для замены переменной интегрирования в (13) дает

$$P(t) = \exp\left(-\frac{1}{R(\theta)}\int_{x_0}^{x_0+R(\theta)t} D_0(x)\,dx\right). \tag{14}$$

Пусть выделена некоторая постоянная нагрузка θ_0, задающая нормальные условия эксплуатации. В силу (7) выполнены равенства $\lambda_0(t) = D_0(x_0 + R(\theta_0)t)$ и $\lambda(t,\theta) = D_0(x_0 + R(\theta)t)$. Отсюда следует $\lambda(t,\theta) = \lambda_0(cR(\theta)t)$, где $c = 1/R(\theta_0)$. Подстановка $t = c(x - x_0)$ в выражение для $\lambda_0(t)$ дает равенство $\lambda_0(c(x - x_0)) = D_0(x)$. В результате доказано утверждение 2.

Утверждение 2. *В базовой модели* (12) *зависимость интенсивности отказов от постоянной нагрузки* θ *задается изменением временного масштаба* $r(\theta)$: $\lambda(t,\theta) = \lambda_0(r(\theta)t)$, *где* $\lambda_0(t)$ *– интенсивность отказов при некоторой фиксированной нагрузке* θ_0, $r(\theta_0) = 1$. *Функция масштаба* $r(\theta)$ *совпадает с функцией* $R(\theta)$ *с точностью до нормирующего множителя*: $r(\theta) = cR(\theta)$, $c = 1/R(\theta_0)$. *Функция опасности отказа* $D_0(x) = \lambda_0(c(x - x_0))$.

В терминах моделей Лемана, помимо (2) и (3), получена третья модель ускоренных испытаний на множестве постоянных нагрузок:

$$P(t,\theta) = P_0^{1/r(\theta)}(r(\theta)t), \quad \lambda(t;\theta) = \lambda_0(r(\theta)t).$$

Задача ускоренных испытаний с использованием базовой динамической модели (12) заключается в построении двух функций $R(\theta)$ и $D_0(x)$. Функция опасности отказа $D_0(x)$ определяется через функцию интенсивности отказа при некоторой постоянной нагрузке θ_0.

Заключение. Построена динамическая модель надежности при произвольной нагрузке. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, на вход которой подается нагрузка, а на выходе получается функция надежности. В случае автомодельности процессов накопления повреждений общая динамическая модель сводится к упрощенной базовой динамической модели.

Модель имеет непосредственное применение в тех случаях, когда нагрузки задаются как детерминированные функции времени. В первую очередь такая ситуация возникает при испытаниях на надежность, в том числе при ускоренных и форсированных испытаниях.

Корректность рассмотренной динамической модели определяется справедливостью физического принципа надежности. Для использования базовой динамической модели дополнительно требуется выполнение автомодельности процессов накопления повреждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко В.Б., Беляев Ю.К., Соловьев Ф.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. Надежность в машиностроении: Справочник/ Под. ред. В.В. Шашкина, Г.П. Карзова. СПб.: Политехника. 1992. 719 с.
3. *Болотин В.В.* Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 448 с.
4. *Меламедов И.М.* Физические основы надежности. Л.: Энергия, 1970. 152 с.
5. *Махутов Н.А.* Проблемы прочности, ресурса и безопасности машинных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 3. С. 50.
6. *Махутов Н.А.* Обобщённые закономерности процессов деформирования и разрушения // Вестник российской академии наук. 2017. Т. 87. № 5. С. 407.
7. *Матвиенко Ю.Г.* Модели и критерии механики разрушения. М.: Физматлит. 2006. 328 с.
8. *Гриб В.В., Петрова И.М., Романов А.Н.* Оценка вероятности отказа механических систем моделирования технического состояния // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 55.
9. *Романов А.Н.* Закономерности деформирования и разрушения конструкционных материалов при циклическом нагружении на стадии образования трещин // Механика машин, механизмов и материалов. 2017. № 3 (40). С. 67.
10. *Проников А.С.* Надежность машин. М.: Машиностроение. 1978. 592 с.
11. *Escobar L.A., Meeker W.Q.* A review of accelerated test models // Statistical science. 2006. V. 21. № 4. P. 552.
12. *Cox D.* Regression models and life tables // J. R. Statist. Soc. 1972. V. 34. P. 187.
13. *Bagdonavicius V., Nikulin M.* Accelerated life models: modeling and statistical analysis. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall. 2002. 334 p.
14. *Седякин Н.М.* Об одном физическом принципе теории надёжности // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. № 3. С. 80.
15. *Перроте А.И., Карташов Г.Д., Цветаев К.Н.* Основы ускоренных испытаний радиоэлементов на надежность. М.: Советское радио. 1968. 224 с.
16. *Пешес Л.Я., Степанова М.Д.* Основы ускоренных испытаний на надёжность. Минск: Наука и техника. 1972. 165 с.
17. *Павлов И.В.* Расчет показателей надежности в условиях переменного режима работы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 5. С. 103.
18. *Павлов И.В.* Оценка надежности для модели ускоренных испытаний с переменной нагрузкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 1. С. 68.
19. *Белов В.Н.* Об определении области применимости моделей расходования ресурса // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1988. № 3. С. 98.
20. *Новиков П.И., Проурзин В.А.* Динамическая модель надежности изоляции электрических машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2005. № 1. С. 106.
21. *Prourzin V.A.* General physical principle in dynamic model of reliability // Int. J. of Risk Assessment and Management. 2017. V. 20. № 4. P. 322.