

---

---

**АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ  
В МАШИНОСТРОЕНИИ**

---

---

УДК 681.5

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ  
ГИПЕРДЕЛЬТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ**

© 2022 г. Я. Н. Гусеница

*Военный инновационный технополис “ЭРА”, Анапа, Россия  
e-mail: yaromir226@gmail.com*Поступила в редакцию 02.12.2020 г.  
После доработки 08.08.2021 г.  
Принята к публикации 24.08.2021 г.

Статья посвящена методу определения весовой функции динамической системы на основе гипердельтной аппроксимации автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов с произвольными законами распределения, а также преобразования Лапласа. Полученные результаты можно использовать при выполнении непараметрической идентификации динамических систем в условиях наличия ограничений на вычислительные ресурсы, а также при проведении измерений входных и выходных сигналов.

*Ключевые слова:* динамическая система, случайные процессы, непараметрическая идентификация, уравнение Фредгольма, гипердельтная аппроксимация, преобразование Лапласа, формула Алфрея

**DOI:** 10.31857/S0235711921060092

Современный этап развития науки и техники многие теоретики и практики связывают с широким использованием робототехнических систем и интеллектуальных процессов, миниатюризацией элементной базы изделий, интеграцией информационных систем, применением новых физических принципов.

Такая тенденция сопровождается значительным усложнением самых разнообразных по устройству и назначению технических систем, для исследования которых приходится прибегать к использованию моделей. Поэтому вопросы, связанные с идентификацией, являются весьма актуальными.

Идентификация представляет собой получение или уточнение математической модели исследуемой системы по ее измеряемым входным и выходным сигналам [1].

В зависимости от наличия априорной информации об исследуемой системе различают структурную, параметрическую и непараметрическую идентификацию (рис. 1) [2].

Структурная идентификация предполагает построение модели “черного ящика” с неизвестными структурой и параметрами системы. Поскольку структурная идентификация представляет собой сложную проблему, то в настоящее время по данному направлению отсутствуют четко формализованные методы ее решения. Вместе с тем, в аспекте проблематики структурной идентификации развиваются методы, основанные на свойстве сложности систем. Основная идея таких методов заключается в идентификации системы так, чтобы обеспечить ограниченную сложность ее модели при заданной точности [3].

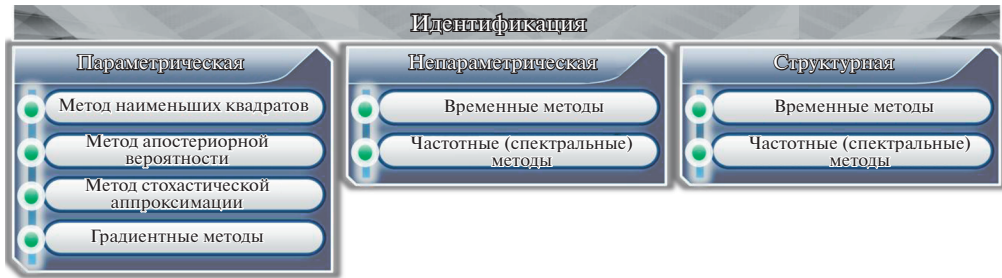


Рис. 1. Методы идентификации.

Параметрическая идентификация предполагает построение модели “серого ящика” с известной структурой, но неизвестными параметрами. В основе этой модели лежат передаточные функции, а также алгебраические, дифференциальные или интегродифференциальные уравнения, которые функционально связывают входные и выходные сигналы системы. Наиболее известными методами параметрической идентификации являются: метод наименьших квадратов, метод апостериорной вероятности, метод стохастической аппроксимации, градиентные методы [1, 4–7].

Непараметрическая идентификация направлена на построение модели весовой (импульсной передаточной) функции. Построение такой модели представляет собой довольно трудоемкий процесс, включающий описание структуры модели идентифицируемой системы, решение уравнения идентификации, обработку результатов, получение оценок параметров модели, анализ этих оценок и проверку адекватности модели [1].

Важное место среди перечисленных этапов отводится решению уравнения непараметрической идентификации, которое при наличии по одному входному и выходному случайным сигналам в общем виде выглядит как

$$K_{yx}(t) = \int_0^{\infty} K_{xx}(t - \tau)h(\tau)d\tau, \quad (1)$$

где  $\tau$  – момент подачи входного  $x(t)$  сигнала относительно начала отсчета;  $K_{yx}(t)$  – взаимно-корреляционная функция входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов;  $K_{xx}(t)$  – автокорреляционная функция входного  $x(t)$  сигнала;  $h(t)$  – неизвестная весовая функция, позволяющая при произвольной  $x(t)$  определять  $y(t)$ .

Выражение (1) представляет собой частный вид интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(z, s)\varphi(s)ds = f(z),$$

где  $\lambda$  – параметр;  $K(z, s)$  – ядро уравнения;  $f(z)$  – свободный член уравнения;  $\varphi(s)$  – искомая функция.

В уравнении идентификации (1)  $\lambda = 1$ , искомой функцией является весовая функция  $h(t)$ , а ядром – автокорреляционная функция  $K_{xx}(t)$  входного  $x(t)$  сигнала.

Для решения уравнения (1) можно использовать различные временные и частотные (спектральные) методы [8–13]. Вместе с тем, эти методы имеют ограниченные условия применения. Одни методы оказываются непригодными для идентификации динамических систем, входные и выходные сигналы которых имеют вероятностный характер. Другие методы требуют исчерпывающей информации о входных и выходных сигналах и существенных затрат вычислительных ресурсов.

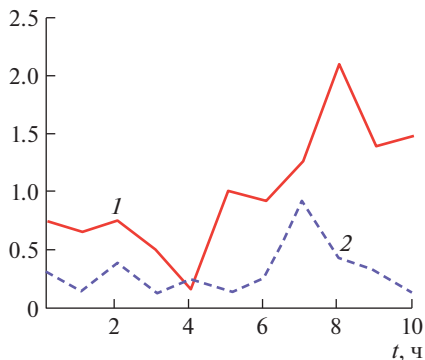


Рис. 2. Сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ : 1 –  $x(t)$ ; 2 –  $y(t)$ .

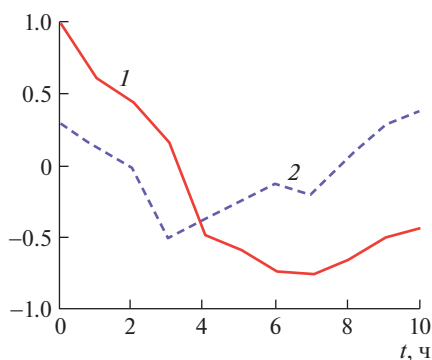


Рис. 3. Сигналы  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$ : 1 –  $K_{xx}(t)$ ; 2 –  $K_{yx}(t)$ .

В связи с этим предлагается оригинальный метод решения уравнения непараметрической идентификации динамической системы, который лишен указанных выше недостатков.

Рассмотрим применение метода на примере.

Пусть в течение десяти часов проведены измерения входного  $x(t)$  и выходного случайных сигналов  $y(t)$ . Сигнал  $x(t)$  подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием  $m_x = 1$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_x = 0.5$ . В свою очередь, сигнал  $y(t)$  подчиняется показательному закону распределения с математическим ожиданием  $m_y = 2$  (рис. 2).

Вычислим автокорреляционную функцию  $K_{xx}(t)$  входного  $x(t)$  сигнала и взаимнокорреляционную функцию  $K_{yx}(t)$  входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов (рис. 3).

Перенесем функции  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$  на положительную ось. Для этого сначала необходимо найти минимальные значения функций  $K_{xx}(t)$  и  $K_{yx}(t)$ , а затем добавить их абсолютные значения к каждому значению функций. В результате получим функции  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ , представленные на рис. 4.

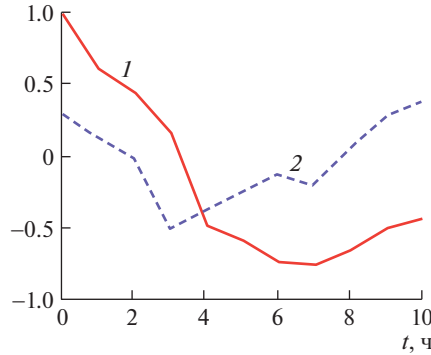


Рис. 4. Положительные функции  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ : 1 –  $K_{xx}^+(t)$ ; 2 –  $K_{yx}^+(t)$ .

Проведем нормирование функций  $K_{xx}^+(t)$  и  $K_{yx}^+(t)$ , чтобы представить их в вероятностной форме. Для этого воспользуемся формулами:

$$F_{xx}(t) = \frac{K_{xx}^+(t)}{\int_0^T K_{xx}^+(\tau) d\tau}, \quad F_{yx}(t) = \frac{K_{yx}^+(t)}{\int_0^T K_{yx}^+(\tau) d\tau},$$

где  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$  – аналоги функций распределения.

Вычислим для  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$  приближенное представление плотностей распределения на основе гипердельтной аппроксимации, которую можно применять для произвольных функций распределений [14].

Сущность гипердельтной аппроксимации заключается в представлении произвольной плотности распределения сосредоточенной на временной оси, приближенно в виде

$$f_{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \delta(t - T_i), \quad (2)$$

где  $C_i$  – вероятности, удовлетворяющие условию  $\sum_{i=1}^n C_i = 1$ ;  $T_i$  – постоянные параметры;  $\delta$  – дельта-функция Дирака.

В случае  $n > 2$ , значения  $C_i$  и  $T_i$  определяются численно. Если  $n = 2$ , то

$$C_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{3v_2v_1 - v_3 - 2v_1^3}{\sqrt{v_3^2 - 6v_3v_2v_1 - 3v_2^2v_1^2 + 4v_3v_1^3 + 4v_2^3}} \right),$$

$$T_{1,2} = \frac{v_3 - v_2v_1 \mp \sqrt{v_3^2 - 6v_3v_2v_1 - 3v_2^2v_1^2 + 4v_3v_1^3 + 4v_2^3}}{2(v_2 - v_1^2)},$$

где  $v_i$  –  $i$ -й начальный момент случайной величины, распределенной с плотностью вероятности  $f(t)$ .

Для приближенного представления по методу моментов воспользуемся тремя начальными моментами. В результате получим аппроксимированные плотности вероятностей распределения  $f_{\Delta xx}(t)$  и  $f_{\Delta yx}(t)$ .

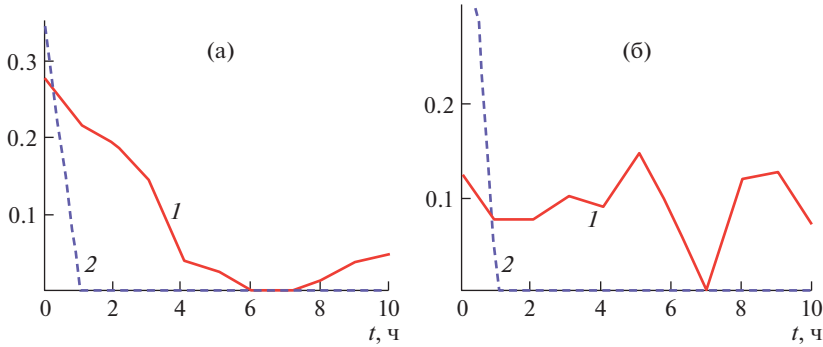


Рис. 5. Графики функций распределения: (а): 1 –  $F_{xx}(t)$ ; 2 –  $F_{\Delta xx}(t)$ . (б): 1 –  $F_{yx}(t)$ ; 2 –  $F_{\Delta yx}(t)$ .

На основе плотностей вероятностей распределения  $f_{\Delta xx}(t)$  и  $f_{\Delta yx}(t)$  найдем их функции распределения

$$F_{\Delta xx}(t) = \int_{-\infty}^t f_{\Delta xx}(\tau) d\tau; \quad F_{\Delta yx}(t) = \int_{-\infty}^t f_{\Delta yx}(\tau) d\tau.$$

Графики получившихся аппроксимированных функций распределения  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$  представлены на рис. 5.

Аппроксимированные функции  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$ , в отличие от  $F_{xx}(t)$  и  $F_{yx}(t)$ , удовлетворяют условию Липшица–Гельдера всюду на оси  $t > 0$  даже в точках, где имеются разрывы первого рода. Поэтому для  $F_{\Delta xx}(t)$  и  $F_{\Delta yx}(t)$  можно получить изображения Лапласа

$$F_{\Delta xx}^*(s) = \int_0^{\infty} F_{\Delta xx}(t) \cdot e^{-st} dt, \quad F_{\Delta yx}^*(s) = \int_0^{\infty} F_{\Delta yx}(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Следовательно, уравнение (1), используя изображения Лапласа  $F_{\Delta xx}^*(s)$ ,  $F_{\Delta yx}^*(s)$  и  $h^*(s)$ , можно представить как

$$F_{\Delta yx}^*(s) = F_{\Delta xx}^*(s)h^*(s),$$

где  $h^*(s)$  – изображение Лапласа весовой функции  $h(\tau)$ .

$$\text{Откуда } h^*(s) = \frac{F_{\Delta yx}^*(s)}{F_{\Delta xx}^*(s)}.$$

Для получения выражения весовой функции  $h(\tau)$  во временной области необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Однако достичь ожидаемых результатов достаточно затруднительно из-за сложности прямого изображения Лапласа искомой весовой функции и вычислительных трудностей. Поэтому переход от изображений  $h^*(s)$  к оригиналу  $h(t)$  проведем, применяя приближенный способ обращения преобразования Лапласа с использованием формулы Алфрея. Эта формула вытекает из формулы Уайдера на основе свойства фильтрации преобразования Лапласа с помощью дельта-функции. Она имеет вид [15]  $h(\tau) \approx sh^*(s)$  при  $s = 1/\tau$ .

Полученная весовая функция является одномерной моделью системы, позволяющей определить реакцию системы на произвольное входное воздействие.

При заданных исходных данных график искомой весовой функции будет выглядеть так, как это показано на рис. 6.

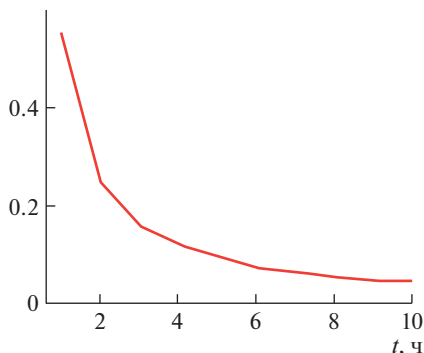


Рис. 6. График весовой функции  $h(t)$ .

Таким образом, разработанный метод позволяет определять весовую функцию динамической системы на основе гипердельтной аппроксимации автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов с произвольными законами распределения, а также преобразования Лапласа.

Применение рассмотренного метода обеспечит выполнение непараметрической идентификации динамических систем в условиях наличия ограничений на вычислительные ресурсы, а также проведение измерений входных и выходных сигналов.

Вместе с тем, вопрос оценки точности предлагаемого метода остается открытым и требует дальнейшего экспериментального исследования при идентификации технических систем, отличающихся устройством, функциональностью и назначением. Для повышения точности результатов количество начальных моментов для автокорреляционной и взаимно-корреляционных функций входного и выходного случайных сигналов может быть увеличено.

Дальнейшее направление развития метода можно связать с разработкой частных методик непараметрической идентификации многомерных систем различного назначения.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Статья выполнена в рамках научной исследовательской работы по оценке перспектив развития робототехнических комплексов и технологий робототехники, запланированной в Федеральном государственном автономном учреждении «Военный инновационный технополис «ЭРА».

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Главному управлению научно-исследовательской деятельности и технологического сопровождения передовых технологий (инновационных исследований) Министерства обороны Российской Федерации за поддержку в проведении работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джинчелашвили Г.А., Мкртычев О.В., Ковальчук О.А. и др. Идентификация расчетных моделей при динамических воздействиях. М.: Лира софт, 2018. 300 с.
2. Оморов Т.Т., Осмонова Р.Ч. Краткий обзор методов идентификации управляемых динамических систем // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2018. № 1 (45). С. 46.

3. Соколов С.В., Ковалев С.М., Кучеренко П.А., Смирнов Ю.А. Методы идентификации нечетких и стохастических систем. М.: Издательская фирма “Физико-математическая литература”, 2018. 432 с.
4. Граничин О.Н. Поисквые алгоритмы стохастической аппроксимации с рандомизацией на входе // Автоматика и телемеханика. 2015. № 5. С. 43.
5. Гринкевич В.А. Идентификация устройства на основе элемента Пельтье методом наименьших квадратов // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2020. № 1–2 (46–47). С. 17.
6. Кулаков Б.Б., Кулаков Д.Б., Лун Ци. Градиентная идентификация параметров математической модели электрогидравлического следящего привода // Гидравлика. 2020. № 10. С. 64.
7. Сандлер Е.А., Сандлер И.Л. Рекуррентный алгоритм параметрической идентификации асинхронных электродвигателей при наличии автокоррелированных ошибок измерений методом стохастической аппроксимации // Вестник транспорта Поволжья. 2018. № 4 (70). С. 84.
8. Антонова Т.В. Методы идентификации параметра в ядре уравнения первого рода типа свертки на классе функций с разрывами // Сибирский журнал вычислительной математики. 2015. Т. 18. № 2. С. 107.
9. Воскобойников Ю.Е., Крысов Д.А. Непараметрическая идентификация динамической системы при неточном входном сигнале // Автоматика и программная инженерия. 2017. № 4 (22). С. 86.
10. Гарькина И.А., Данилов А.М., Тюкалов Д.Е. Сложные системы: идентификация динамических характеристик, возмущений и помех // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1–1. С. 88.
11. Корнеева А.А., Чернова С.С., Шишкина А.В. Непараметрические алгоритмы восстановления взаимно неоднозначных функций по наблюдениям // Сибирский журнал науки и технологий. 2017. Т. 18. № 3. С. 510.
12. Шатов Д.В. Идентификация запаздывания одномерных линейных объектов конечно-частотным методом // Проблемы управления. 2015. № 3. С. 2.
13. Яреценко Д.И. О непараметрической идентификации частично-параметризованного дискретно-непрерывного процесса // Сибирский журнал науки и технологий. 2020. Т. 21. № 1. С. 47.
14. Смагин В.А., Филимоныхин Г.В. О моделировании случайных процессов на основе гипердельного распределения // АВТ. 1990. № 1. С. 25.
15. Смагин В.А. Немарковские задачи теории надежности. Л.: МО СССР, 1982. 268 с.