ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 5, с. 49–61

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.13,533.6.013.42

АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ЛЕНТЫ В ЛАМИНАРНОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

© 2021 г. А. А. Афанасьева[1,2], А. М. Гуськов[1,2], Г. Я. Пановко[1,2,*]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

[2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**e-mail: gpanovko@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.04.2021 г.
После доработки 01.06.2021 г.
Принята к публикации 24.06.2021 г.

В статье исследуются нелинейные аэроупругие колебания тонкой плоской ленты в ламинарном воздушном потоке. В качестве расчетной схемы принимается длинная плоская мембрана с двумя струнами, закрепленными по ее длинным краям, к которым приложены растягивающие усилия. Воздушный поток направлен вдоль плоскости мембраны. Исследуются поперечно-крутильные колебания, возникающие при действии аэродинамических сил. Получены связанные дифференциальные уравнения в безразмерной форме, в которых изгибная и крутильная жесткости системы обеспечиваются усилиями натяжения струн и крутящего момента от подъемной силы. Решение задачи представлено в соответствии с методом Галеркина. Выполнен анализ устойчивости и выявлены: бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа (появление флаттера ленты в потоке воздуха), бифуркация Эйлера (дивергенция ленты). Определена зависимость критической скорости и частоты колебаний при возникновении флаттера в зависимости от силы натяжения ленты. Исследовано закритическое поведение системы и установление автоколебательного режима, для которого определена его частота и амплитуда колебаний.

Ключевые слова: тонкая лента, мембрана, струна, изгибно-крутильные колебания, аэроупругие колебания, флаттер, автоколебания

DOI: 10.31857/S0235711921050023

В современных технических системах для реализации подъемной и/или движущей силы широко применяются воздухонепроницаемые тонкостенные элементы с практически нулевой изгибной жесткостью (ленты, мембраны, обшивки корпусов, паруса), находящиеся под действием воздушного потока [1–4]. При определенных соотношениях скорости набегающего потока и условий закрепления в таких элементах могут возникать аэроупругие колебания по типу флаттера [1–3, 5, 6]. Аналогичные явления могут возникать и в других тонкостенных конструкциях.

В одних случаях эти колебания являются крайне нежелательным и, даже, весьма опасным явлением, приводящим к потере несущей способности и прочности конструкции [2, 6]. В других случаях возбуждение автоколебаний можно использовать в технических устройствах, например, для генерации электрической энергии, так как это реализовано в системе “Windbelt” [7–11]. В устройствах типа “Windbelt” колеблющаяся лента с постоянными магнитами, находясь в потоке воздуха, периодически взаимодействует с неподвижными катушкам индуктивности, в которых генерируется электрический ток [7].

Вопросам динамического поведения тонких элементов с нулевой изгибной жесткостью в воздушном потоке и выявлению пороговых (критических) значений скорости воздушного потока, при котором возникают колебания (или дивергенция, приводящая к статическому "выворачиванию"), посвящена обширная учебная и специальная литература, например [1, 2, 4–6]. Вместе с тем, вопросы, связанные с исследованиями колебаний тонкой ленты в зависимости от ее натяжения и скорости набегающего потока, изучены недостаточно подробно. Известные расчетные модели основаны на различных упрощающих допущениях, ограничивающие исследование закритического поведения ленты [12–14]. В работах [15, 16] изгибная жесткость тонкой ленты определяется ее продольным натяжением, а крутильная жесткость учитывается модулем сдвига, значение которого не определено и требует дополнительной верификации или уточнения расчетной модели.

В настоящей статье мы попытались исправить эту неопределенность, связанную с необходимостью учета крутильной жесткости через заданные усилия натяжения ленты и крутящего момента от подъемной силы, за счет разработки новой модели, описывающей совместные изгибно-крутильные колебания. Таким образом, целью настоящей статьи является моделирование и анализ динамики самовозбуждающихся изгибно-крутильных колебаний ленты, находящейся в воздушном потоке.

Постановка задачи. Тонкая лента с погонной массой m, длиной l и шириной a нагружена растягивающими усилиями T (рис. 1а). Распределение усилий T по концевым сечениям ленты определяется условиями их приложения, которые могут иметь произвольный характер (в общем случае это распределение трудно идентифицируется). На ленту действует воздушный поток с постоянной скоростью U, направленный параллельно плоскости ленты, и аэродинамическая подъемная сила.

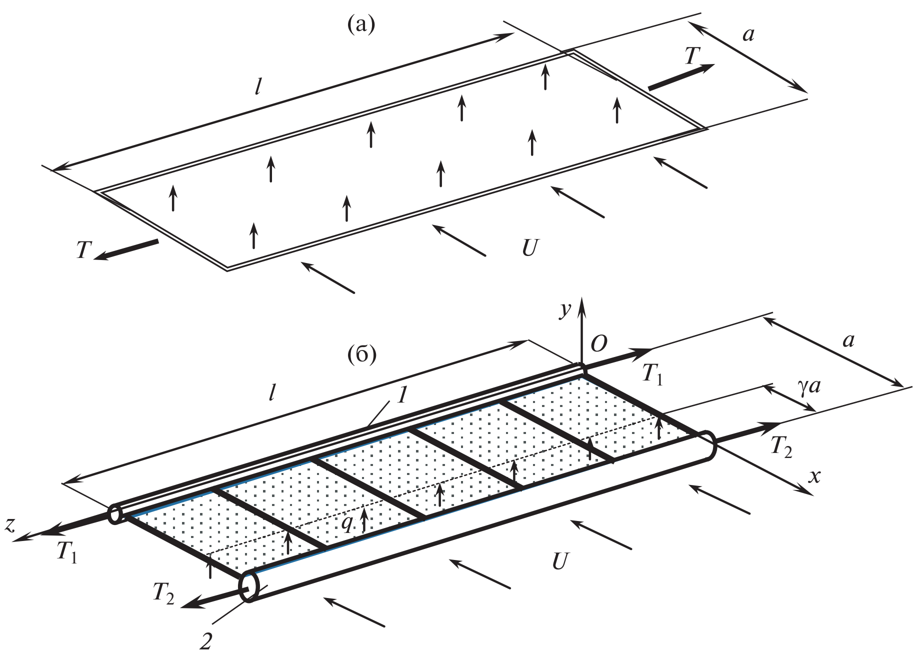

Рис. 1. Лента в воздушном потоке – (а) и ее расчетная схема – (б).

Задача сводится к определению зависимости критической скорости потока воздуха U_{crit} от усилия натяжения T, от распределения массы по ширине ленты, а также от геометрии поперечного сечения (положения центра давления) и анализу периодических движений ленты в закритической области (определению частот и распределения амплитуд ее колебаний). Существенной особенностью задачи является необходимость учета изгибной и крутильной жесткости ленты через заданные усилия ее натяжения.

Расчетная схема. Лента длиной l и шириной a моделируется плоской тонкой мембраной с двумя параллельными струнами (рис. 1б, позиции *1* и *2*), жестко закрепленными по краям мембраны. Предполагается, что $l > a$. Для общности задачи и расширения возможностей анализа будем считать, что струны имеют различные погонные массы m_1, m_2, причем $m_1 + m_2 = m$.

Каждая из струн нагружена растягивающими усилиями T_1, T_2, причем $T_1 + T_2 = T$, $T_1 = \beta T$, где β – параметр, характеризующий точку приложения растягивающего усилия по ширине ленты. На мембрану действует распределенная подъемная сила q, вызванная набегающим воздушным потоком, которая приведена к линии центров давления. Предложенная расчетная схема отражает возникновение изгибной и крутильной жесткости ленты при действии растягивающих усилий, без ограничений на их распределение по концевым сечениям ленты.

Введем абсолютную систему отсчета $Oxyz$ с началом в точке O, совпадающей с одним из концов струны *1*: ось Oz совпадает с осью струны *1*, ось Ox проходит через одноименные концы струн, ось Oy перпендикулярна плоскости xz (рис. 1б).

Подъемную силу, действующую на ленту, распределим по обеим струнам – q_1 и q_2 (индексы соответствуют номеру струны), причем $q_1 + q_2 = q$. На рис. 2 показано произвольное сечение принятой расчетной схемы ленты, где штриховыми линиями показано возможное перемещение струн *1* и *2*. Центр давления подъемной силы в поперечном сечении полотна расположен на расстоянии γa от правого края (рис. 2, точка P). Таким образом, $q_1 = \gamma q$, $q_2 = (1 - \gamma)q$. Случай $\gamma = 0$ соответствует приложению распределенной нагрузке к струне с номером *2*, на краю со стороны набегающего потока. Заметим, что для прямоугольного аэродинамического профиля, находящегося в дозвуковом воздушном потоке известно точное положение центра давления подъемной силы: $\gamma = 1/4$ [2, 17].

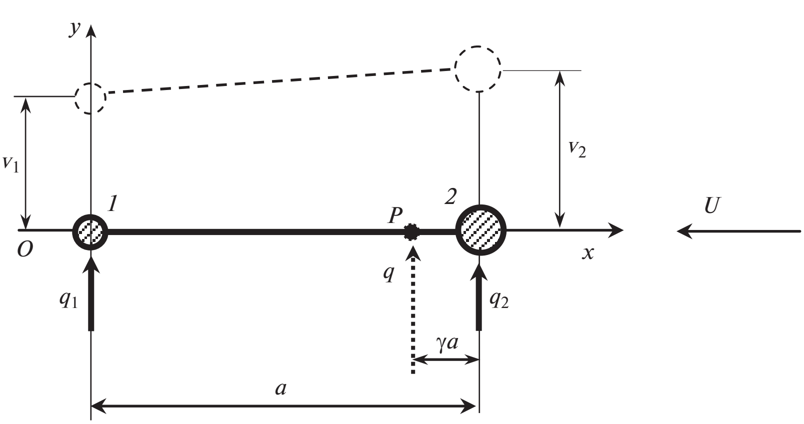

Рис. 2. Поперечное сечение расчетной схемы ленты.

Уравнения движения. Уравнения поперечных колебаний относительно прогибов $v_i(t, z)$, $i = 1, 2$ двух граничных струн в направлении вертикальной оси Oy, растянутых усилиями T_1, T_2 и нагруженных поперечными распределенными силами q_1, q_2 запишем в виде [19, 20]

$$m_i \ddot{v}_i(t,z) - T_i v_i''(t,z) = q_i, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

где $\ddot{v}_i \triangleq \dfrac{\partial^2 v_i(t,z)}{\partial t^2}$, $v_i'' \triangleq \dfrac{\partial^2 v_i(t,z)}{\partial z^2}$, $i = 1, 2$; i – номер струны.

Переход к эквивалентной струне. Введем в рассмотрение приведенную (эквивалентную, оснащенную) струну, расположенную в барицентре обеих струн вдоль оси Ox ленты на расстоянии αa от правого края и на расстоянии $(1 - \alpha)a$ от левого края (рис. 3, точка M). Заметим, что барицентр является общим центром масс поперечных сечений обеих струн.

Связь между основными характеристиками компонент эквивалентной струны выражается через безразмерные параметры α, β, γ.

$$\begin{gathered} m = m_1 + m_2, \quad m_1 = \alpha m, \quad m_2 = (1-\alpha)m, \\ T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \beta T, \quad T_2 = (1-\beta)T, \\ q = q_1 + q_2, \quad q_1 = \gamma q, \quad q_2 = (1-\gamma)q, \quad \gamma = 1/4. \end{gathered} \tag{2}$$

Прогиб v эквивалентной струны вдоль оси Oy и угол поворота ϑ вокруг оси Oz определяются через прогибы двух граничных струн v_1, v_2

$$\begin{gathered} v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2, \quad \sin(\vartheta) = (v_2 - v_1)/a \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 = v - (1-\alpha)a\sin(\vartheta), \quad v_2 = v + \alpha a \sin(\vartheta). \end{gathered} \tag{3}$$

В дальнейшем будем считать угол поворота ϑ достаточно малым, т.е. $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$; тогда из (3)

$$v_1 = v - (1-\alpha)a\vartheta, \quad v_2 = v + \alpha a \vartheta. \tag{4}$$

Подставим соотношения (4) в уравнения (1)

$$\begin{cases} \alpha m\left(\ddot{v} - (1-\alpha)a\ddot{\vartheta}\right) - \beta T\left(v'' - (1-\alpha)a\vartheta''\right) = \gamma q, \\ (1-\alpha)m\left(\ddot{v} + \alpha a\ddot{\vartheta}\right) - (1-\beta)T\left(v'' + \alpha a \vartheta''\right) = (1-\gamma)q. \end{cases} \tag{5}$$

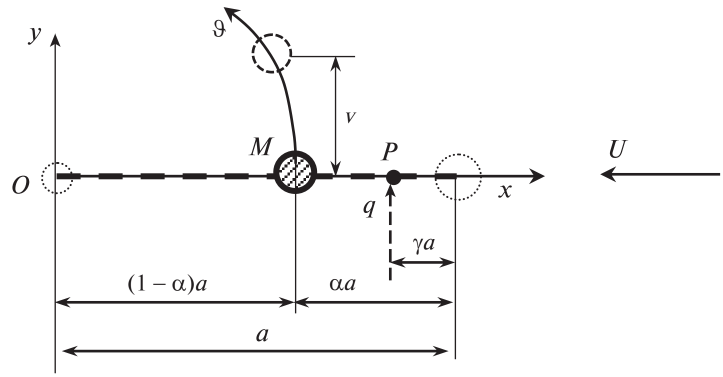

Рис. 3. Схема сечения эквивалентной струны.

Из уравнений (5) находятся выражения для линейного и углового ускорения элемента эквивалентной струны

$$\ddot{v} = \frac{T}{m}\left[v'' + (\alpha-\beta)\,a\vartheta''\right] + \frac{q}{m},$$
$$\ddot{\vartheta} = \frac{T}{am}\left[\frac{\alpha-\beta}{\alpha(1-\alpha)}v'' + \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}a\vartheta''\right] + \frac{q}{am}\frac{\alpha-\gamma}{\alpha(1-\alpha)}. \tag{6}$$

Первое уравнение (6) представляет собой уравнение поперечных колебаний эквивалентной струны

$$m\ddot{v} = T\left[v'' + (\alpha-\beta)\,a\vartheta''\right] + q. \tag{7}$$

Умножая второе уравнение (6) на момент инерции вращения $\alpha(1-\alpha)ma^2$ вокруг оси Oz, получим уравнение крутильных колебаний эквивалентной струны

$$\alpha(1-\alpha)\,ma^2\ddot{\vartheta} = aT\left[(\alpha-\beta)\,v'' + \left((1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta)\right)a\vartheta''\right] + (\alpha-\gamma)\,aq. \tag{8}$$

Уравнения (7), (8) показывают, что поперечные и крутильные колебания связаны друг с другом и эта связь зависит от распределения масс — параметра α, распределения усилий по ширине ленты — параметра β и от геометрии аэродинамического профиля — параметра γ.

В зависимости от соотношений параметров α, β, γ можно выделить три характерных модельных ситуации для ленты прямоугольного сечения ($\gamma = 1/4$): 1) случай симметричного распределения масс и усилий: $\alpha = \beta = 1/2$; 2) дальняя по потоку кромка ленты (струна *1*) более натянута: $\alpha = 1/2$, $\beta > 1/2$; 3) передняя по потоку кромка ленты (струна *2*) более натянута: $\alpha = 1/2$, $\beta < 1/2$.

В общем случае распределенная нагрузка q зависит от динамического угла атаки ϑ_{dyn} и имеет следующий вид [1, 2]

$$q = \frac{\rho U^2}{2}aCf\left(\vartheta_{\text{dyn}}\right), \tag{9}$$

где $\rho U^2/2$ — скоростной напор и ϑ_{dyn} — динамический угол атаки, ρ — плотность воздуха, C — безразмерная константа. Динамический угол атаки в соответствии с [1] определяется как

$$\vartheta_{\text{dyn}} = \vartheta - \frac{\dot{v} + (\alpha-\gamma)\,a\dot{\vartheta}}{U}. \tag{10}$$

При этом выражение $\dot{v} + (\alpha-\gamma)\,a\dot{\vartheta}$ является поперечной скоростью центра давления. Зависимость $f\left(\vartheta_{\text{dyn}}\right)$ определяется экспериментально и часто ее принимают в виде кубического полинома [1—3]

$$f\left(\vartheta_{\text{dyn}}\right) = \vartheta_{\text{dyn}} - \varepsilon\frac{\vartheta_{\text{dyn}}^3}{3!}. \tag{11}$$

Величины ε, γ являются экспериментальными константами, которые зависят от формы обтекаемого профиля.

Переход к безразмерным переменным. Введем следующие масштабы

$$t = T_*\tau, \quad z = l\zeta, \quad v = a\xi, \quad \dot{r} \triangleq \frac{\partial r}{\partial\tau}, \quad r' \triangleq \frac{\partial r}{\partial\zeta}, \tag{12}$$

где r — переменные задачи. После подстановки (12) в уравнения (6) получаем

$$\ddot{\xi} = \frac{T_*^2 T}{l^2 m}\left[\xi'' + (\alpha - \beta)\vartheta''\right] + \frac{T_*^2 q}{am},$$
$$\ddot{\vartheta} = \frac{T_*^2 T}{l^2 m}\left[\frac{\alpha - \beta}{\alpha(1-\alpha)}\xi'' + \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha - \beta)}{\alpha(1-\alpha)}\vartheta''\right] + \frac{T_*^2 q}{am}\frac{\alpha - \gamma}{\alpha(1-\alpha)}. \quad (13)$$

Масштаб по времени определим из равенства единице множителей перед первыми слагаемыми в (13)

$$\frac{T_*^2 T}{l^2 m} = 1 \Rightarrow T_* = l\sqrt{\frac{m}{T}}. \quad (14)$$

Тогда безразмерная аэродинамическая нагрузка $\psi \sim q$ с учетом (13)

$$\psi = \frac{T_*^2 q}{am} = \frac{l^2}{aT}\frac{\rho U^2}{2} aCf\left(\vartheta_{\text{dyn}}\right) = \frac{\mathrm{N}^2}{2} Cf\left(\vartheta_{\text{dyn}}\right),$$
$$\vartheta_{\text{dyn}} = \vartheta - \frac{\dot{v} + (\alpha - \gamma)a\dot{\vartheta}}{U} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{\xi} + (\alpha - \gamma)\dot{\vartheta}\right], \quad (15)$$
$$\mathrm{A} = a\sqrt{\frac{\rho}{m}}, \quad \mathrm{N} = Ul\sqrt{\frac{\rho}{T}}.$$

В этих выражениях параметр N представляет собой безразмерную скорость набегающего потока, параметр A — отношение массы воздуха, увлекаемой лентой, к массе ленты.

Анализируя безразмерные параметры (14), (15), можно выявить влияние сил натяжения ленты на период осцилляций T_{crit} и скорость набегающего потока воздуха при достижении критического состояния U_{crit} — бифуркации Пуанкаре—Андронова—Хопфа

$$T_{\text{crit}} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad U_{\text{crit}} \sim \sqrt{T}. \quad (16)$$

С учетом безразмерных параметров (15) уравнения изгибных и крутильных колебаний эквивалентной струны принимают вид

$$\ddot{\xi} = \xi'' + (\alpha - \beta)\vartheta'' + \psi,$$
$$\ddot{\vartheta} = d_1\xi'' + d_2\vartheta'' + d_3\psi, \quad (17)$$

где коэффициенты d_t, $t = 1, 2, 3$ зависят от конструкции гибкой ленты (устройства эквивалентной струны) — параметров α, β, γ

$$d_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_2 = \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha - \beta)}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_3 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha(1-\alpha)}. \quad (18)$$

Уравнения (7), (8) или (17), (18) показывают, что поперечные и крутильные колебания связаны друг с другом и эта связь зависит от распределения масс — параметра α, распределения усилий по ширине ленты — параметра β и от геометрии аэродинамического профиля — параметра γ. В частности, если точка приложения результирующего усилия натяжения — центр жесткости, совпадает центром масс поперечного сечения

($\beta = \alpha$), то связь крутильных и изгибных колебаний осуществляется только аэродинамическими силами

$$\ddot{\xi} = \xi'' + \psi, \quad \ddot{\vartheta} = \vartheta'' + d_3\psi,$$
$$d_3 = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha(1-\alpha)}, \quad \psi = \frac{\mathrm{N}^2}{2} Cf(\vartheta_{\mathrm{dyn}}), \quad \vartheta_{\mathrm{dyn}} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{\xi} + (\alpha-\gamma)\dot{\vartheta}\right]. \tag{19}$$

Если центр масс совпадает с центром давления, $\alpha = \gamma$, то уравнения динамики (17), (18) принимают вид

$$\ddot{\xi} = \xi'' + (\alpha - \beta)\vartheta'' + \psi, \quad \ddot{\vartheta} = d_1\xi'' + d_2\vartheta'',$$
$$d_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha(1-\alpha)}, \quad d_2 = \frac{(1-\alpha)\beta + \alpha(\alpha-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}, \tag{20}$$
$$\psi = \frac{\mathrm{N}^2}{2} Cf(\vartheta_{\mathrm{dyn}}), \quad \vartheta_{\mathrm{dyn}} = \vartheta - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\dot{\xi}$$

и динамический угол атаки ϑ_{dyn} не зависит от $\dot{\vartheta}$.

Краевые условия соответствуют условиям жесткого закрепления концевых сечений ленты (эквивалентной струны) при $z = 0$, $z = l$

$$\xi(\tau,\zeta): \quad \xi(\tau,0) = \xi(\tau,1) = 0,$$
$$\vartheta(\tau,\zeta): \quad \vartheta(\tau,0) = \vartheta(\tau,1) = 0. \tag{21}$$

Уравнения в вариациях около недеформированного состояния. Положим

$$X(\tau,\zeta) \stackrel{\Delta}{=} \delta\xi(\tau,\zeta), \quad Y(\tau,\zeta) \stackrel{\Delta}{=} \delta\vartheta(\tau,\zeta). \tag{22}$$

Из уравнений (17), (18) получаем уравнения в вариациях

$$\ddot{X} = X'' + (\alpha-\beta)Y'' + \frac{C\mathrm{N}^2}{2}\left\{Y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{X} + (\alpha-\gamma)\dot{Y}\right]\right\},$$
$$\ddot{Y} = d_1X'' + d_2Y'' + d_3\frac{C\mathrm{N}^2}{2}\left\{Y - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\left[\dot{X} + (\alpha-\gamma)\dot{Y}\right]\right\}. \tag{23}$$

Пространственная дискретизация, метод Галеркина. Выберем полную систему ортонормированных координатных функций, удовлетворяющих краевым условиям (21)

$$s_k(\zeta) = \sqrt{2}\sin(k\pi\zeta), \quad k = 1, 2, 3, \ldots; \quad (s_k, s_l) = \int_0^1 s_k(\zeta)\, s_l(\zeta)\, d\zeta,$$
$$(s_j, s_j) = 1, \quad \forall j, \quad (s_k, s_l) = 0, \quad \forall k \neq l. \tag{24}$$

Представим функции $X(\tau,\zeta)$, $Y(\tau,\zeta)$ аппроксимацией в виде конечных рядов

$$X(\tau,\zeta) \approx X^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n p_j(\tau)s_j(\zeta),$$
$$Y(\tau,\zeta) \approx Y^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n q_j(\tau)s_j(\zeta). \tag{25}$$

После проведения ортогонализации в процедуре метода Галеркина для уравнений (23) получим следующую систему уравнений для каждой k-й моды отдельно[1] в силу ортонормированности (24)

$$\begin{aligned} \ddot{p}_k + A_{k1}\dot{p}_k + A_{k2}p_k + B_{k1}\dot{q}_k + B_{k2}q_k &= 0, \\ C_{k1}\dot{p}_k + C_{k2}p_k + \ddot{q}_k + D_{k1}\dot{q}_k + D_{k2}q_k &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered} A_{k1} = \frac{C\text{AN}}{2} + 2\zeta_\xi, \quad A_{k2} = (k\pi)^2, \\ B_{k1} = (\alpha - \gamma)\frac{C\text{AN}}{2}, \quad B_{k2} = (\alpha - \beta)(k\pi)^2 - \frac{C\text{N}^2}{2}, \\ C_{k1} = d_3\frac{C\text{AN}}{2}, \quad C_{k2} = (k\pi)^2 d_1, \\ D_{k1} = (\alpha - \gamma) d_3\frac{C\text{AN}}{2} + 2\zeta_\vartheta, \quad D_{k2} = (k\pi)^2 d_2 - d_3\frac{C\text{N}^2}{2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Коэффициенты ζ_ξ, ζ_ϑ учитывают внешнее демпфирование поперечным и крутильным колебаниям.

Расчет характеристических показателей системы (26). Представим решение (26) в виде

$$p_k(\tau) = e^{\lambda\tau}U_k, \quad q_k(\tau) = e^{\lambda\tau}V_k. \tag{28}$$

После подстановки (28) в систему (26) получим алгебраическую задачу

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + A_{k1}\lambda + A_{k2} & B_{k1}\lambda + B_{k2} \\ C_{k1}\lambda + C_{k2} & \lambda^2 + D_{k1}\lambda + D_{k2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_k \\ V_k \end{Bmatrix} = 0. \tag{29}$$

Тогда характеристическое уравнение для (29) будет полиномом четвертого порядка

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= A_{k1} + D_{k1}, \\ a_2 &= A_{k1}D_{k1} + A_{k2} + D_{k2} - B_{k1}C_{k1}, \\ a_3 &= A_{k1}D_{k2} + A_{k2}D_{k1} - B_{k1}C_{k2} - B_{k2}C_{k1}, \\ a_4 &= A_{k2}D_{k2} - B_{k2}C_{k2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Условия устойчивости тривиального решения (26) – $\max(\mathrm{Re}(\lambda)) < 0$, следуют из критерия Рауса–Гурвица

$$\begin{aligned} \mu_1 &= a_1 > 0, \\ \mu_2 &= a_1a_2 - a_3 > 0, \\ \mu_3 &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2 > 0, \\ \mu_4 &= a_4\left(a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2\right) > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Анализ результатов расчета. Расчеты проводились в программном комплексе MATLAB для первой формы колебаний ($k = 1$) при следующих фиксированных значениях постоянных, входящих в выражения для коэффициентов уравнений (23): $C = 1$, $\text{A} = 0.1$, $\zeta_\xi = 0.02$, $\zeta_\vartheta = 0.05$.

При этом варьировалась скорость набегающего потока N, как управляющего параметра, для различных комбинаций параметров α, β, γ. Некоторые результаты расче-

[1] Это условие неверно в случае учета внутреннего трения в каждой струне. Внешнее демпфирование сохраняет условие сепарабельности мод.

тов, иллюстрирующие характер колебаний ленты (эквивалентной струны), представлены на рис. 4–7. Графическое представление третьего минора Гурвица $\mu_3(N)$ из условий устойчивости (32) при его обращении в ноль ($\mu_3 = 0 \Rightarrow N_{crit}$) позволяет зафиксировать бифуркацию Пуанкаре–Андронова–Хопфа, т.е. появление флаттера струны в потоке воздуха (рис. 4) [8, 20]. На рис. 4 для сравнения представлены два варианта расчета при $\gamma = 0.25$: (а) – при $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.5$ и (б) – при $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.4$. В первом

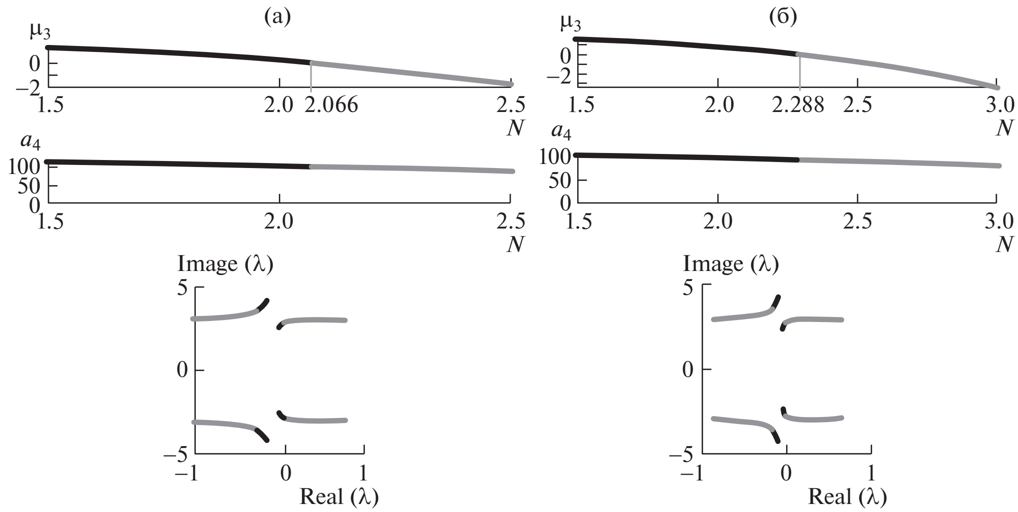

Рис. 4. Бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа и диаграммы Аргана: (а) – при $\alpha = 0.75$; $\beta = 0.5$; $\gamma = 0.25$; (б) – при $\alpha = 0.7$; $\beta = 0.4$; $\gamma = 0.25$.

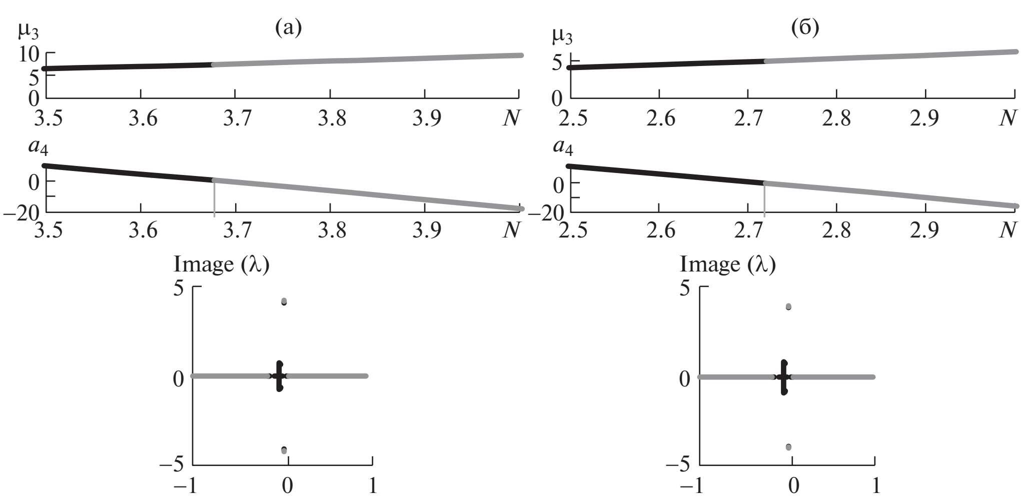

Рис. 5. Бифуркации Эйлера и диаграмма Аргана: (а) – при $\alpha = 0.4$; $\beta = 0.6$; $\gamma = 0.25$; (б) – при $\alpha = 0.5$; $\beta = 0.75$; $\gamma = 0.25$.

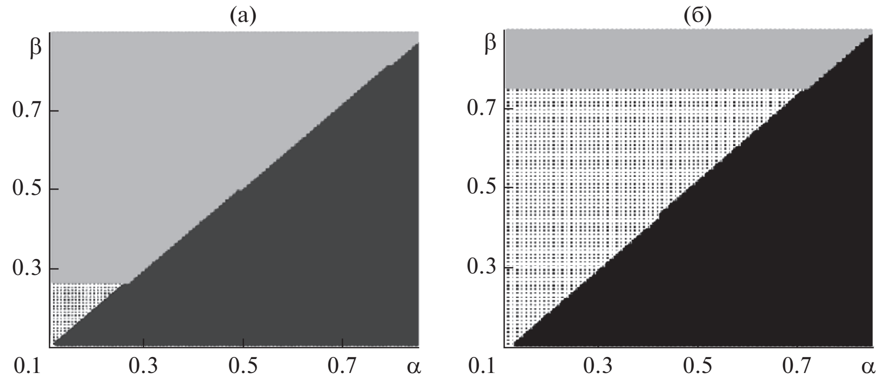

Рис. 6. Области возникновения дивергенции и флаттера на плоскости $\alpha\beta$: (а) – при $\gamma = 0.25$; (б) – при $\gamma = 0.75$.

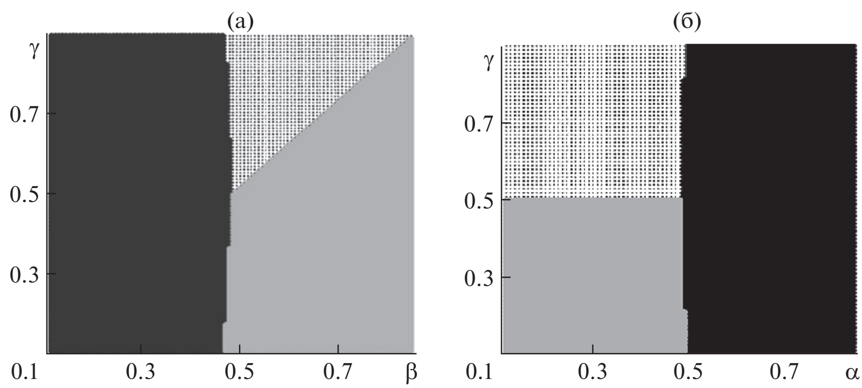

Рис. 7. Области возникновения дивергенции и флаттера: (а) – на плоскости $\beta\gamma$ при $\alpha = 0.5$; (б) – на плоскости $\alpha\gamma$ при $\beta = 0.5$.

случае критическая скорость воздушного потока $N_{crit} = 2.066$; во втором – $N_{crit} = 2.288$. Траектории корней характеристического уравнения (30) $\lambda_j(N)$, $j = \overline{1,4}$ (диаграмма Аргана) наглядно иллюстрируют характер бифуркации – серые линии соответствуют скорости потока N, при которой $\max(\mathrm{Re}(\lambda_j)) > 0$, $j = \overline{1,4}$.

Построение коэффициента $a_4(N)$ по выражению (31) при его обращении в ноль ($a_4 = 0 \Rightarrow N_{crit}$), позволяет локализовать бифуркацию Эйлера, соответствующую дивергенции эквивалентной струны в потоке воздуха (рис. 5). Серые линии на диаграмме Аргана соответствуют скорости потока N, при которой $\max(\mathrm{Re}(\lambda_j)) > 0$ для любого j.

Частота колебаний ленты (эквивалентной струны) ω_{crit} и скорость потока воздуха U_{crit} при достижении критического состояния (рис. 4) определяются из (14), (15)

$$\omega_{crit} = \frac{\mathrm{Imag}(\lambda_{crit})}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}, \quad U_{crit} = \frac{N_{crit}}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{33}$$

На рис. 6, 7 показаны области возникновения дивергенции (серый цвет) и флаттера (черный цвет) в зависимости от выбранной плоскости параметров. На рис. 6 – на

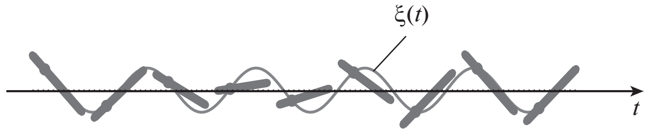

Рис. 8. Характерные положения поперечного сечения ленты.

плоскости $\alpha\beta$ при $\gamma = 0.25$ (рис. 6а) и при $\gamma = 0.75$ (рис. 6б), а на рис. 7 – на плоскости $\beta\gamma$ при $\alpha = 0.5$ (рис. 7а) и на плоскости $\alpha\gamma$ при $\beta = 0.5$ (рис. 7б). Области, заполненные точками, на всех рисунках соответствуют параметрам, при которых не возникает неустойчивости струны (ленты).

На рис. 6, 7 показано, что область дивергенции уменьшается с повышением аэродинамического качества.

Закритическое поведение ленты. Поведение ленты в закритической области (при скоростях потока воздуха выше критической) требует учета нелинейных аэродинамических сил (15). При этом метод Галеркина должен применяться к системе (17) в виде

$$\xi(\tau,\zeta) \approx \xi^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n p_j(\tau)s_j(\zeta); \quad \vartheta(\tau,\zeta) \approx \vartheta^n(\tau,\zeta) = \sum_1^n q_j(\tau)s_j(\zeta). \tag{34}$$

Ограничимся случаем $n = 1$. Получим два уравнения, аналогичных (26) с добавлением влияния нелинейных сил. Тогда после ортогонализации в процедуре метода Галеркина вместо (26), получим

$$\begin{gathered} \ddot{p}_1 + A_{11}\dot{p}_1 + A_{12}p_1 + B_{11}\dot{q}_1 + B_{12}q_1 - \psi^{(1)}(p_1,q_1) = 0, \\ C_{11}\dot{p}_1 + C_{12}p_1 + \ddot{q}_1 + D_{11}\dot{q}_1 + D_{12}q_1 - d_3\psi^{(1)}(p_1,q_1) = 0, \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\psi^{(1)}(p_1,q_1) = -\varepsilon\frac{C\mathrm{AN}}{8}\left[\dot{p}_1 + (\alpha-\gamma)\dot{q}_1\right]^3. \tag{36}$$

На рис. 8 показаны положения поперечного сечения ленты (эквивалентной струны) при $\zeta = 0.5$ (среднее сечение ленты), которое оно принимает в различные моменты времени в установившемся режиме после бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа при $\mathrm{N} = 1.05\mathrm{N}_{\mathrm{crit}}$ ($\mathrm{N}_{\mathrm{crit}} = 2.066$). Расчет проводился по уравнениям (35) при $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 0.25$.

Заключение. В статье предложена модель растянутой ленты, находящейся в воздушном потоке, в виде двух струн, закрепленными по краям мембраны. В модели изгибная и крутильная жесткости ленты получены через усилия натяжения и крутящего момента, зависящего от усилия натяжения и распределения масс, а также от подъемной аэродинамической силы. Модель и сформированные уравнения описывают совместные изгибно-крутильные колебания ленты. Существенной особенностью модели является возможность учета различных асимметрий, в частности, профиля поперечного сечения ленты, способа приложения растягивающей нагрузки.

Решения дифференциальных уравнений, описывающих колебания ленты, получены в виде конечных рядов по координатным функциям с их последующей ортогонализацией в соответствии с методом Галеркина. Анализ устойчивости полученных решений позволил выявить бифуркацию Пуанкаре–Андронова–Хопфа, т.е. появление флаттера ленты в потоке воздуха, и локализовать бифуркацию Эйлера, соответствующую дивергенции ленты.

При учете нелинейных характеристик аэродинамических сил исследовано поведение ленты в закритической области.

Все расчетные формулы получены в безразмерном виде, что существенно расширяет возможности практического использования результатов работы и позволяет рассчитывать критические скорости возникновения дивергенции и флаттера ленты, а также амплитуды и частоты ее колебаний для произвольного набора численных значений параметров рассматриваемых систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00183, https://rscf.ru/project/21-19-00183/.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фын Я.Ц.* Введение в теорию аэроупругости / Перевод с англ. А.И. Смирнова под ред. Э.И. Григолюка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 523 с.
2. *Амирьянц Г.А., Зинченков М.Ч., Калабухов С.И. и др.* Аэроупругость / Под ред. П.Г. Карклэ. М.: Инновационное машиностроение, 2019. 650 с.
3. *Marchaj C.A.* Aero-Hydrodynamics of Sailing. International Marine Publishing Co, 1989. 720 p.
4. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Аэроупругость летательных аппаратов. М.: МАИ, 2020. 100 с.
5. *Тукмаков А.Л.* Нелинейные режимы колебаний упругой панели под действием периодической нагрузки // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 1. С. 186.
6. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
7. *Frayne S.M.* Generator utilizing fluid-induced oscillations. USA Patent 7573143, 2009.
8. *Bryant M., Garcia E.* Modelling and testing of a novel aeroelastic flutter energy harvester // J. Vib. Acoust, 2011. V. 133 (1). 011010.
9. *Li S., Yuan J., Lipson H.* Ambient wind energy harvesting using cross-flow fluttering // J. Appl. Phys. 2011. V. 109 (2). 026104.
10. *Tang L., Païdoussis M., Jiang J.* Cantilevered flexible plates in axial flow: energy transfer and the concept of flutter-mill // J. Sound Vib. 2009. V. 326 (1–2). P. 263–276.
11. *Doaré O., Michelin S.* Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates: linear stability analysis and conversion efficiency // J. Fluid. Struct. 2011. V. 27. P. 1357.
12. *Shelley M.J., Zhang J.* Flapping and bending bodies interacting with fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 2011. V. 43. P. 449.
13. *Tipans I., Viba J., Irbe M., Vutukuru S.K.* Analysis of Non-Stationary flow interaction with simple form objects. Agronomy Research. 2019. V. 17 (1). P. 1227.
14. *Viba J., Panovko G., Gouskov A., Irbe M.* Approximate model of flat ribbon vibrations in the wind // Book of Abstracts of the Second International Nonlinear Dynamics Conference, Rome, Sapienza University, 2021. 45 p.
15. *Афанасьева А.А., Гуськов А.М., Пановко Г.Я.* Нелинейная динамика тонкой узкой ленты в дозвуковом потоке воздуха // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 64.
16. *Afanaseva A., Gouskov A., Panovko G.* Nonlinear dynamics of a thin narrow ribbon in an airflow // Vibroengineering Procedia. 2020. V. 32. P. 105.

17. *Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н.* Аэродинамические характеристики профиля крыла с нелинейно деформируемой мембраной в дозвуковом потоке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 4. С. 491.
18. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., стер. СПб.: Изд-во “Лань”, 2003. 304 с.
19. *Chen L.-Q., Ding H.* Two nonlinear models of a transversely vibrating string // Archive of Applied Mechanics. 2008. V. 78. P. 321.
20. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. СПб.: Невский диалект, 2002. 230 с.