= МЕХАНИКА МАШИН ==

УДК 539.3:621.891

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА ПРОФИЛИРОВАННОГО РОЛИКА С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИИ ВХОДНОЙ ГРАНИЦЫ СМАЗОЧНОЙ ПЛЕНКИ

© 2021 г. М. Я. Пановко

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия e-mail: mpanovko@yandex.ru

> Поступила в редакцию 12.07.2020 г. После доработки 23.03.2021 г. Принята к публикации 26.04.2021 г.

Решается пространственная задача об упругогидродинамической смазке профилированного ролика с учетом сложной геометрии входной границы смазочной пленки. Данной постановкой моделируются условия обильной или недостаточной смазки, в которых могут находиться узлы трения, например, такие, как зубчатые передачи и роликовые подшипники качения. Система интегродифференциальных уравнений с граничными условиями и неравенствами, описывающая упругогидродинамический контакт, решалась итерациями на основе метода Ньютона. Полученные результаты демонстрируют значительное влияние геометрии входной границы на распределения давления и толщины смазочной пленки в зоне контакта. Показано, что там, где участки входной границы вдвинуты в зону контакта, возникают в направлении потока смазки зоны с меньшими значениями давления и толщины смазочной пленки по сравнению со случаем обильной смазки.

Ключевые слова: упругогидродинамический контакт, ролик, профилирование, входная граница, численное моделирование **DOI:** 10.31857/S0235711921040106

При численном анализе процессов в упругогидродинамическом (УГД) контакте входная граница смазочной пленки обычно задается на значительном расстоянии от центра контакта. Полагается, что при таком расположении входной границы контактирующие поверхности находятся в условиях обильной смазки. Для случая обильной смазки численными методами исследовались линейные (неограниченные по длине) и точечные смазанные контакты [1]. Однако в реальных узлах трения возможны ситуации (например, масляное голодание, нестабильный режим смазывания), при которых входная граница смазочной пленки (входной мениск) приближается к центру контакта.

Экспериментами показано, что толщина смазочной пленки в случае масляного голодания уменьшается и даже может достигнуть нуля в некоторых участках области контакта [2]. В численных исследованиях явление масляного голодания моделируется приближением входной границы смазочной пленки к центру контакта. Влияние геометрии и расположения входного мениска на параметры точечного УГД-контакта изучалось в работах [3–5]. Было показано, что недостаточная смазка приводит к уменьшению толщины смазочной пленки по сравнению со случаем обильной смазки. В работах [6–8] приводятся результаты решения задачи об УГД-контакте профилированного ролика для условий обильной смазки. Для моделирования режима обильной смазки входная граница смазочной пленки на расчетной сетке задавалась в виде прямой ли-

нии, которая параллельна центральной линии контакта ролика и расположена вдали от нее. Центральной линией контакта в этих задачах является совпадающий с осью координат отрезок прямой линии, по которому контактируют до начала деформации короткие несмазанные ролики. Начало координат принимается в качестве центра контакта. Численное решение задачи об УГД-контакте профилированного ролика с учетом сложной геометрии входной границы смазочной пленки получено в [9]. Входная граница составлялась из участков, которые находились как вдали от центральной линии контакта (оси координат), так и вблизи нее. Заданием сложной геометрии входной границы моделировались условия недостаточной смазки. Полагалось, что центральная часть ролика располагалась в зоне обильной смазки, при этом соответствующий прямолинейный участок входной границы задавался на удалении от центральной линии контакта. Из результатов работы [9] следовало, что толщина смазочной пленки в центре контакта (в начале координат) практически равна толщине смазочной пленки в режиме обильной смазки ролика, когда входная граница представляла собой прямую линию вдали от центральной линии контакта. Толщина смазочной пленки в центре контакта является одним из параметров, характеризующих УГД-контакт. Значения этого параметра могут изменяться в зависимости от реальных условий функционирования УГД-контакта. В связи с этим представляет интерес проведение численного эксперимента с целью определения параметров УГД-контакта для различных конфигураций входной границы смазочной пленки.

В настоящей статье на основе методики [9] проведено численное моделирование УГД-контакта профилированного ролика с целью определения влияния на его параметры, в частности, на толщину смазочной пленки в центре контакта для случаев, когда геометрия входной границы отличается от геометрии границы, заданной в [9].

Постановка задачи. Рассматривается стационарная изотермическая задача о смазке ролика со скругленным краем (рис. 1) [9] в условиях сложной геометрии входной границы, следуя постановке задачи, представленной в [9].

Полагается: смазочный материал — несжимаемая ньютоновская вязкая жидкость, толщина смазочной пленки мала по сравнению с характерными размерами области контакта, силы вязкого трения значительно больше инерционных сил, локально контактирующие тела заменяются упругими полупространствами. К ролику приложена сила $P = \pi a_H p_H l_c/2$, равная силе на участке l_c бесконечно длинного цилиндра $(a_H, p_H$ соответственно полуширина и максимальное герцевское напряжение в линейном контакте). Зависимость вязкости смазки µ от давления *p* задана в виде $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$, где μ_0 — вязкость при давлении окружающей среды, Q_0 — пьезокоэффициент вязкости. На рис. 1 h_0 — расстояние между смазанными поверхностями в начале декартовой системы координат 0xyz; $R_x(y)$ — радиус кривизны ролика, $R_{x0} = R_x(0)$; R_{y0} и R_{y1} — радиусы кривизны дуг образующей ролика; $y = l_c/2$ — сечение, в котором сопрягаются дуги образующей; $\mathbf{v}_1(v_{1x}, v_{1y})$ и $\mathbf{v}_2(v_{2x}, v_{2y})$ — скорости контактирующих поверхностей.

Математическая модель УГД-контакта представляет собой систему интегродифференциальных уравнений с граничными условиями и неравенствами. В безразмерной форме система имеет вид [9]

$$L(p; H_0) = \nabla \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) = 0,$$
⁽¹⁾

$$h(x,y) = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon_0 y^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) f_1(|y|) \theta(|y|)}{H_0} + \frac{1}{\pi H_0} \iint_{(S)} G(x,y,\xi,\eta) p(\xi,\eta) d\xi d\eta,$$
(2)

$$M(p) = \iint_{(S)} p(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{\pi}{2} l_c = 0,$$
(3)



Рис. 1. Схема смазанного контакта [9].

$$p|_{C} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{C_{e}} = 0, \tag{4}$$

 $L(p;H_0) = 0, \quad p > 0$ в зоне смазки;

 $L(p;H_0) < 0, \quad p = 0$ в зоне кавитации, (5)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad \mu = \mu(p),$$
$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$\Theta(|y|) = \begin{cases} 1, & \text{при} & |y| > l_c/2 \\ 0, & \text{при} & |y| \le l_c/2 \end{cases}.$$

В уравнении (2) $f_1(|y|) = (|y| - l_c/2)^2$ при гладком сопряжении дуг R_{y0} и R_{y1} , при негладком $f_1(|y|) = y^2 - (l_c/2)^2$. Неравенства (5) – условия дополнительности [10–12] – используются для определения местоположения выходной границы C_e области контакта S в процессе решения задачи. Граничные условия для давления ставятся на заданной входной границе C_i и на неизвестной границе выхода C_e , $C = C_i \cup C_e$. Выходная граница C_e отделяет зону смазки, где p > 0, от кавитационной, где полагается p = 0. Система (1)–(5) получена путем применения безразмерных переменных [9]

$$(x', y', \xi', \eta') = (x, y, \xi, \eta)/a_H, \quad p' = p/p_H, \quad h' = h/h_0,$$

$$\mu' = \mu/\mu_0, \quad H_0 = 2h_0 R_{x0}/a_H^2,$$

$$V = (24\mu_0 |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| R_{x0}^2)/p_H a_H^3, \quad P' = P/p_H a_H^2, \quad P = \pi p_H a_H l_c/2,$$

$$= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|, \quad \varepsilon_0 = R_{x0}/R_{y0}, \quad \varepsilon_1 = R_{x0}/R_{y1}, \quad Q_0' = Q_0 p_H.$$

Здесь p(x, y) и h(x, y) – давление и толщина смазочной пленки в зоне УГД-контакта; H_0 – безразмерная толщина пленки в центре контакта; ε_0 и ε_1 – параметры скругления; V – нагрузочно-скоростной параметр.

Численный метод. Численное моделирование УГД-контакта проводилось по методике [9], согласно которой для построения численного решения системы (1)–(5) ис-

v

пользовались итерационная процедура на основе метода Ньютона, а также представление уравнения Рейнольдса (1) в интегральной форме

$$L_1(p;H_0) = \int_{(l_{ij})} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})h \right] dl = 0.$$
(6)

Соотношение (6) записано для ячейки декартовой сетки в расчетной области (задается в виде прямоугольника), где (i, j) – узел сетки; l_{ij} – контур ячейки. Итерационная процедура согласно методу Ньютона записывается в виде

$$\frac{\partial L_1(p;H_0)}{\partial p}\bigg|_k \Delta p_{k+1} + \frac{\partial L_1(p;H_0)}{\partial H_0}\bigg|_k \Delta H_{0,k+1} = -L_1(p;H_0)\bigg|_k,$$
(7)

$$\frac{\partial M(p)}{\partial p}\Big|_{k} \Delta p_{k+1} = -M(p)\Big|_{k}, \qquad (8)$$

$$\Delta p_{k+1}|_C = 0,$$

$$_{+1} = p_{k+1} - p_k, \quad \Delta H_{0,k+1} = H_{0,k+1} - H_{0,k}.$$
(9)

Здесь уравнения (3), (4), (6) линеаризуются около решения $(p(x, y), H_0)_k$, где k – номер итерации. Система (7)–(8) является исходной для вывода системы разностных уравнений, решаемых относительно приращений Δp_{k+1} , $\Delta H_{0, k+1}$

 Δp_k

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{nn} & (b_q)_n \\ (c_r)_n & 0 \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_n \\ \Delta H_0 \end{pmatrix}_{k+1} = - \begin{pmatrix} (L_1(p_r; H_0)_n \\ M(p_r) \end{pmatrix}_k$$

Здесь $(a_{qr})_{nn}$, $(b_q)_n$, $(c_r)_n$ – элементы матрицы порядка (n + 1); n – число узлов области контакта, где p > 0, (q, r = 1, ..., n). Сингулярный интеграл в (2) вычислялся по кубатурной формуле [13].

Результаты расчетов. В расчетах использовались те же условия численного моделирования, что и в работе [9]. Однако конфигурация входной границы и ее расположение в области контакта задавались иными. Конфигурация границы представляла собой чередование прямолинейных и криволинейных участков, которые моделировали режим недостаточной смазки УГД-контакта. Прямолинейные участки располагались вдали от центральной линии контакта (оси *y*). Криволинейные участки определяли области контакта без смазки вблизи оси *y*. В этих областях давление p = 0. В настоящей статье расчеты проводились для двух вариантов геометрии входной границы. Основное различие между ними заключалось в расположении областей без смазки относительно плоскости симметрии ролика y = 0. Рассматривались следующие случаи: плоскость симметрии ролика y = 0.

Расчеты проводились для симметричного относительно плоскости y = 0 цилиндрического ролика со скругленным торцом на декартовой сетке в плоскости (x, y) с числом узлов 34 × 84 при следующих параметрах: V = 0.1, $Q_0 = 3$, $v_x = 1$, $v_y = 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.1$. При $y = l_c/2 = 20$ прямолинейная часть образующей цилиндрического ролика сопрягается гладким образом со скругленной частью. В расчетах [9] для ролика при обильной смазке значение безразмерной толщины смазочной пленки $H_0 = 0.1692$.

На рис. 2–4 представлены результаты решения УГД-задачи в случаях обильной и недостаточной смазки.

Распределения давления и толщины смазочной пленки (зазор) показаны в виде поверхностей на рис. 2 и изолиний на рис. 3, а также на рис. 4 в виде распределений p(x), h(x) в сечении y = const, где $y < l_c/2$, и p(y), h(y) в сечении x = 0. Распределения давления и зазора на рис. 4a, б получены из расчета, когда плоскость симметрии y = 0 проходила через область без смазки. На рис. 4в, г распределения давления и зазора получены из расчета, когда область без смазки находилась вдали от плоскости симметрии



Рис. 2. Распределения давления (а), (б), (в) и толщины смазочной пленки (г), (д), (е) в УГД-контакте: (а), (г) – обильная смазка; (б), (д) (в), (е) – недостаточная смазка [9].

y = 0. Из решения УГД-задачи при условии, что плоскость симметрии y = 0 проходит через область без смазки (рис. 26, д, рис. 36, д), следует, что безразмерная толщина пленки в центре контакта $H_0 = 0.09819$.

При сдвиге области без смазки в направлении оси у на заданное расстояние от плоскости симметрии y = 0 (рис. 2в, е; рис. 3в, е) безразмерная толщина пленки в центре контакта $H_0 = 0.1683$. При увеличении этого расстояния H_0 приближается к значению $H_0 = 0.1692$ для режима обильной смазки. В расчетах работы [9] $H_0 = 0.1689$ при расстоянии вдвое большем. На рис. 2а, г; рис. 3а, г [9] представлены характерные особенности распределений давления и толщины смазочной пленки в тяжелонагруженных сосредоточенных УГД-контактах в режиме обильной смазки: пик давления и сужение зазора в окрестности выходной границы смазочной пленки, уплощение зазора в центральной области контакта. Отмеченные особенности наблюдаются в областях контактной зоны с прямолинейными участками входной границы в случае режимов недостаточной смазки. Это видно на рис. 26, д, в, е и рис. 36, д, в, е. На этих рисунках прямолинейные участки входной границы совпадают с входной границей в случае режима обильной смазки. Расположение выходной границы $x_{e}(y)$, отделяющей область смазки (p > 0) от области кавитации (p = 0), отчетливо видно на рис. 3a, б, в, где область кавитации выделена светло-серым тоном. Области без смазки (p = 0), у которых входная граница расположена вблизи центральной линии контакта, выделены темно-серым тоном (рис. 3б, в). На участке $y > l_c/2$ проявляется краевой эффект – рост и последующее снижение давления. Обратная картина наблюдается в распределении толщины смазочной пленки. Конфигурация выходной границы $x_{e}(y)$ демонстрирует увеличение ширины зоны контакта из-за увеличения давления в торцевой зоне (рис. 3а, б, в) и уменьшение ее ширины в областях контакта из-за приближения областей без смазки к оси у, отмеченных темно-серым тоном на рис. 36, в.



Рис. 3. Изобары (а), (б), (в) и линии уровня толщины смазочной пленки (г), (д), (е) в УГД-контакте: (а), (г) – обильная смазка; (б), (д), (в), (е) – недостаточная смазка [9].

В областях контактной зоны с криволинейными участками входной границы в распределениях p(x), h(x) также наблюдаются особенности, характерные для УГД-контакта в режиме обильной смазки (рис. 4а, в, кривые 2 и 4). Распределения p(y), h(y) в этих областях отличаются от распределений в режиме обильной смазки (рис. 4б, г, кривые 2 и 4). Области контакта без смазки, где p = 0, заметно изменяют общую картину распределений давления и зазора. Кроме того, из-за различного расположения входной границы относительно плоскости симметрии y = 0 следуют отличия соответствующих распределений p(x, y) и h(x, y) в окрестности плоскости симметрии y = 0 (рис. 26, в и рис. 2д, е; рис. 36, в и рис. 3д, е).

На рис. 2–4 показано, что приближение криволинейных участков входной границы к центральной линии контакта приводит к появлению в распределениях p(x, y) и h(x, y) зон с меньшими значениями давления (рис. 26, в) и толщины смазочной пленки (рис. 2д, е) по сравнению со случаем обильной смазки (рис. 2а, г). Этот эффект также демонстрируют картины изолиний функций p(x, y) и h(x, y) на рис. 36, в, д, е, на которых видно, как криволинейные участки входной границы изменяют монотонный характер изолиний, представленных на рис. 3а, г. Распределения p(x), h(x) в сечении y = const (рис. 4a, в, кривые 2 и 4) и p(y), h(y) в сечении x = 0 (рис. 46, г, кривые 2 и 4) показывают, что в зонах контакта с недостаточной смазкой снижается давление, при этом зазор уменьшается практически в два раза по сравнению с режимом обильной смазки.

При сопоставлении численных значений толщины пленки в режимах обильной и недостаточной смазки (рис. 4, кривые 3 и 4) учитывалось, что эти распределения в расчетах нормированы на разные размерные значения толщины пленки в начале координат (в центре контакта) h_0 , т.е. в условиях обильной смазки $h'_1 = h_1/h_{01}$, где $h_{01} = (a_H)^2 H_{01}/2R_{x0}$, а в условиях недостаточной смазки $h'_2 = h_2/h_{02}$, где $h_{02} = (a_H)^2 H_{02}/2R_{x0}$. Здесь $H_{01} = 0.1692$ – безразмерная толщина смазочной пленки в режиме обильной смазки, $H_{02} = 0.09819$ – безразмерная толщина смазочной плёнки в режиме недостаточной смазки, когда по условиям численного моделирования плоскость симметрии



Рис. 4. Распределения давления и толщины смазочной пленки (а) в плоскости сечения y = 9.055, (в) в плоскости сечения y = 11.36; (б), (г) в плоскости сечения x = 0: I, 3 - давление и зазор соответственно при обильной смазке; <math>2, 4 - давление и зазор соответственно при недостаточной смазке [9].

y = 0 проходит через зону без смазки. В случае, когда в режиме недостаточной смазки зона без смазки отодвинута от плоскости симметрии y = 0, $H_{02} = 0.1683$. С учетом известных значений H_{01} и H_{02} можно нормировать распределение h_2 на значение h_{01} . Для значений h_2'' , нормированных на h_{01} , получаем $h_2'' = h_2' H_{02}/H_{01}$. Данная перенормировка позволяет адекватно сравнивать распределения безразмерных толщин пленки h_1' и h_2'' . На рис. 4 (кривые 4) представлены распределения толщины пленки при режиме недостаточной смазки h_2'' , нормированные на толщину пленки в начале координат при режиме обильной смазки h_{01} . Отметим, что на рис. 3д, е значения изолиний соответствуют распределению h_2' . С учетом множителя H_{02}/H_{01} можно получить значения изолиний для h_2'' . Для режима недостаточной смазки, когда плоскость симметрии y = 0проходит через зону без смазки, $H_{02}/H_{01} \cong 0.58$. В случае, когда зона без смазки отодвинута от плоскости симметрии $H_{02}/H_{01} \cong 0.995$.

Заключение. Проведено численное моделирование УГД-контакта профилированного ролика с учетом сложной геометрии входной границы смазочной пленки. Кон-

тур входной границы включал участки границы вдали от центральной линии контакта (оси у) и вблизи нее. Расчеты проводились для двух вариантов расположения входной границы. Основное различие между ними заключалось в расположении областей без смазки (здесь участок границы С, расположен вблизи оси у) относительно плоскости симметрии ролика y = 0. Рассмотрены случаи, когда плоскость симметрии ролика y = 0 проходит через область как без смазки (p = 0), так и со смазкой (p > 0). Причем во втором случае область без смазки расположена вдали от плоскости y = 0. Показано, что возникновение в УГД-контакте несмазанных областей приводит к появлению в направлении потока смазки зон с меньшими значениями давления и толщины смазочной пленки по сравнению со случаем обильной смазки. Из расчетов следует, что при увеличении расстояния области контакта без смазки от плоскости симметрии ролика y = 0 значения безразмерной толщины смазочной пленки H_0 приближаются к ее значениям в режиме обильной смазки. С уменьшением этого расстояния наблюдается обратный эффект. Так, например, $H_{02}/H_{01} \cong 0.58$, где H_{02} – значение H_0 для случая, когда плоскость симметрии ролика y = 0 проходит через зону контакта без смазки (p = 0), H_{01} – значение H_0 в случае обильной смазки (p > 0). Полученные распределения давления и толщины смазочной пленки могут использоваться для расчетного анализа трения в контакте и поля тензора напряжений в подповерхностном слое. Обобщение изложенного вычислительного алгоритма позволяет рассмотреть ряд важных задач, а именно: о нестационарных режимах, теплообмене в контакте, шероховатости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Dowson D., Ehret P.* Past, present and future studies in elastohydrodynamics // Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J: J. Engineering Tribol. 1999. V. 213. № J5. P. 317.
- 2. Wedeven L.D., Evans D., Cameron A. Optical analysis of ball bearing starvation // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1971. V. 93. № 3. P. 349.
- 3. *Hamrock B.J., Dowson D.* Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Part 4 starvation results // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1977. V. 99. № 1. P. 15.
- 4. *Kudish I.I., Panovko M.Ya.* Influence of an inlet oil meniscus geometry on parameters of a point elastohydrodynamic contact // Trans. ASME. J. Tribology. 1997. V. 119. № 1. P. 112.
- 5. *Venner C.H., Lubrecht A.A.* Multigrid techniques: a fast and efficient method for the numerical simulation of elastohydrodynamically lubricated point contact problems // Proc. Instn. Mech. Engrs. Part J: J. Engineering Tribol. 2000. V. 214. № J. P. 43.
- 6. *Mostofi A., Gohar R.* Elastohydrodynamic lubrication of finite line contacts // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1983. V. 105. № 4. P. 82.
- 7. *Park T.J., Kim K.W.* Elastohydrodynamic lubrication of a finite line contact // Wear. 1998. V. 223. № 1. P. 102.
- 8. *Пановко М.Я*. Упругогидродинамическая смазка цилиндрического ролика со скругленным краем // Изв. АН. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 40.
- 9. Пановко М.Я. Влияние геометрии входной границы смазочной пленки на напряженное состояние в подповерхностном слое упругогидродинамического контакта профилированного ролика // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2020. № 1. С. 141.
- 10. *Kostreva M.M.* Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. V. 4. № 4. P. 377.
- 11. Oh K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88.
- 12. Oh K.P., Li C.H., Goenka P.K. Elastohydrodynamic lubrication of piston skirts // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 109. № 2. P. 356.
- Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.