ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 4, с. 10–17

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.833.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЬЕВ КОЛЕС

Ф. Г. Нахатакян[1,*], Ф. И. Плеханов[2]

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

[2] *Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, Ижевск, Россия*

**e-mail: filnahat7@mail.ru*

Поступила в редакцию 16.07.2020 г.
После доработки 29.03.2021 г.
Принята к публикации 26.04.2021 г.

Предложен аналитический метод определения податливости зубьев зубчатых колес и коэффициентов неравномерности распределения нагрузки, а также напряжений изгиба. Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии зуба колеса, последний представлен в виде клина с углом развернутости, соответствующим углу профиля эвольвентного зуба. Математическая модель нагруженного зуба представлена в виде неоднородного интегрального уравнения Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, которое решено методом операционного исчисления. Использование результатов приведенного исследования при расчете зубчатых передач на прочность позволит более точно определить их несущую способность.

Ключевые слова: зуб колеса, деформация, распределение нагрузки и напряжений

DOI: 10.31857/S023571192104009X

Деформация зубьев колес зависит от их геометрии и оказывает существенное влияние на распределение нагрузки и напряжений в их зацеплениях, а также на виброактивность передачи [1–3]. Причем влияние ее на нагрузочную способность привода является положительным, так как позволяет частично компенсировать неизбежные погрешности изготовления механизма.

Существующие методы определения указанных жесткостных и силовых факторов базируются либо на приближенных расчетах, либо на компьютерном моделировании и численном конечно-элементном анализе, что создает определенные сложности при проектировании и исследовании зубчатых передач [4].

Поэтому является актуальным получение аналитических выражений для определения податливости зубьев зубчатых колес и коэффициентов неравномерности распределения нагрузки и напряжений изгиба, в зависимости от которых находится несущая способность механического привода. Это имеет существенное значение для планетарных и волновых передач, в которых неравномерность распределения силовых факторов по длине зуба накладывается на неравномерность распределения нагрузки и напряжений по потокам мощности [5–7]. В связи с этим, очень важно, особенно на стадии проектирования таких зубчатых редукторов, иметь аналитические методы расчета жесткости (податливости) зубчатых зацеплений и о неравномерности распределения нагрузки и напряжений изгиба (по сути, коэффициента концентрации изгибных на-

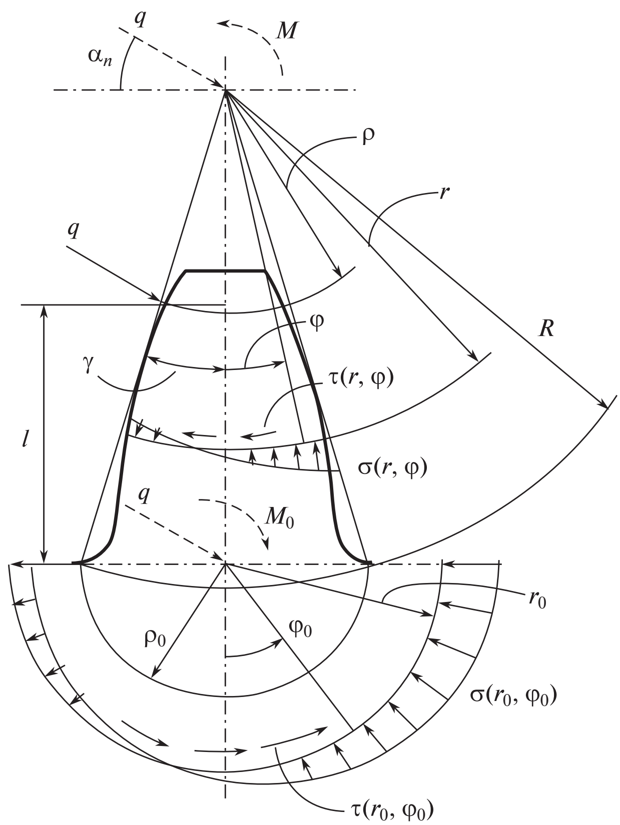

Рис. 1. Расчетная схема зуба колеса.

пряжений). Поэтому в настоящей статье разработан теоретический метод для определения указанных параметров.

Для аналитического решения задачи о напряженно-деформированном состоянии зуба колеса при равномерном распределении погонной нормальной нагрузки q представим его в виде клина (рис. 1) с углом развернутости 2γ, соответствующим углу профиля эвольвентного зуба в средней его части α и числу зубьев z, и используем известные формулы теории упругости в полярных координатах r, φ, позволяющие определить напряжения изгиба $\sigma(r, \varphi)$ и соответствующие им перемещения.

Применяя к зубу колеса зависимости, справедливые для клина, нагруженного в его вершине, перенесем нагрузку q параллельно самой себе в эту точку, добавив в соответствии с методом Пуансо момент $M = q\cos\alpha_n(\rho\cos\gamma + 0.5s_n \operatorname{tg}\alpha_n)$ (α_n – угол давления, ρ – радиус, соответствующий точке приложения нагрузки; s_n – толщина зуба в месте приложения нагрузки).

Полученный таким образом клинообразный зуб-выступ эквивалентен заданному. Рассмотрим отдельно влияние на него составляющих погонной нагрузки $q_H = q\cos\alpha_n$, $q_V = q\sin\alpha_n$ и момента M.

Напряжения, вызванные действием вертикальной составляющей нагрузки $\sigma_V(r,\varphi) = \dfrac{2q\sin\alpha_n}{r\,(2\gamma+\sin 2\gamma)}\cos\varphi$, а соответствующее им перемещение точки приложения нагрузки q в направлении линии ее действия

$$\Delta_V = \frac{(1-\mu^2)\sin\alpha_n}{E}\int\limits_{\rho}^{R}\sigma_V(r,0)dr = \frac{2q(1-\mu^2)\sin^2\alpha_n}{E\,(2\gamma+\sin 2\gamma)}\ln\left(\frac{R}{\rho}\right).$$

Здесь $\gamma = \arccos\left(r_b/r_c\right) - s_c/2r_c$; $R = \left(l_c\,\mathrm{tg}\,\gamma + 0.5s_c\right)/\sin\gamma$; $\rho = R - l/\cos\gamma$; l_c — расстояние от основания до средней части эвольвентного зуба; l — расстояние от основания зуба до точки приложения нагрузки к нему; s_c — толщина зуба в средней его части; r_c — радиус окружности средней части зубьев колеса; r_b — радиус основной окружности колеса; E — модуль упругости первого рода.

Нормальные напряжения, вызванные действием горизонтальной составляющей нагрузки, и соответствующее им перемещение точки ее приложения в направлении линии действия q

$$\sigma_H(r,\varphi) = \frac{2q\cos\alpha_n}{r\,(2\gamma-\sin 2\gamma)}\sin\varphi,$$

$$\Delta_H = \frac{(1-\mu^2)}{E\sin\gamma}\int\limits_{\rho}^{R}\frac{\sigma_H(r,\gamma)h(r)\cos\left(\alpha_n+\Omega(r)\right)}{r}dr,$$

где $h(r) = \sqrt{(r+l-R\cos\gamma)^2 + (0.5s_n)^2}$; $\Omega(r) = \arcsin\left[s_n/2h(r)\right]$.

Напряжения и перемещение, обусловленные действием момента

$$\sigma_\Theta(r,\varphi) = \frac{2M}{r^2\,(\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma)}\sin 2\varphi,$$

$$\tau_\Theta(r,\varphi) = \frac{M\,(\cos 2\varphi - \cos 2\gamma)}{r^2\,(\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma)},$$

$$\Delta_\Theta = \Delta_{\Theta\tau} - \Delta_{\Theta\sigma} = \int\limits_{\rho}^{R}\left[\frac{2(1+\mu)\tau_\Theta\,(r,0)\cos\alpha_n}{E} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\mu^2)\sigma_\Theta\,(r,\gamma)\,h\,(r)\cos\left(\alpha_n+\Omega(r)\right)}{rE\sin\gamma}\right]dr.$$

Аналогичным образом определяются силовые и деформационные факторы, вызванные податливостью основания зуба. При этом последнее рассматривается как клин с углом развернутости $2\gamma_0 = \pi$, нагруженный погонными силами q_V, q_H и моментом $M_0 = q_x[(R-\rho)\cos\gamma - 0.5s_n\,\mathrm{tg}\,\alpha_n)]$. Тогда

$$\Delta_{V0} = \frac{(1-\mu^2)\sin\alpha_n}{E}\int\limits_{\rho_0}^{R_0}\sigma_{V0}(r_0,0)dr_0 = \frac{2q(1-\mu^2)\sin^2\alpha_n}{E\pi}\ln\left(\frac{R_0}{\rho_0}\right),$$

$$\Delta_{H0} = \frac{(1-\mu^2)}{E}\int\limits_{\rho_0}^{R_0}\frac{\sigma_{H0}(r_0,\gamma_0)h_0(r_0)\cos\left(\alpha_n+\Omega_0(r_0)\right)}{r_0}dr_0,$$

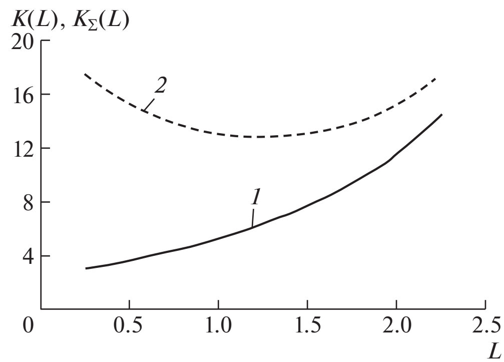

Рис. 2. Зависимости суммарной относительной удельной податливости зуба зубчатого колеса $K(L)$: линия – *1* и для однопарного зацепления $K_{\Sigma}(L)$: линия – *2*, от положения точки приложения нагрузки L.

$$\Delta_{\Theta 0} = \frac{(1-\mu^2)}{E\sin\varphi_m}\int\limits_{\rho_0}^{R_0}\frac{\sigma_{\Theta 0}(r_0,\varphi_m)\,h_0(r_0)\cos(\alpha_n+\Omega_0(r_0))\,dr_0}{r_0} + \frac{2(1+\mu)}{E}\int\limits_{\rho_O}^{R_O}\frac{\tau_{\Theta 0}(r_0,0)\,dr_0}{r_0}h_0^*\cos(\alpha_n+\Omega_0^*),$$

где $\rho_0 = R\sin\gamma$; $R_0 = H_0$ (H_0 – толщина обода колеса); $h_0(r_0) = \sqrt{(r_0+l)^2+(0.5s_n)^2}$; φ_m – угол, соответствующий максимальному значению напряжения $\sigma_{\Theta 0}$ ($\varphi_m = \pi/4$); $\Omega_0^* = \arcsin(0.5s_n/h_0^*)$; $h_0^* = \sqrt{(0.5s_n)^2+l^2}$; $\Omega_0(r_0) = \arcsin[0.5s_n/h_0(r_0)]$.

Перемещение, вызванное контактной податливостью зацепления δ_h ($\delta_h = k_h/E$, k_h – коэффициент контактной податливости [8]), $\Delta_h = 0.5q\delta_h$.

Суммарное перемещение точки приложения погонной силы q в направлении линии ее действия, вызванное податливостью зуба

$$\Delta = \Delta_V + \Delta_H + \Delta_\Theta + \Delta_{V0} + \Delta_{H0} + \Delta_{\Theta 0} + \Delta_h.$$

На рис. 2 представлен график зависимости суммарной относительной податливости зуба $\mathrm{K}(L) = E\Delta/q$ и суммарной относительной податливости однопарного зацепления $\mathrm{K}_{\Sigma}(L) = \Delta_{\Sigma}E/q = (\Delta+\overline{\Delta})E/q$ ($\overline{\Delta}$ – перемещение зуба парного колеса в направлении линии действия q) от положения точки приложения нагрузки $L = l/m$ (m – модуль зацепления) при $k_h = 4$. График построен для колес с числом зубьев $z = 50$, коэффициентом смещения исходного контура $x = 0$ и толщиной обода $H_0 = 3m$ (рекомендуемая толщина жесткого обода колеса $H_0 = 3m$–$5m$).

Расстояние от основания зуба парного колеса до точки приложения нагрузки к нему $\overline{l}$ определялось исходя из геометрии зацепления [9]

$$\overline{l} = \sqrt{r_b^2 + \left[a_W\sin\alpha_W - \sqrt{(r_f+l)^2 - r_b^2}\right]^2} - r_f,$$

где r_f – радиус окружности впадин колес; a_W – межосевое расстояние передачи; α_W – угол зацепления ($\alpha_W = 20°$).

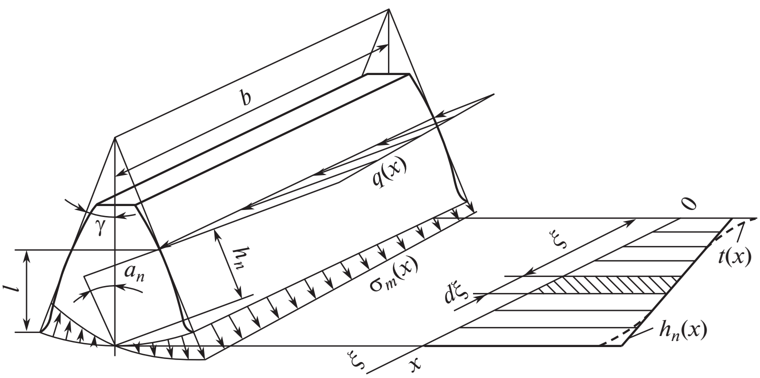

Рис. 3. К определению законов распределения нагрузки и напряжений изгиба по длине зуба колеса.

Для установления законов распределения нагрузки $q(x)$ и напряжений изгиба зубьев $\sigma(x)$ по их длине b при наличии угла начального неприлегания β рассмотрим напряженно-деформированное состояние зуба с учетом кручения его относительно продольной оси (рис. 3).

Уравнения связи угла начального неприлегания и деформаций зуба имеют следующий вид

$$x\Lambda\beta - \delta_W\left[q(x) - q(0)\right] = h_n[\varphi(x) - \varphi(0)] = \frac{h_n}{GI_K}\int_0^x \left[t(\xi) - h_n q(\xi)\right](x - \xi)\,d\xi,$$
$$\varphi(x) - \varphi(0) = \nu_F\left[t(x) - t(0)\right], \tag{1}$$

где Λ — отношение суммарной удельной податливости зуба рассматриваемого колеса к суммарной удельной податливости зацепления; $\Lambda = \delta/\delta_\Sigma = \Delta/\Delta_\Sigma$; G — модуль упругости второго рода; I_K — момент инерции поперечного сечения зуба при кручении относительно продольной оси (определяется по приближенной зависимости, как для стержня треугольного сечения: $I_K = H^4/(15\sqrt{3})$, где $H \cong 2.4m$ — высота равностороннего треугольника); h_n — плечо погонной нагрузки относительно центра изгиба зуба, $h_n = (R - \rho\cos\gamma - 0.5s_n\operatorname{tg}\alpha_n)\cos\alpha_n$; ν_F — удельная податливость зуба, определяемая через смещение точки приложения нагрузки относительно центра изгиба зуба Δ_F, $\nu_F = \varphi_F/t = (\Delta_F/h_n)/(qh_n)$; t и q — средние погонные момент изгиба и нормальная нагрузка ($t = qh_n$); δ_W — составляющая суммарной удельной податливости зуба, $\delta_W = (\Delta - \Delta_F)/q = \delta - \delta_F$.

Смещение точки приложения нагрузки относительно центра изгиба в основании зуба определим в соответствии с вышеприведенными зависимостями по формуле

$$\Delta_F = \Delta_H - \Delta_{\Theta\sigma} + \frac{(1-\mu^2)h^*\cos(\alpha_n + \Omega^*)}{E\sin\varphi_m}\int_{\rho_O}^{R_O}\frac{\left[\sigma_{\Theta 0}(r_0,\varphi_m) + \sigma_{H0}(r_0,\gamma_0)\sin\varphi_m\right]dr_0}{r_0} +$$
$$+\frac{2(1+\mu)h^*\cos(\alpha_n + \Omega^*)}{E}\int_{\rho_0}^{R_0}\frac{\tau_{\Theta 0}(r_0, 0)\,dr_0}{r_0},$$

где $h^* = \sqrt{(l + R - R\cos\gamma)^2 + (0.5s_n)^2}$, $\Omega^* = \arcsin\left[0.5s_n/h^*\right]$.

Таким образом, разность смещений точек приложения нагрузки к рассматриваемому зубу в произвольном сечении и начале координат в результате его кручения можно выразить через внутренний погонный момент и изгибную податливость

$$x\Lambda\beta - \delta_W\left[q(x) - q(0)\right] = \nu_F h_n\left[t(x) - t(0)\right] = \delta_F\,\frac{t(x) - t(0)}{h_n}. \tag{2}$$

Интегрирование этого уравнения с учетом уравнения статики $\int_0^b q(x)dz = \frac{1}{h_n}\int_0^b t(x)dx =$ $= qb$ позволяет выразить $t(0)$ через $q(0)$.

Подстановка выражения (2) в равенство (1) дает

$$q(x) = \psi^2\int\limits_0^x q(\xi)(x-\xi)\,d\xi + \Phi(x), \tag{3}$$

где $\psi = h_n\sqrt{\frac{\delta}{GI_K\delta_W\delta_F}}$, $\Phi(x) = q(0) + \frac{\Lambda\beta x}{\delta_W} + 0.5(\psi x)^2\left[\frac{\Lambda\beta}{\delta}\left(\frac{3b-2x}{6}\right) - q\right]$.

Уравнение (3) представляет собой неоднородное интегральное уравнение Вольтерра с ядром, зависящим от разности аргументов, решение которого методом операционного исчисления позволяет найти законы изменения погонной нагрузки и погонного момента с учетом угла перекоса, при контакте зубьев по всей их длине

$$q(x) = q + \frac{\Lambda\beta b}{\delta_F + \delta_W}\left[\frac{x}{b} - 0.5 + \frac{\delta_F}{\psi b\delta_W}\left(sh\psi x + \frac{1 - ch\psi b}{sh\psi b}ch\psi x\right)\right],$$

$$t(x) = qh_n + \frac{\Lambda\beta bh_n}{\delta_F + \delta_W}\left[\frac{x}{b} - 0.5 - \frac{1}{\psi b}\left(sh\psi x + \frac{1 - ch\psi b}{sh\psi b}ch\psi x\right)\right].$$

Найденный погонный момент $t(x)$ можно выразить через нормальные напряжения изгиба в основании зуба (рис. 2), причем зависимость близка к линейной

$$t(x) = D\sigma_m(x),$$

где $\sigma_m(x)$ – максимальное значение напряжения изгиба в произвольном поперечном сечении зуба; D – коэффициент пропорциональности. Поэтому отношение максимального погонного момента $t(b)$ к среднему $t = qh_n$ можно представить в виде равенства $K_F = \sigma_m(b)/\sigma_m$ (σ_m – среднее значение напряжения изгиба в крайних точках сечения).

В соответствии с этим и с учетом приведенных выше соотношений между податливостями зуба и зацепления определим максимальные значения силовых факторов и коэффициенты неравномерности их распределения

$$K_H = \frac{q(b)}{q} = 1 + \frac{0.5\beta b}{q\delta_\Sigma}\left[1 + \frac{2\delta_F}{\psi b\delta_W}\left(sh\psi b + \frac{ch\psi b - 1}{sh\psi b}ch\psi b\right)\right],$$

$$K_F = \frac{t(b)}{t} = 1 + \frac{0.5\beta b}{q\delta_\Sigma}\left[1 - \frac{2}{\psi b}\left(sh\psi b + \frac{ch\psi b - 1}{sh\psi b}ch\psi b\right)\right].$$

На рис. 4, 5 представлены графики изменения относительной нагрузки $Q(X) = q(X)/q$, относительного момента $T(X) = t(X)/t$ и соответствующих им коэффициентов неравномерности K_H и K_F в зависимости от безразмерных величин $\beta^* = \beta bE/q$, $B = b/m$, $X = x/b$.

Для определения коэффициентов неравномерности распределения нагрузки и напряжений изгиба K при произвольных значениях величин β^* и B с использованием графиков рис. 5 следует воспользоваться выражением, записанным с учетом линейно-

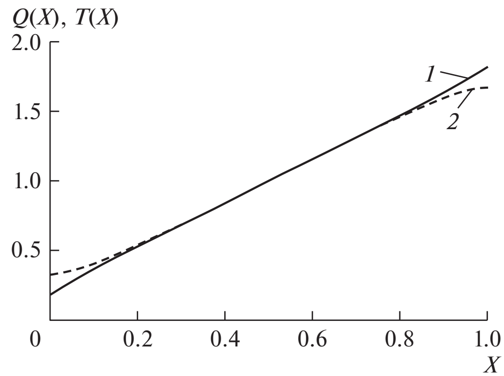

Рис. 4. Распределение относительной нагрузки (линия *1*) $Q(X)$ и относительного момента изгиба зуба (линия *2*) $T(X)$ по его длине при $\beta^* = \beta bE/q = 20$, $l = 1.25m$, $b = 10m$.

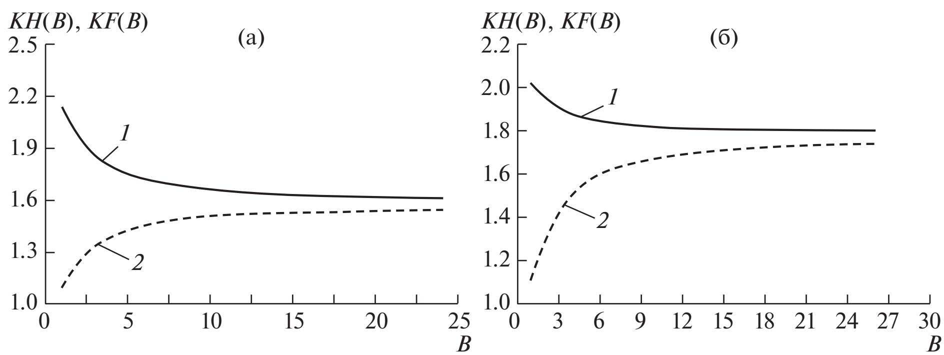

Рис. 5. Зависимость коэффициентов неравномерности распределения нагрузки (линия *1*) $K_H = KH$ и напряжений изгиба зуба (линия *2*) $K_F = KF$ от его относительной длины $B = b/m$ при $\beta^* = \beta bE/q = 20$: (а) – приложение нагрузки к вершине зуба ($l = 2.25m$); (б) – приложение нагрузки в полюсе зацепления ($l = 1.25m$).

го характера изменения указанных коэффициентов от угла начального неприлегания зубьев

$$K\left(l, B, \beta^*\right) = 1 + \frac{\left[K\left(l, B, \beta^* = 20\right) - 1\right]\beta^*}{20},$$

где $K\left(l, B, \beta^* = 20\right)$ – коэффициент неравномерности распределения нагрузки или напряжений изгиба, найденный в зависимости от фазы зацепления (параметр l) и относительной длины зуба B по графику рис. 5.

Анализ приведенных выше выражений и построенных по ним графиков показывает, что напряжения изгиба (или соответствующий им изгибающий момент) в отличие от нагрузки распределяются по длине зуба более равномерно. Это обусловлено кручением зуба и появлением в результате этого касательных напряжений в сечениях, перпендикулярных продольной оси x. Указанные напряжения создают поддерживающий эффект, передавая изгибающий момент от одного сечения к другому. При относительном угле начального неприлегания зубьев $\beta^* = \beta bE/q \le 50$ и их длине $b \ge 10m$ коэффициент неравномерности распределения нагрузки превышает коэффициент неравномерности распределения напряжений изгиба не более чем на 20%, при $b \geq 20m$ – не более чем на 11%. С ростом β^* разница указанных коэффициентов неравномерности возрастает.

Использование полученных зависимостей при расчете зубчатых передач на прочность позволяет с высокой степенью точности определить их несущую способность.

Выводы. 1. Деформативность зубьев колес и коэффициенты неравномерности распределения нагрузки и напряжений изгиба в значительной степени зависят от фазы однопарного зацепления, но мало изменяются с изменением наиболее часто используемых на практике значений коэффициентов смещения исходного контура и чисел зубьев колес. **2.** При отношении длины зуба к модулю зацепления не менее 20 и относительном угле начального неприлегания зубьев $\beta^* \leq 50$ коэффициент неравномерности распределения нагрузки превышает коэффициент неравномерности распределения напряжений изгиба не более чем на 11%. **3.** С ростом относительного угла начального неприлегания зубьев и уменьшением их длины разница коэффициентов неравномерности распределения нагрузки и напряжений изгиба возрастает.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ражиков В.Н., Беляев А.Н.* Учет деформации подшипников сателлитов при проверке геометрических показателей качества зацепления в цилиндрических эвольвентных зубчатых передачах внутреннего зацепления с малой разностью чисел зубьев // Вестник машиностроения. 2017. № 2. С. 38.

2. *Plekhanov F.I., Pushkarev A.E., Pushkarev I.A.* Influence of Layout Features and Parameters of a Planetary Gear on Its Dynamics and Strength Characteristics // Mechanisms and Machine Science. Springer. 2018. V. 51. P. 481.

3. *Ан И.К.* Распределение усилий между звеньями планетарного механизма типа K-H-V // Вестник машиностроения. 2016. № 5. С. 60.

4. *Drewniak I., Kopek I., Zawislak S.* Kinematical and Efficiency Analysis of Planetary Gear Trains by Means of Various Graph-Based Approaches // Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Mechanisms and Machine. Springer. 2016. V. 34. P. 263.

5. *Plekhanov F.I., Goldfarb V.I., Vychuzhanina E.F.* Load Distribution in Meshing of Planetary Gearweels and Its Influence on the Technical and Economic Performance of the Mechanism // Mechanisms and Machine Science. Springer. 2018. V. 51. P. 117.

6. *Тимофеев Г.А.* Проектирование приводов с двухступенчатыми волновыми зубчатыми передачами для следящих систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 32.

7. *Волков Г.Ю., Колмаков С.В.* Структурный синтез безводильных планетарных передач // Вестник машиностроения. 2014. № 4. С. 26.

8. *Нахатакян Ф.Г., Нахатакян Д.Ф.* Расчетный метод определения суммарной контактной деформации упругих тел конечных размеров на линейном контакте // Приводы и компоненты машин. 2016. № 1–2 (19). С. 17.

9. *Plekhanov F.I., Goldfarb V.I.* Rational Designs of planetary Transmissions, Geometry of gearing and Strength Parameters // Theory and Practice of Gearing and Transmissions. Mechanisms and Machine. Springer. 2016. V. 34. P. 285.