МЕХАНИКА МАШИН

УДК 531.8+621.01

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Ю. А. Алюшин

Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, Москва, Россия
e-mail: alyushin7@gmail.com

Поступила в редакцию 30.06.2021 г.
После доработки 06.10.2021 г.
Принята к публикации 20.10.2021 г.

Получено точное решение для кинетической энергии в общем случае пространственного движения твердых тел с произвольным вращением с учетом изменения центробежных моментов инерции. Использовано описание движения в форме Лагранжа и принцип суперпозиции, который обеспечивает геометрическое суммирование скоростей и ускорений совмещаемых движений в форме Лагранжа для любой частицы в любой момент времени. Подынтегральная функция в уравнении для кинетической энергии представлена через сумму одинаковых компонент скорости совмещаемых плоскопараллельных движений. Полярные моменты инерции не изменяются в процессе движения и их можно вычислить по текущему или исходному состоянию тела. Центробежные моменты изменяются и обращаются в ноль при вращении относительно главных центральных осей только для тел с равными главными моментами инерции, например для шара. В других случаях разность главных моментов инерции приводит к циклическим изменениям кинетической энергии с возможным проявлением прецессии и нутации, амплитуда которых зависит от угловых скоростей вращения тела. Приведен пример использования уравнений для робота с одной винтовой и двумя вращательными кинематическими парами.

Ключевые слова: кинетическая энергия, переменные Лагранжа, принцип суперпозиции движений, полярные, осевые и центробежные моменты инерции

DOI: 10.31857/S0235711922010023

Роботы различного назначения получили широкое распространение при выполнении основных и вспомогательных операций, перемещении заготовок и инструмента по заданной траектории с требуемой скоростью и точностью позиционирования. Роботизация является одним из основных факторов развития промышленности [1, 2].

Наиболее распространенные в настоящее время методики проектирования и исследования робототехнических комплексов ориентированы на использование матричных уравнений и отличаются выбором локальных систем координат [3, 4]. Силовой расчет обычно выполняют с использованием метода кинетостатики [5, 6], который позволяет рассматривать подвижную систему как условно неподвижную, находящуюся в квазистатическом равновесии.

Такие методы приводят к большим объемам вычислений с частым повторением однотипных процедур, применению высокопроизводительных вычислительных устройств, использующих алгоритмы параллельной обработки данных в многопроцессорных системах. Широкое распространение получили пакеты прикладных программ для моделирования работы роботов [7, 8]. Из-за сложности математического аппарата и численных методов расчета трудно оценить влияние вспомогательных факторов на результаты динамического анализа механизмов.

Проблема обеспечения необходимой точности позиционирования, расчета силовых факторов в кинематических парах и опасных сечениях звеньев остается актуальной. Продолжается поиск методов, ориентированных на совершенствование применяемого математического аппарата, методики расчета кинетической энергии звеньев механизмов с переходом от численных методов анализа к аналитическим [9, 10].

Кинетическая энергия является обязательным и обычно основным компонентом движения абсолютно твердых тел. Это требует особой ответственности при выборе методов ее определения, например при динамическом анализе мобильных роботов и иных механизмов, сложность которых с развитием технического прогресса возрастает. Основанием для расчета является теорема Кенига [11, 12] о равенстве кинетической энергии материальной системы сумме энергии переносного поступательного движения вместе с центром масс C и энергии вращательного движения относительно координатных осей, движущихся вместе с центром масс

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \tag{1}$$

где m — масса твердого тела; v_C — скорость центра масс; I_C — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; ω — мгновенная угловая скорость вращения твердого тела. Вычисление момента инерции относительно мгновенной оси вращения, которая в общем случае подвижна и зависит от движения тела, представляет определенные сложности.

Целью работы является: получение точного уравнения для расчета кинетической энергии вращающихся твердых тел без определения положения мгновенной оси вращения для динамического анализа механизмов с развитой структурой, таких как роботы-манипуляторы.

Рассмотрим вращение тела в плоскости x–y относительно неподвижного полюса $P(\alpha_P, \beta_P)$ в пространстве переменных Лагранжа [13]. При обозначениях текущих координат $x_i \in (x, y, z)$ будем использовать для переменных Лагранжа $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$ начальные координаты частиц $\alpha_p = x_p\big|_{t=0}$. Исходное положение произвольной точки $M(\alpha, \beta)$ определим углом наклона $(\theta_z)_0$ прямой PM по отношению к оси x и расстоянием между точками $|PM| = L = \text{const}$

$$\alpha = \alpha_P + L\cos(\theta_z)_0, \quad \beta = \beta_P + L\sin(\theta_z)_0. \tag{2}$$

После поворота прямой PM на угол $\Delta\theta_z = \theta_z - (\theta_z)_0$ координаты точки $M(x, y)$ можно определить по аналогичным соотношениям

$$x = \alpha_P + L\cos\theta_z = \alpha_P + L\cos\left[(\theta_z)_0 + \Delta\theta_z\right], \quad y = \beta_P + L\sin[(\theta_z)_0 + \Delta\theta_z].$$

Исключая из этих уравнений длину L и начальное значение угла $(\theta_z)_0$ с помощью уравнений (2), получаем систему уравнений движения

$$\begin{gathered} x = \alpha_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_z - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_z, \\ y = \beta_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_z + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_z, \\ z = \gamma, \end{gathered} \tag{3}$$

и соответствующие им скорости

$$x_t = -\theta_{z,t}(y - \beta_P), \quad y_t = \theta_{z,t}(x - \alpha_P), \quad z_t = 0. \tag{4}$$

Нижний индекс t при обозначении координат $x_{i,t}$ и углов поворота $\theta_{i,t}$ соответствует дифференцированию соответствующих функций по времени $dx_i/dt \equiv x_{i,t}$, $d\theta_i/dt \equiv \theta_{i,t}$.

Для плоскопараллельных движений в других плоскостях уравнения могут быть получены с помощью круговой подстановки:
— при вращении относительно оси x

$$\begin{gathered} x = \alpha, \quad x_t = 0, \\ y = \beta_P + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_P)\sin\Delta\theta_x, \quad y_t = -\theta_{x,t}(z - \gamma_P), \\ z = \gamma_P + (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_P)\cos\Delta\theta_x, \quad z_t = \theta_{x,t}(y - \beta_P); \end{gathered} \tag{5}$$

— при вращении относительно оси y

$$\begin{gathered} x = \alpha_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_P)\sin\Delta\theta_y, \quad x_t = \theta_{y,t}(z - \gamma_P), \\ y = \beta, \quad y_t = 0, \\ z = \gamma_P + (\gamma - \gamma_P)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_y, \quad z_t = -\theta_{y,t}(x - \alpha_P). \end{gathered} \tag{6}$$

Нижний индекс при обозначении угла поворота тела θ_i указывает направление оси вращения, проходящей через полюс P параллельно осям системы координат наблюдателя, относительно которой происходит вращение тела. Уравнения (3)–(6) будут использованы как исходные для всех дальнейших преобразований.

Для пространственных движений системы типа (6) можно получить с помощью принципа суперпозиции [14], который позволяет рассматривать их как одновременную реализацию нескольких плоскопараллельных движений. Если переменные Эйлера и Лагранжа совпадают в исходном состоянии $x_i(\alpha_p, t = 0) = \alpha_i$, совмещение движений сводится к замене переменных Лагранжа внешнего движения $x_i^{ex} = x_i^{ex}(\alpha_p, t)$ на выражения для соответствующих переменных Эйлера внутреннего движения $x_i^{in} = x_i^{in}(\alpha_p, t)$. Уравнения совмещенного движения $x_i = x_i(\alpha_p, t)$ при последовательном или одновременном их протекании совпадают с уравнениями внешнего движения после замены переменных Лагранжа соответствующими уравнениями для переменных Эйлера внутреннего движения

$$x_i(\alpha_p, t) = x_i^{ex}(x_i^{in}(\alpha_p, t), t). \tag{7}$$

Внешние и внутренние движения аналогичны переносным и относительным в классической механике, но отличаются обязательным использованием единой системы координат. Принцип допускает многократное его применение без нарушения правила геометрического сложения скоростей и ускорений совмещаемых движений в каждой точке и в каждый момент времени [14–16].

Например, чтобы получить уравнения движения с вращением относительно подвижного полюса, следует наложить на вращения (3)–(6) поступательное перемещение полюса P

$$x = \alpha + x_P(t) - \alpha_P, \quad y = \beta + y_P(t) - \beta_P, \quad z = \gamma + z_P(t) - \gamma_P. \tag{8}$$

В результате первое слагаемое (лагранжева координата) в каждом из уравнений (3)–(6) заменяется на текущую (эйлерову) координату

$$\begin{gathered} x = x_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_z - (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_z, \\ y = y_P + (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_z + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_z, \quad z = \gamma + z_P - \gamma_P, \\ x = \alpha + x_P - \alpha_P, \quad y = y_P + (\beta - \beta_P)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_P)\sin\Delta\theta_x, \\ z = z_P + (\beta - \beta_P)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_P)\cos\Delta\theta_x, \end{gathered} \tag{9}$$

$$x = x_P + (\alpha - \alpha_P)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_P)\sin\Delta\theta_y, \quad y = \beta + y_P - \beta_P,$$

$$z = z_P + (\gamma - \gamma_P)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_P)\sin\Delta\theta_y.$$

Каждая система из трех уравнений соответствует движению с четырьмя степенями свободы: три поступательных перемещения (8) вдоль координатных осей полюса P и поворот тела $\Delta\theta_i$ относительно соответствующей оси.

Кинетическая энергия при произвольном вращении твердого тела. Уравнений (3)–(9) достаточно для определения любых кинематических характеристик движения абсолютно твердых тел, в том числе кинетической энергии, которую по определению для тела с объемом V, плотностью ρ и массой m определяет интеграл [11, 12]

$$E_k = 0.5\rho\int_V v^2\delta V = 0.5\int_m v^2\delta m = 0.5\int_m \left(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2\right)\delta m. \tag{10}$$

С учетом разной природы аргументов при описании движения в форме Лагранжа, в уравнении (10) и ниже для обозначения бесконечно малых приращений аргументов и функций в пространстве переменных Лагранжа использован оператор δ, в том числе при интегрировании по массе δm. Оператор d характеризует бесконечно малые изменения функций во времени, как использовано выше для компонент скорости $dx_i/dt \equiv x_{i,t}$.

Точное интегрирование уравнения (10) можно выполнить при плоскопараллельном движении с вращением относительно одной оси, например z, когда по всему объему тела $z_t = 0$. С учетом уравнений движения (9) преобразуем правую часть к виду

$$\begin{aligned} E_k = 0.5m\left[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2\right] - \theta_{z,t}\int_m\left[(x_t)_P(y - y_P) - (y_t)_P(x - x_P)\right]\delta m + \\ + 0.5\theta_{z,t}^2\int_m\left[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2\right]\delta m. \end{aligned} \tag{11}$$

Для интегрирования во втором слагаемом воспользуемся понятием центра масс $C(x_C, y_C)$ [11, 12]

$$x_C m = \int_m x\delta m, \quad y_C m = \int_m y\delta m, \tag{12}$$

координаты которого можно вынести за знак интеграла и вместо (11) записать

$$\begin{aligned} E_k = 0.5m\left[(x_t)_P^2 + (y_t)_P^2\right] - \theta_{z,t}m\left[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)\right] + \\ + 0.5\theta_{z,t}^2\int_m\left[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2\right]\delta m. \end{aligned} \tag{13}$$

Оставшийся в правой части интеграл в механике твердого тела называют моментом инерции при вращательном движении тела, по аналогии с массой m при поступательном движении [11, 12]. Принимая во внимание особенности более общего случая движения, в настоящей статье будем его называть, по аналогии с терминологией теории упругости [15, 16], полярным моментом инерции, как более полно отражающим его геометрический смысл, при сохранении принятого в механике твердого тела обозначения J_P

$$J_P^z = \int_m\left[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2\right]\delta m. \tag{14}$$

В результате вместо (13) получаем

$$E_k = 0.5m\left(x_t^2 + y_t^2\right)_P + 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z - \theta_{z,t}m\left[(x_t)_P(y_C - y_P) - (y_t)_P(x_C - x_P)\right]. \tag{15}$$

Положение центра масс зависит от конфигурации тела и определяется по уравнениям (12). Положение полюса можно выбрать произвольно. Если в качестве полюса выбрать центр масс, последнее слагаемое обращается в ноль и формула (15) принимает простейший вид

$$E_k = 0.5m\left(x_t^2 + y_t^2\right)_C + 0.5\theta_{z,t}^2 J_C^z. \tag{16}$$

Уравнение (16) можно распространить на любое пространственное поступательное движение с вращением относительно одной оси, т.к. компонента z_t для всех частиц тела одинакова

$$E_k = 0.5\int_m \left(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2\right)\delta m = 0.5\left[\int_m \left(x_t^2 + y_t^2\right)\delta m + \int_m \left(z_t^2\right)_C \delta m\right] =$$
$$= 0.5mv_C^2 + 0.5\theta_{z,t}^2 J_C^z.$$

Результат можно записать в инвариантной форме для любой оси

$$E_k = 0.5mv_C^2 + 0.5\theta_{i,t}^2 J_C^i, \tag{17}$$

что совпадает с уравнением (1), т.к. ось вращения совпадает с мгновенной.

Получить точную аналитическую зависимость кинетической энергии при пространственном движении твердого тела без определения положения мгновенной оси вращения позволяет представление интеграла (10) в виде суммы трех интегралов, в каждом из которых подынтегральные функции представляют сумму одноименных компонент скорости совмещаемых плоскопараллельных движений

$$\begin{gathered} E_k = 0.5\int_m v^2\delta m = 0.5\int_m (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)\delta m = \\ = 0.5\int_m (x_t' + x_t'' + x_t''')^2\delta m + 0.5\int_m (y_t' + y_t'' + y_{tt}''')^2\delta m + 0.5\int_m (z_t' + z_t'' + z_{tt}''')^2\delta m, \end{gathered} \tag{18}$$

где штрихами обозначены компоненты скорости от трех вращений: один штрих – относительно оси x, два штриха – относительно оси y, три штриха – относительно оси z. Это соответствует правилу геометрического сложения скоростей при совмещении движений, оно выполняется при используемом принципе суперпозиции (7) [14].

Для сокращения математических записей рассмотрим сначала вращение тела относительно трех координатных осей, проходящих через неподвижный полюс $P(\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$ и к полученному результату добавим энергию поступательного движения тела вместе с полюсом (8), как это предусмотрено в теореме Кенига [11, 12].

Из уравнений (3)–(6) следует, что в каждом интеграле из уравнения (18) одно из слагаемых обращается в ноль

$$E_k = 0.5\int_m (x_t'' + x_t''')^2\delta m + 0.5\int_m (y_t' + y_t''')^2\delta m + 0.5\int_m (z_t' + z_t'')^2\delta m. \tag{19}$$

Для первого интеграла с компонентами скорости вдоль оси x с учетом уравнений (3)–(6) получаем (верхний индекс при обозначении E_k^i показывает направление компоненты скорости в данном интеграле)

$$E_k^x = 0.5\int_m \left\{\theta_{z,t}^2 (y - \beta_P)^2 + \theta_{y,t}^2 (z - \gamma_P)^2 - 2\theta_{y,t}\theta_{z,t} (y - \beta_P)(z - \gamma_P)\right\}\delta m. \tag{20}$$

Так как угловые скорости $\theta_{i,t}$ одинаковы для всех частиц тела, их можно вынести за знак интеграла

$$E_k^x = 0.5\theta_{z,t}^2 \int_m (y - \beta_P)^2\,\delta m + 0.5\theta_{y,t}^2 \int_m (z - \gamma_P)^2\,\delta m - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P)\,\delta m. \tag{21}$$

Оставшиеся в правой части интегралы относятся к осевым $(I_i^j)_P$ и центробежным $(I_{ij})_P$ моментам инерции [15, 16]

$$\left(I_y^z\right)_P = \int\limits_m (y-\beta_P)^2\,\delta m,\quad \left(I_z^y\right)_P = \int\limits_m (z-\gamma_P)^2\,\delta m,\quad \left(I_{yz}\right)_P = \int\limits_m (y-\beta_P)(z-\gamma_P)\,\delta m. \tag{22}$$

Для большей определенности верхний индекс у осевых моментов инерции $\left(I_i^j\right)_P$ указывает направление нормали к соответствующей плоскости, которая совпадает с осью вращения, указанной индексом угловой скорости $\theta_{i,t}$ в рассматриваемом слагаемом. Для центробежных моментов инерции, у которых множителями являются две угловые скорости, верхний индекс отсутствует. Строчные нижние индексы при моментах инерции $\left(I_{ij}\right)_P$ в уравнениях (22) и далее указывают переменные в соответствующих подынтегральных функциях. Уравнение (21) принимает вид

$$E_k^x = 0.5\theta_{z,t}^2\left(I_y^z\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2\left(I_z^y\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_P. \tag{23}$$

Для двух других интегралов уравнения (19), преобразуя их с помощью уравнений (5) и (6) к виду (20), находим

$$E_k^y = 0.5\theta_{z,t}^2\left(I_x^z\right)_P + 0.5\theta_{x,t}^2\left(I_z^x\right)_P - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_P, \tag{24}$$

$$E_k^z = 0.5\theta_{x,t}^2\left(I_y^x\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2\left(I_x^y\right) - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_P. \tag{25}$$

Суммируя правые части уравнений (23)–(25), получаем

$$\begin{gathered}E_k = 0.5\theta_{z,t}^2\left(I_x^z + I_y^z\right)_P + 0.5\theta_{y,t}^2\left(I_x^y + I_z^y\right)_P + 0.5\theta_{x,t}^2\left(I_y^x + I_z^x\right)_P - \\ - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_P - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_P,\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\begin{gathered}(I_x^y)_P = (I_x^z)_P = \int\limits_m (x-\alpha_P)^2\delta m,\quad \left(I_y^x\right)_P = \left(I_y^z\right)_P = \int\limits_m (y-\beta_P)^2\,\delta m,\\ \left(I_z^x\right)_P = \left(I_z^y\right)_P = \int\limits_m (z-\gamma_P)^2\,\delta m,\\ \left(I_{xy}\right)_P = \int\limits_m (x-\alpha_P)(y-\beta_P)\,\delta m,\quad \left(I_{yz}\right)_P = \int\limits_m (y-\beta_P)(z-\gamma_P)\delta m,\\ \left(I_{zx}\right)_P = \int\limits_m (x-\alpha_P)(z-\gamma_P)\delta m.\end{gathered} \tag{27}$$

Сумма осевых моментов инерции (27) в первых трех слагаемых уравнения (26) определяет квадраты расстояний между проекциями точки и полюса в разных плоскостях. При вращении твердого тела они остаются, как это следует из уравнений движения (3)–(6), постоянными и получаемые в результате полярные моменты инерции не изменяются, например

$$J_P^z = \int\limits_m \left[(x-\alpha_P)^2 + (y-\beta_P)^2\right]\delta m = \int\limits_m \left[(\alpha-\alpha_P)^2 + (\beta-\beta_P)^2\right]\delta m = \text{const}. \tag{28}$$

При использовании общепринятых в механике твердого тела обозначений (14)

$$\begin{gathered}\left(I_y^z\right)_P + \left(I_x^z\right)_P = \int\limits_m \left[(x-\alpha_P)^2 + (y-\beta_P)^2\right]\delta m = J_P^z,\\ \left(I_z^y\right)_P + \left(I_x^y\right)_P = \int\limits_m \left[(x-\alpha_P)^2 + (z-\gamma_P)^2\right]\delta m = J_P^y,\end{gathered} \tag{29}$$

$$\left(I_y^x\right)_P + \left(I_z^x\right)_P = \int_m \left[(z-\gamma_P)^2 + (y-\beta_P)^2\right]\delta m = J_P^x,$$

вместо (26) получаем

$$E_k = 0.5\left(\theta_{z,t}^2 J_P^z + \theta_{y,t}^2 J_P^y + \theta_{x,t}^2 J_P^x\right) - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_P - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_P. \quad (30)$$

Верхний индекс у моментов инерции J_P^i соответствует оси, относительно которой он должен быть определен. Нижний индекс указывает точку, через которую должна проходить ось вращения $i \in (x, y, z)$.

Уравнение (30) не содержит никаких ограничений и применимо для любых вариантов пространственного движения тел с произвольным вращением. Последние слагаемые с центробежными моментами инерции $\left(I_{ij}\right)_P$, в отличие от полярных моментов инерции J_P^i в первых трех слагаемых, изменяются при вращении тела и влияют на значения кинетической энергии.

Чтобы оценить возможный диапазон изменения центробежных моментов инерции в уравнении (30), воспользуемся начальными значениями осевых и центробежных моментов инерции, которые остаются неизменными в процессе движения тела. Их значения следуют из уравнений (27), если текущие координаты $x_i \in (x, y, z)$ приравнять начальным $\alpha_p \in (\alpha, \beta, \gamma)$

$$\left(I_\alpha^z\right)_P = \left(I_\alpha^y\right)_P = \int_m (\alpha-\alpha_P)^2\,\delta m, \quad \left(I_\beta^x\right)_P = \left(I_\beta^z\right)_P = \int_m (\beta-\beta_P)^2\,\delta m,$$
$$\left(I_\gamma^x\right)_P = \left(I_\gamma^y\right)_P = \int_m (\gamma-\gamma_P)^2\,\delta m; \quad (31)$$

$$\left(I_{\alpha\beta}\right)_P = \int_m (\alpha-\alpha_P)(\beta-\beta_P)\,\delta m, \quad \left(I_{\beta\gamma}\right)_P = \int_m (\beta-\beta_P)(\gamma-\gamma_P)\delta m,$$
$$\left(I_{\gamma\alpha}\right)_P = \int_m (\alpha-\alpha_P)(\gamma-\gamma_P)\delta m. \quad (32)$$

Для нижних индексов в левой части уравнений (31)–(32) использованы переменные Лагранжа $\alpha_P \in (\alpha, \beta, \gamma)$, чтобы отличить моменты инерции в исходном состоянии от текущих (27).

Полярные моменты инерции (29) остаются неизменными при повороте тела. Используя уравнения движения (3)–(6), систему (27) для центробежных моментов инерции $(I_{ij})_P$ преобразуем к виду

$$\left(I_{xy}\right)_P = \int_m (x-\alpha_P)(y-\beta_P)\,\delta m =$$
$$= 0.5\sin(2\Delta\theta_z)\int_m \left[(\alpha-\alpha_P)^2 - (\beta-\beta_P)^2\right]\delta m + \cos(2\Delta\theta_z)\int_m (\alpha-\alpha_P)(\beta-\beta_P)\,\delta m,$$

$$\left(I_{yz}\right)_P = \int_m (y-\beta_P)(z-\gamma_P)\,\delta m =$$
$$= 0.5\sin(2\Delta\theta_x)\int_m \left[(\beta-\beta_P)^2 - (\gamma-\gamma_P)^2\right]\delta m + \cos(2\Delta\theta_x)\int_m (\beta-\beta_P)(\gamma-\gamma_P)\delta m,$$

$$\left(I_{zx}\right)_P = \int_m (x-\alpha_P)(z-\gamma_P)\delta m =$$
$$= 0.5\sin(2\Delta\theta_y)\int_m \left[(\gamma-\gamma_P)^2 - (\alpha-\alpha_P)^2\right]\delta m + \cos(2\Delta\theta_y)\int_m (\alpha-\alpha_P)(\gamma-\gamma_P)\,\delta m,$$

или, с учетом обозначений для начальных значений (31)–(32),

$$\left(I_{xy}\right)_P = \int_m (x - \alpha_P)(y - \beta_P)\,\delta m = 0.5\sin(2\Delta\theta_z)\left[\left(I_\alpha^z\right)_P - \left(I_\beta^z\right)_P\right] + \cos(2\Delta\theta_z)\left(I_{\alpha\beta}\right)_P,$$

$$\left(I_{yz}\right)_P = 0.5\sin(2\Delta\theta_x)\left[\left(I_\beta^x\right)_P - \left(I_\gamma^x\right)_P\right] + \cos(2\Delta\theta_x)\left(I_{\beta\gamma}\right)_P, \tag{33}$$

$$\left(I_{zx}\right)_P = 0.5\sin(2\Delta\theta_y)\left[\left(I_\gamma^y\right)_P - \left(I_\alpha^y\right)_P\right] + \cos(2\Delta\theta_y)\left(I_{\gamma\alpha}\right)_P.$$

Полученные уравнения совпадают с известными соотношениям для изменения центробежных моментов инерции твердых тел при повороте осей координат [15, 16]. Следовательно, три последних слагаемых в уравнении (30) учитывают изменение центробежных моментов инерции относительно осей системы координат наблюдателя за счет поворота тела. На долю кинетической энергии, определяемую слагаемыми с центробежными моментами инерции (33), влияют особенности вращения относительно всех осей. Если вращение происходит относительно только двух осей, например y и z, уравнение (30) принимает вид

$$E_k = 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z + 0.5\theta_{y,t}^2 J_P^y - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_P, \tag{34}$$

где за счет $\Delta\theta_x = 0$ оставшийся центробежный момент $(I_{yz})_P$ не изменяется при повороте тела, как и полярные моменты инерции (29),

$$\left(I_{yz}\right)_P = \int_m (y - \beta_P)(z - \gamma_P)\,\delta m = \int_m (\beta - \beta_P)(\gamma - \gamma_P)\delta m.$$

Если вращение происходит относительно только одной оси, уравнение (30) преобразуется к виду (15) для неподвижного полюса (первое и третье слагаемые обращаются в ноль)

$$E_k = 0.5\theta_{z,t}^2\left(I_x^z + I_y^z\right)_P = 0.5\theta_{z,t}^2 J_P^z. \tag{35}$$

При вращении относительно трех осей следует использовать уравнение (30) с центробежными моментами (33).

Если совместить полюс P с центром масс C, уравнение (30) принимает вид

$$E_k = 0.5\left(\theta_{z,t}^2 J_C^z + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{x,t}^2 J_C^x\right) - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_C - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_C - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_C, \tag{36}$$

где для полярных моментов инерции вместо (29) получаем

$$J_C^z = \int_m \left[(x - \alpha_C)^2 + (y - \beta_C)^2\right]\delta m, \quad J_C^y = \int_m \left[(x - \alpha_C)^2 + (z - \gamma_C)^2\right]\delta m,$$
$$J_C^x = \int_m \left[(y - \beta_C)^2 + (z - \gamma_C)^2\right]\delta m. \tag{37}$$

Для центробежных моментов вместо (33) справедливы уравнения

$$\left(I_{xy}\right)_C = 0.5\sin(2\Delta\theta_z)\left[(I_\alpha)_C - (I_\beta)_C\right] + \cos(2\Delta\theta_z)\left(I_{\alpha\beta}\right)_C,$$

$$\left(I_{yz}\right)_C = 0.5\sin(2\Delta\theta_x)\left[(I_\beta)_C - (I_\gamma)_C\right] + \cos(2\Delta\theta_x)\left(I_{\beta\gamma}\right)_C, \tag{38}$$

$$\left(I_{zx}\right)_C = 0.5\sin(2\Delta\theta_y)\left[(I_\gamma)_C - (I_\alpha)_C\right] + \cos(2\Delta\theta_y)\left(I_{\alpha\gamma}\right)_C,$$

где вместо (31)–(32) для центральных моментов инерции в исходном состоянии имеем

$$\left(I_\alpha^z\right)_C = \left(I_\alpha^y\right)_C = \int_m (\alpha - \alpha_C)^2\,\delta m, \quad \left(I_\beta^x\right)_C = \left(I_\beta^z\right)_C = \int_m (\beta - \beta_C)^2\,\delta m,$$

$$\left(I_\gamma^x\right)_C = \left(I_\gamma^y\right)_C = \int_m (\gamma - \gamma_C)^2 \,\delta m,$$

$$\left(I_{\alpha\beta}\right)_C = \int_m (\alpha - \alpha_C)(\beta - \beta_C)\,\delta m, \quad \left(I_{\beta\gamma}\right)_C = \int_m (\beta - \beta_C)(\gamma - \gamma_C)\delta m,$$

$$\left(I_{\gamma\alpha}\right)_C = \int_m (\alpha - \alpha_C)(\gamma - \gamma_C)\delta m.$$

Для расчета кинетической энергии с учетом поступательного движения центра масс уравнения (30) и (36), в соответствии с теоремой Кенига, преобразуются к виду

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5v_P^2 m + 0.5\left(\theta_{z,t}^2 J_P^z + \theta_{y,t}^2 J_P^y + \theta_{x,t}^2 J_P^x\right) - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_P - \\ &\quad - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_P - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_P, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} E_k &= 0.5v_C^2 m + 0.5\left(\theta_{z,t}^2 J_C^z + \theta_{y,t}^2 J_C^y + \theta_{x,t}^2 J_C^x\right) - \theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(I_{yz}\right)_C - \\ &\quad - \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(I_{xz}\right)_C - \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(I_{xy}\right)_C. \end{aligned} \tag{40}$$

Полярные моменты инерции J_P^i определяют уравнения (29) или (37), центробежные $(I_{ij})_P$ – (33) или (38).

Пример применения уравнений. Рассмотрим применение полученных уравнений на примере робота-манипулятора с двумя вращательными и одной винтовой кинематическими парами для перемещения груза массой m [1, 6]. Структурная схема робота с тремя независимыми приводами и вращением звеньев относительно пересекающихся осей представлена на рис. 1.

Звено *1* закреплено на стойке с помощью вращательной кинематической пары, которая позволяет звену вращаться относительно оси z, проходящей через начало координат. Частицы звена изменяют положение в пространстве наблюдателя в соответствии с уравнениями (3), которые с учетом принятой системы координат и положения полюса принимают вид

$$x = \alpha\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z, \quad y = \alpha\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z, \quad z = \gamma. \tag{41}$$

Звено *2* вращается относительно оси y_1, используя привод в кинематической паре с точкой $A(\alpha_A = 0, 0, \gamma_A = H)$

$$\begin{aligned} x &= \alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y, \quad y = \beta, \\ z &= \gamma_A + (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y. \end{aligned} \tag{42}$$

Звенья *2* и *3* соединены винтовой кинематической парой в точке $B(\alpha_B = L_1, 0, \gamma_B = H)$. Привод обеспечивает поступательное и вращательное движения звена *3* относительно звена *2*

$$\begin{aligned} x &= \alpha + x_B - \alpha_B, \quad y = \beta_B + (\beta - \beta_B)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B)\sin\Delta\theta_x, \\ z &= \gamma_B + (\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x. \end{aligned} \tag{43}$$

Поступательное перемещение u определяет шаг винтовой пары h и угол поворота звена $\Delta\theta_x$

$$x_B - \alpha_B = u = h\Delta\theta_x/(2\pi).$$

В соответствии с уравнением (7), для уравнений совмещенного движения звена *2* при внешнем движении звена *1* следует переменные Лагранжа в уравнениях (41) заменить соответствующими уравнениями (42)

$$(x)_2 = \left[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y\right]\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z,$$

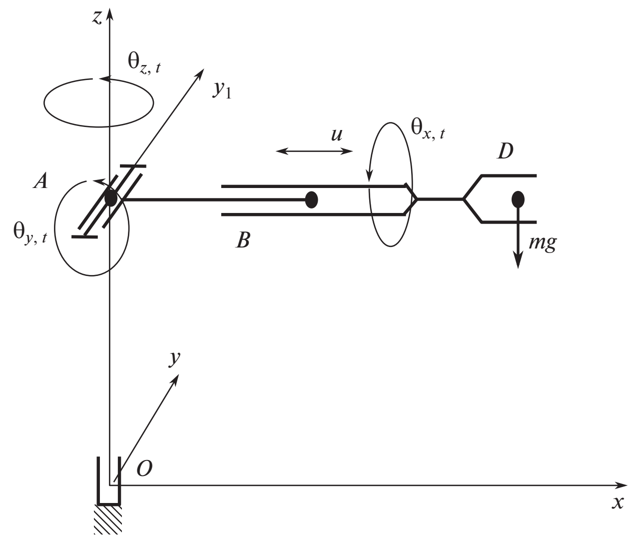

Рис. 1. Структурная схема трехзвенного робота с двумя вращательными и одной винтовой кинематическими парами в исходном положении.

$$(y)_2 = \left[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y\right]\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z, \tag{44}$$

$$(z)_2 = \gamma_A + (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y - (\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y.$$

Производные по времени определяют компоненты скорости частиц

$$(x_t)_2 = -\theta_{z,t}\left\{\left[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y\right]\sin\Delta\theta_z + \beta\cos\Delta\theta_z\right\} -$$
$$- \theta_{y,t}\left[(\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y - (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y\right]\cos\Delta\theta_z,$$

$$(y_t)_2 = \theta_{z,t}\left\{\left[\alpha_A + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + (\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y\right]\cos\Delta\theta_z - \beta\sin\Delta\theta_z\right\} - \tag{45}$$
$$- \theta_{y,t}\left\{\left[(\alpha - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y - (\gamma - \gamma_A)\cos\Delta\theta_y\right]\sin\Delta\theta_z\right\},$$
$$(z_t)_2 = -\theta_{y,t}\left[(\gamma - \gamma_A)\sin\Delta\theta_y + (\alpha - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y\right].$$

Используя повторно правило суперпозиции (7), с учетом внутреннего движения (43) и внешнего (44) при равенстве координат $\beta_A = \beta_B$ и $\gamma_A = \gamma_B$ получаем для звена *3* вращение относительно трех осей

$$(x)_3 = \{\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y +$$
$$+ [(\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x]\sin\Delta\theta_y\}\cos\Delta\theta_z -$$
$$- [\beta_B + (\beta - \beta_B)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B)\sin\Delta\theta_x]\sin\Delta\theta_z,$$
$$(y)_3 = \{\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + \tag{46}$$
$$+ [(\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x]\sin\Delta\theta_y\}\sin\Delta\theta_z +$$
$$+ [\beta_B + (\beta - \beta_B)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B)\sin\Delta\theta_x]\cos\Delta\theta_z,$$
$$(z)_3 = \gamma_A + [(\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x]\cos\Delta\theta_y - (\alpha + u - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y.$$

После дифференцирования по времени находим компоненты скорости, например, для $(x_t)_3$

$$\begin{gathered}
(x_t)_3 = u_t \cos\Delta\theta_y \cos\Delta\theta_z - \theta_{y,t}(\alpha + u - \alpha_A)\sin\Delta\theta_y \cos\Delta\theta_z + \\
+ \theta_{x,t}\left[(\beta - \beta_B)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B)\sin\Delta\theta_x\right]\sin\Delta\theta_y \cos\Delta\theta_z + \\
+ \theta_{y,t}\left[\gamma_B + (\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x - \gamma_A\right]\cos\Delta\theta_y \cos\Delta\theta_z - \\
- \theta_{z,t}\{\alpha_A + (\alpha + u - \alpha_A)\cos\Delta\theta_y + \\
+ \left[(\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x\right]\sin\Delta\theta_y\}\sin\Delta\theta_z + \\
+ \theta_{x,t}\left[(\beta - \beta_B)\sin\Delta\theta_x + (\gamma - \gamma_B)\cos\Delta\theta_x\right]\sin\Delta\theta_z - \\
- \theta_{z,t}\left[\beta_B + (\beta - \beta_B)\cos\Delta\theta_x - (\gamma - \gamma_B)\sin\Delta\theta_x\right]\cos\Delta\theta_z.
\end{gathered} \tag{47}$$

Другие компоненты скорости для звена *3* не приведены для сокращения объема статьи. Правильность записи уравнений движения (44) и (46) можно проверить по условию отсутствия деформации [13]

$$R = \delta V/\delta V_0 = \left|x_{i,\alpha_p}\right| = 1, \quad x_{i,\alpha_p} \equiv \partial x_i/\partial\alpha_p.$$

Уравнения движения частиц переносимого груза в точке D зависят от особенностей его закрепления на звене *3*. Для зажимных захватов уравнения совпадают с уравнением (46) для звена *3*, но требуют конкретизации начальных координат рассматриваемой точки, например, для определения координат центра массы груза $C_m(\alpha_{Cm}, \beta_{Cm}, \gamma_{Cm})$.

Зная компоненты скорости (45) и (47), кинетическую энергию звеньев можно найти численными способами [4–6], однако удобнее воспользоваться аналитическими зависимостями (39)–(40). Частицы звена *1* совершают плоскопараллельное движение, кинетическую энергию звена определяет уравнение (35). Частицы звена *2* вращаются относительно двух осей $\theta_{y,t} \neq \theta_{z,t} \neq 0$, $\theta_{x,t} = 0$, кинетическую энергию определяет уравнение (34). Звено *3* с подвижным полюсом B вращается относительно трех осей, кинетическую энергию определяет уравнения (39) или (40).

Для расчета требуемой мощности приводов и сил в кинематических парах целесообразно использовать анализ энергетических потоков, как в рычажных механизмах с замкнутыми кинематическими цепями [17]. Сумма скоростей изменения кинетической $W_k = dE_k/dt$ и потенциальной $W_p = dE_p/dt$ энергии движущихся тел на рассматриваемом участке механизма должна быть равна мощности W_e, поступающей от внешних источников

$$W_e = W_k + W_p.$$

Выбор полюса в уравнении (46) однозначно определен на этапе кинематического анализа, т.к. уравнения (3)–(6) предполагают его движение известным. Он должен принадлежать кинематическим парам, соединяющим ведомое и ведущее звенья. Однако при расчете обобщенных сил удобнее использовать уравнение (40) с кинематическими характеристиками центра масс [17]. Например, для звена *3* требуемую мощность внешних сил определяет уравнение

$$(W_e)_B = (W_k)_{C3} + (W_p)_{C3} + (W_k)_D + (W_p)_D,$$

где

$$\begin{gathered}
(W_k)_{C3} = m\left(x_t x_{tt} + y_t y_{tt} + z_t z_{tt}\right)_{C3} + \left(\theta_{x,t}\theta_{x,tt}J^y_{C3} + \theta_{y,t}\theta_{y,tt}J^y_{C3} + \theta_{z,t}\theta_{z,tt}J^z_{C3}\right) - \\
- d\left\{\theta_{y,t}\theta_{z,t}\left(J_{yz}\right)_{C3} + \theta_{x,t}\theta_{z,t}\left(J_{xz}\right)_{C3} + \theta_{y,t}\theta_{x,t}\left(J_{xy}\right)_{C3}\right\}/dt,
\end{gathered}$$

$$\left(W_p\right)_{C3} = m_{C3}g(z_t)_{C3}.$$

Это наиболее громоздкая формула для динамического анализа рассматриваемого робота, но при ее использовании трудоемкость расчета существенно ниже по сравнению с матричными вариантами. Такая методика обеспечивает выполнение закона сохранения энергии на любой части механизма в любой момент времени.

Заключение. Уравнения (39) и (40) определяют кинетическую энергию твердого тела в самом общем случае пространственного движения с произвольным вращением относительно любых осей, не требуют определения положения мгновенной оси вращения и их можно использовать для динамического анализа механизмов любой сложности при известной информации о геометрических особенностях звеньев, позволяющих определить осевые, полярные и центробежные моменты инерции, а также о текущих значениях линейных и угловых скоростей [17].

Принимая во внимание, что осевые $\left(I_i^j\right)_P$ и центробежные $\left(I_{ij}\right)_P$ моменты инерции для исходного состояния тела (31)–(32) при движении не изменяются, можно утверждать, что текущие значения центробежных моментов (38) в зависимости от угла поворота тела $\Delta\theta_i$ изменяются по модулю, например для момента инерции $\left(I_{xy}\right)_C$ от исходного значения $\left(I_{\alpha\beta}\right)_C$ до половины разности осевых моментов инерции (в исходном состоянии) $[(I_\alpha^z)_C - (I_\beta^z)_C]/2$.

Для тел с равными главными моментами инерции, например для шара, когда $(I_\alpha)_C = (I_\beta)_C = (I_\gamma)_C$ и любые две ортогональные оси, проходящие через центр тяжести, являются главными центральными осями инерции, кинетическая энергия при неизменных угловых скоростях не изменяется. В противном случае первые слагаемые в уравнениях (38) за счет разности главных центральных моментов инерции приведут к циклическим изменениям кинетической энергии, возможному проявлению прецессии и нутации, амплитуда которых зависит от угловых скоростей вращения тела.

Структура полученных уравнений не позволяет предложить альтернативную методику аналитического определения момента инерции относительно мгновенной оси вращения J_C в уравнении (1). Момент инерции можно определить только экспериментально [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козырев Ю.Г.* Промышленные роботы: основные типы и технические характеристики. М.: КНОРУС, 2015. 560 с.
2. *Подураев Ю.В.* Мехатроника: основы, методы, применение. М.: Машиностроение, 2006. 256 с.
3. Механика промышленных роботов. Т. 1: Кинематика и динамика / Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. М.: Высшая школа, 1989. 383 с.
4. *Корендясев А.И.* Теоретические основы робототехники. М.: Наука, 2006. 376 с.
5. *Li D.-Q., Hong H.J., Jiang X.L.* Dynamics Modeling, Control System Design and Simulation of Manipulator Based on Lagrange Equation // Mechanism and Machine Science. 2016. P. 1129.
6. *Лукинов А.П.* Проектирование мехатронных и робототехнических устройств. М.: Лань, 2012. 608 с.
7. *Liu X.-J., Wang Q.-M.* Kinematics, Dynamics and Dimensional Synthesis of a Novel 2-DoF Translational Manipulator // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2004. V. 41. № 4. P. 205.
8. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. М.: Физматлит, 2011. 192 с.
9. *Hwang Y.-L., Cheng J.-K., Truong V.-T.* Dynamic Analysis and Control of Industrial Robotic Manipulators. Applied Mechanics and Materials. ISSN: 1662-7482. 2018. V. 883. P. 30.

10. *Кулаков Ф.М., Алферов Г.В., Малафеев О.А.* Динамический анализ исполнительной системы манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. 2014. № 46. С. 39.
11. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: МФТИ, 2008. 304 с
12. *Гернет М.М.* Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1987. 344 с.
13. *Алюшин Ю.А.* Механика твердого тела в переменных Лагранжа. М.: Машиностроение, 2012. 192 с.
14. *Алюшин Ю.А.* Принцип суперпозиции движений в пространстве переменных Лагранжа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 3. С. 13.
15. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. Изд. 10-е, перераб. и доп. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 577 с.
16. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
17. *Алюшин Ю.А., Вержанский П.М.* Структурный, кинематический и динамический анализ рычажных механизмов. М.: МИСиС, 2015. 104 с.