ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ДИАГНОСТИКА ИСПЫТАНИЯ

УДК 51-7+62-192:621

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ СМЕСИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАРАБОТОК ДО ОТКАЗА ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Вайнштейн[1,*], И. И. Вайнштейн[1,]**

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

**e-mail: vit037@mail.ru*

***e-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru*

Поступила в редакцию 24.06.2020 г.
После доработки 17.02.2021 г.
Принята к публикации 24.02.2021 г.

Плотности распределений известных в теории надежности законов распределения случайных наработок, например, экспоненциальное, Вейбулла–Гнеденко, Эрланга, нормальное, Максвелла и многих других не более чем одномодальные и не более чем двухпараметрические. В статье рассмотрены постановки задач определения “доли” каждой функции распределения в смеси (функции распределения заданы) при которых случайная величина, задаваемая этой смесью распределений, имеет наименьшую дисперсию при ограничениях на математическое ожидание, или наибольшее математическое ожидание при ограничениях на дисперсию. Задачи по форме являются известными задачами Марковица о формировании пакета ценных бумаг в предположении, что величина среднего значения имеет смысл “дохода”, дисперсия – “риска”. Приводятся решения задачи минимизации дисперсии для смесей двух и трех распределений при задаваемом математическом ожидании.

Ключевые слова: наработка элемента до отказа, функция распределения, смесь функций распределения, задача Марковица

DOI: 10.31857/S0235711921030160

Постановка задачи. Характеристики надежности работы технических систем существенно зависят от случайных наработок до отказов ее элементов, которые определяются функциями распределения. Известные, характерные для теории надежности законы распределения не более чем двухпараметрические, и не более чем одномодальные. Смесь распределений, будучи многопараметрической, позволяет получать бимодальные (двухвершинные) и полимодальные плотности, что расширяет сферу применения этих законов в решении прикладных и теоретических задач теории надежности технических систем [1–3].

Интенсивность отказов смеси экспоненциальных распределений имеет период приработки, и с увеличением продолжительности работы интенсивность становится практически постоянной. Это существенно отличает смесь экспоненциальных распределений от одного экспоненциального распределения, у которого интенсивность отказов постоянна, а период приработки, характерный в начальный период работы многих технических систем, отсутствует [1, 2].

Смесь распределений моделирует следующую ситуацию. Пусть элементы одного типа изготавливаются на n различных предприятиях, причем доля элементов i-го предприятия ($i = 1, 2, ..., n$) в общей совокупности равняется λ_i ($\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0$). Если $F_i(t)$ – функция распределения элемента, изготовленного на i-м предприятии, то функция распределения случайно выбранного из общего объема элемента $F(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(t)$ [4].

Таким образом, имеется возможность с помощью численных значений долей λ_i управлять функцией распределения наработки элемента до отказа, и тем самым формировать смесь для получения нужных характеристик надежности работы элементов при эксплуатации.

Запишем функцию распределения смеси (дискретной) n функций распределения $F_I(t)$

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(t), \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0.$$

Пусть у функций распределения $F_i(t)$, образующих смесь, зафиксированы входящие в них параметры. Тогда функция распределения $F(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(t)$ зависит от n параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Это дает возможность рассматривать новые оптимизационные задачи в теории надежности технических систем и ее приложении, например, в стратегиях эксплуатации.

В статье предлагается интерпретировать среднюю наработку элемента до отказа при его эксплуатации как “доход”, а соответствующую при этом дисперсию как “риск”. При этом естественны задачи минимизации “риска” при требовании на “доход”, или максимизации “дохода” при требовании на “риск”.

Пусть X_i – случайные величины, задаваемые функциями распределения $F_i(t)$, X – случайная величина, задаваемая функцией распределения $F(t)$.

Для математического ожидания и дисперсии имеем

$$E(X) = \int_0^\infty x\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i dF_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i m_i, \quad m_i = E(X_i),$$

$$D(X) = \int_0^\infty x^2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i dF_i(x)\right) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i E(X_i^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i - E^2(X),$$

$$c_i = \int_0^\infty x^2 dF_i(x) = D(X_i) + E^2(X_i) = \sigma_i^2 + m_i^2, \quad \sigma_i = \sqrt{D(X_i)}.$$

Сформулируем задачу формирования смеси. Требуется определить числа λ_i (доли каждой функции распределения в смеси), чтобы случайная величина X, обдаваемая полученной смесью, имела требуемое математическое ожидание $E(X) = m_0$, и при этом имела наименьшую дисперсию

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i - E^2(X) \to \min, \tag{1}$$

при условии

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i m_i = m_0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0. \tag{3}$$

Числа m_0, $m_i = E(X_i)$, $D(X_i)$ задаются.

Эта задача по формулировке является аналогом известной задачи Марковица о формировании пакета ценных бумаг (портфель Марковица минимального риска). В рассматриваемом случае среднее значение имеет смысл “дохода”, дисперсия – “риск” [5–7].

Другой задачей, связанной со смесью распределений, является задача расщепления смеси. По выборке ищутся значения параметров λ_i, их количество, а также значения параметров, входящих в функции распределения $F_i(t)$. Разработаны алгоритмы и программы решения таких задач [1, 2, 8–14].

Решение задачи (1), (2), (3). Учитывая (2), условие (1) перепишем в виде

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i - m_0^2 \to \min. \tag{4}$$

Задачи (4), (2), (3) являются задачами линейного программирования [15, 16].

При нахождении $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ условие (4) можно переписать в виде

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \to \min. \tag{5}$$

Рассмотрим задачу для смеси двух функций распределения ($n = 2$)

$$\begin{gathered} \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \to \min, \\ \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = m_0, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0. \tag{7}$$

В этом случая λ_1, λ_2 определяются из системы (6), (7)

$$\lambda_1 = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1}, \quad \lambda_2 = \frac{m_0 - m_1}{m_2 - m_1}, \quad m_2 \ne m_1. \tag{8}$$

Доли λ_1, λ_2 положительны при $m_1 < m_0 < m_2$ или $m_2 < m_0 < m_1$.

Дисперсия для этого случая

$$D = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - m_0^2 = \frac{c_1(m_2 - m_0) + c_2(m_0 - m_1)}{m_2 - m_1} - m_0^2.$$

При $m_2 = m_1$ необходимо $m_0 = m_2 = m_1$. Тогда $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $D = (c_1 - c_2)\lambda_1 + c_2 - m_0^2$. Если $c_1 > c_2$, $\min D_1 = c_2 - m_0^2$ при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Если $c_1 < c_2$, $\min D_1 = c_1 - m_0^2$ при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

Рассмотрим смесь двух экспоненциальных распределений

$$F(t) = \lambda_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + \lambda_2(1 - e^{-\alpha_2 t}),$$

$$m_i = E(X_i) = \frac{1}{\alpha_i}, \quad E(X_i^2) = \frac{2}{\alpha_i^2}, \quad (i = 1, 2), \quad m_0 = \frac{1}{\alpha_0}.$$

В соответствии с (8)

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha_0 - \alpha_2)\alpha_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_0}, \quad \lambda_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)\alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_0}, \quad \alpha_2 < \alpha_0 < \alpha_1 \quad \text{или} \quad \alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2.$$

Рассмотрим задачу для смеси трех функций распределения

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 \to \min, \tag{9}$$

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 = m_0, \tag{10}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0. \tag{11}$$

Из уравнений (10), (11) выражаем λ_1, λ_2 через λ_3 и подставляем в (9)

$$\lambda_1 = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1} - \lambda_3 \frac{m_2 - m_3}{m_2 - m_1}, \quad \lambda_2 = \frac{m_0 - m_1}{m_2 - m_1} - \lambda_3 \frac{m_3 - m_1}{m_2 - m_1}, \quad m_2 \neq m_1,$$

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = A\lambda_3 + B, \tag{12}$$

$$A = \frac{c_3(m_2 - m_1) - c_1(m_2 - m_3) - c_2(m_3 - m_1)}{m_2 - m_1}, \quad B = \frac{c_1(m_2 - m_0) + c_2(m_0 - m_1)}{m_2 - m_1}.$$

Положим $m_1 < m_2 < m_3$. Удовлетворяя в (12) условию $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$, получаем

$$\frac{m_0 - m_2}{m_3 - m_2} \leq \lambda_3 \leq \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}. \tag{13}$$

Полученное неравенство выполняется при $m_0 \leq m_3$.

Относительно аргумента λ_3 функция $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = A\lambda_3 + B$ линейная. Минимальное значение она принимает на одном из концов отрезка $\left[\frac{m_0 - m_2}{m_3 - m_2}, \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}\right]$.

Пусть $m_2 < m_0 \leq m_3$. В случае $A > 0$ минимальное значение на левом конце указанного отрезка $\left(\lambda_3 = \frac{m_0 - m_2}{m_3 - m_2}\right)$, при $A < 0$ на правом $\left(\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}\right)$. Затем по формулам (12) определяем λ_1, λ_2, после чего дисперсию

$$D(X) = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 - m_0^2.$$

Если $A > 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_2}$, $\lambda_3 = \frac{m_0 - m_2}{m_3 - m_2}$, если $A < 0$, $\lambda_1 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}$.

Пусть $m_0 \leq m_2$. Тогда из (13) $0 \leq \lambda_3 \leq \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}$. В случае $A > 0$ минимум при $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = \frac{m_2 - m_0}{m_2 - m_1}$, $\lambda_2 = \frac{m_0 - m_1}{m_2 - m_1}$.

В случае $A < 0$ минимум при $\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}$, $\lambda_1 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}$, $\lambda_2 = 0$.

Пусть $m_1 = m_2 \neq m_3$. Из (10), (11)

$$\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}, \quad \left(\lambda_2 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1} - \lambda_1\right).$$

Условие $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ выполняется при $0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}$. Далее

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 = (c_1 - c_2)\lambda_1 + c_2 \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1} + c_3 \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1},$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}.$$

Если $c_1 > c_2$, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}$, $\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}$, если $c_1 > c_2$, то $\lambda_1 = \frac{m_3 - m_0}{m_3 - m_1}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \frac{m_0 - m_1}{m_3 - m_1}$.

При $m_1 = m_2 = m_3$ из (10), (11) следует $m_0 = m_1$. Пусть, например, $c_1 = \min(c_1, c_2, c_3)$. В этом случае $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $D(X) = c_1 - m_1^2 = D(X_1)$ — решение задачи.

При $n > 3$ решение задачи можно найти, используя известный симплекс-метод решения задач линейного программирования [15, 16].

Задачу формирования смеси, наряду с постановкой (1)–(3), возможно рассматривать и в других постановках:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i - E^2(X) \to \min, \tag{14}$$

при условии

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \ge m_0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0, \tag{15}$$

или

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \to \max, \tag{16}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i - E^2(X) = d_0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0, \tag{17}$$

или

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i \to \max, \tag{18}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i - E^2(X) \le d_0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \ge 0. \tag{19}$$

В задачах (16)–(17), (18)–(19) ищется максимум математического ожидания при задаваемых ограничениях на дисперсию, т.е. при задаваемом “риске” требуется максимальный “доход”. Эти задачи вместе с задачей (14)–(15) являются задачами квадратичного программирования.

Рассмотрим задачу (14)–(15) при $n = 2$.

Учитывая $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, требуется найти наименьшее значение квадратного трехчлена

$$D(\lambda_1) = -(m_1 - m_2)^2 \lambda_1^2 + (c_1 - c_2 - 2m_2(m_1 - m_2))\lambda_1 + c_2 - m_2^2,$$

при условии $(m_1 - m_2)\lambda_1 + m_2 \ge m_0$, $0 \le \lambda_1 \le 1$.

При заданных значениях m_0, m_1, m_2, c_1, c_2 ее решение не вызывает трудности.

Заключение. Важнейшие характеристики работы элементов технических систем или всей системы имеют случайный характер. Например, время работы элементов до отказа, количество отказов на заданном промежутке времени, эксплуатационная стоимость с учетом аварийных и профилактических восстановлений.

В статье предлагается рассматривать среднее значение времени работы элементов до отказа как “доход”, а дисперсию как “риск”. Это приводит к оптимизационным задачам “доход”–“риск”. Случай функции распределения наработок элементов до отказа, как смесь распределений, приводит эти задачи по форме к известным задачам Марковица по формированию пакета ценных бумаг.

В задаче формирования смеси для получения, задаваемого “дохода” (среднего значения времени работы элемента до отказа) при наименьшем “риске” (дисперсии), в случае смесей двух и трех распределений, решение получено в явном виде. В случае смеси n функций решение выписывается, используя известные методы решения задач линейного программирования.

Полученные явные формулы решения задачи в случае смесей экспоненциальных распределений дают возможность эффективно решать задачи оптимального формирования смеси для элементов технических систем, у которых имеется небольшой период переработочных отказов и длительный период нормальной работы с почти постоянной интенсивностью отказов.

Таким образом, предлагаемый в статье подход рассматривать среднее значение характеристик работы элементов технических систем, имеющих случайный характер, как “доход”, а дисперсию как “риск”, позволяет рассматривать новые оптимизационные задачи в теории надежности технических систем. Задачи могут формулироваться как задачи линейного, нелинейного и динамического программирования, для которых разработаны эффективные методы решения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vaynshteyn I.I., Fedotova I.M., Tsibul'skiy G.M., Vaynshteyn Y.V.* Renewal process and operation strategies in the theory of reliability of technical systems under prefailure lives distributed as a mixture of two exponential distributions // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. V. 46. № 2. P. 84.
2. *Вайнштейн И.И.* Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности. Красноярск: СФУ, 2016. 189 с.
3. *Fedotova I.M., Vaynshtein V.I., Tsibul'skii G.M., Vaynshtein Y.V.* Renewal function under prefailure lives distributed as a mixture of *n* exponential distributions: obtaining the parameters of mixtures using the method of moments // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. V. 48. № 3. P. 275.
4. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: пер. с англ. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
5. *Markowits Harry M.* Portfolio Selection // J. of Finance. 1952. V. 7. № 1. P. 71.
6. *Касимов Ю.Ф.* Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. М.: Филинъ, 1998. 144 с.
7. *Бабешко Л.О.* Математическое моделирование финансовой деятельности. М.: Кио–Рус, 2013. 212 с.
8. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / под ред. С.А. Айвазян / М.: Финансы и статистика, 1989. 607 с.
9. *Батракова Д.А., Королев В.Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических потоков в телекоммуникационных сетях с помощью скользящего разделения смесей // Системы и средства передачи информации: сб. научных трудов. М.: ИПИРАН. 2006. С. 183.
10. *Батракова Д.А., Королев В.Ю., Шоргин С.Я.* Новый способ вероятностно-статистического анализа информационных потоков в телекоммуникационных сетях // Информатика и ее применение. 2007. С. 40.
11. *Королев В.Ю.* ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений: Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007. 94 с.
12. *Токмачев М.С., Смирнов С.В.* Программная реализация исследования смесей вероятностных распределений // Вестник Новгородского государственного университета. 2012. № 68. С. 85.
13. *Королев В.Ю., Назаров А.Л.* Разделение смесей вероятностных распределений при помощи сеточных методов моментов и максимального правдоподобия // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 98.
14. *Горошко А.В., Ройзман В.П.* Представление и обработка статистических данных, не подчиняющихся унимодальным законам распределения // Машиностроение и инженерное образование, 2013. № 3. С. 60.
15. *Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.* Линейное программирование. М.: Факториал, 1998. 176 с.
16. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988. 208 с.