НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

РАСЧЕТ И ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ОБЪЕКТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗАДАННОГО УРОВНЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ

Г. С. Садыхов[1,*], С. С. Кудрявцева[1,]**

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*
**e-mail: gsadykhov@gmail.ru*
***e-mail: kudryavctva@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 28.09.2020 г.
После доработки 13.11.2021 г.
Принята к публикации 20.12.2021 г.

Для среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых объектов доказаны формулы расчета и оценки в зависимости от заданного уровня безотказности. Доказанные формулы и оценки справедливы для любого закона расходования ресурса невосстанавливаемых объектов. Приведены примеры использования полученных результатов в задачах продления сроков эксплуатации невосстанавливаемых технических объектов.

Ключевые слова: средний остаточный ресурс, интенсивность отказов, гамма-процентный остаточный ресурс

DOI: 10.31857/S0235711922020134

Постановка задачи. Пусть ζ – наработка до отказа невосстанавливаемого объекта. Тогда цензурированную сверху случайную величину

$$\eta(\tau,t)=\begin{cases}\zeta-\tau, & \text{если} \quad \zeta\in(\tau,\tau+t),\\ t, & \text{если} \quad \zeta\ge\tau+t,\end{cases} \tag{1}$$

назовем остаточным ресурсом сверх времени τ в течение длительности t.

Определим длительность t в зависимости от заданного уровня безопасности μ, $(0<\mu<1)$ из уравнения

$$P_\tau(t)=\mu, \tag{2}$$

как решение относительно времени t, где

$$P_\tau(t)=\frac{P(\tau+t)}{P(\tau)}, \tag{3}$$

где $P_\tau(t)$ – условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau,\tau+t)$; $P(\cdot)$ – безусловная вероятность работы объекта в течение времени, указанного внутри скобок. Обозначим найденную длительность через $t_\mu(\tau)$ и будем ее называть мю-процентным остаточным ресурсом сверх времени τ. В частности, при $\mu=\gamma$ получим гамма-процентный остаточный ресурс сверх времени τ [1], который при $\tau=0$ становится традиционным показателем “гамма-процентный (безостаточный) ресурс t_γ”, т.е. $t_\gamma(0)=t_\gamma$ [2, 3].

В дальнейшем, будем считать γ заданным, $(0 < \gamma < 1)$. Тогда, согласно (1), величина $\eta(\tau, t_\gamma(\tau))$ – остаточный ресурс объекта сверх времени τ в течение длительности $t_\gamma(\tau)$ является случайной.

В задачах продления сроков эксплуатации объекта время τ – это назначенный ресурс (гарантийная наработка), а продолжительность $t_\gamma(\tau)$ – продлеваемый сверх времени τ срок эксплуатации [6, 7].

Поскольку величина остаточного ресурса $\eta(\tau, t_\gamma(\tau))$ случайная, то для избавления от случайности рассмотрим математическое ожидание этой величины, а именно, обозначив математическое ожидание через $R(\tau, t_\gamma(\tau))$, получим средний остаточный ресурс объекта сверх времени τ в течение длительности $t_\gamma(\tau)$, равный

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = E[\eta(\tau, t_\gamma(\tau))], \tag{4}$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание случайной величины, заключенной внутри скобок.

Следовательно, чтобы определить величину продлеваемого срока эксплуатации, надо установить зависимость показателя (4) от задаваемого уровня безотказности γ. Поэтому целью настоящей статьи является вывод расчетных формул и оценок показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ в зависимости от заданного уровня безотказности для произвольных законов расходования ресурса невосстанавливаемых объектов.

Зависимость показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ от гамма-процентного остаточного ресурса. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$ равна γ, $(0 < \gamma < 1)$. Тогда для среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение длительности $t_\gamma(\tau)$ справедлива формула

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \int_0^1 T_\mu^{(\gamma)}(\tau)\, d\mu, \tag{5}$$

$$\text{где} \quad T_\mu^{(\gamma)}(\tau) = \begin{cases} t_\gamma(\tau), & \text{если} \quad \mu \in (0, \gamma], \\ t_\mu(\tau), & \text{если} \quad \mu \in (\gamma, 1). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $t_\mu(\tau)$ – мю-процентный остаточный ресурс сверх времени τ.

Доказательство. Пусть $0 < x < t$ и $\Phi_\tau(x) = P_r[(\zeta - \tau) < x/(\zeta > \tau)]$ – функция распределения непрерывной части условной случайной величины (1), $P_r[\cdot]$ – вероятность события, заключенного внутри скобок.

Так как $\Phi_\tau(x) = P_r[(\zeta < \tau + x)/(\zeta > \tau)]$, где, используя формулу для вероятности условного события [4], получим

$$\Phi_\tau(x) = \frac{1}{P_r(\zeta > \tau)} P_r[(\zeta < \tau + x) \cap (\zeta > \tau)],$$

где $\cap$ – знак произведения событий. Откуда, с учетом того, что

$$P_r(\zeta > \tau) = P(\tau); \quad P_r[(\zeta < \tau + x) \cap (\zeta > \tau)] = P(\tau) - P(\tau + x),$$

и формул (2) и (3), найдем

$$\Phi_\tau(x) = 1 - P_\tau(x). \tag{7}$$

Следовательно, общая функция распределения смешанной (непрерывно-дискретной) случайной величины (1) равна

$$F_\tau(x) = \begin{cases} \Phi_\tau(x), & \text{если} \quad x < t, \\ P_\tau(t), & \text{если} \quad x = t, \end{cases} \tag{8}$$

где первая строка соответствует непрерывной части величины (1), а вторая — дискретной.

Согласно правилу расчета математического ожидания (4) смешанной случайной величины, с учетом (7), (8) и $t = t_\gamma(\tau)$, имеем

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \gamma t_\gamma(\tau) + \int\limits_0^{t_\gamma(\tau)} x d(1 - P_\tau(x)), \tag{9}$$

где первое слагаемое соответствует дискретной части, а второе (интеграл) непрерывной части случайной величины (1).

Сделав замену переменной в интеграле по формуле $1 - P_\tau(x) = \nu$, используя определение (2) при $\gamma = 1 - \nu$, найдем $x = t_{1-\nu}(\tau)$, где правая часть — это гамма-процентный остаточный ресурс объекта сверх времени τ при $\gamma = 1 - \nu$. Учитывая найденное в соотношении (9), имеем

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \gamma t_\gamma(\tau) + \int\limits_0^{1-\gamma} t_{1-\nu}(\tau) d\gamma.$$

Перейдя в интеграле к новой переменной по формуле $\mu = 1 - \nu$, получим

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \gamma t_\gamma(\tau) - \int\limits_1^{\gamma} t_\mu(\tau) d\mu.$$

Откуда, поменяв местами пределы интегрирования, имеем

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \gamma t_\gamma(\tau) + \int\limits_\gamma^{1} t_\mu(\tau) d\mu. \tag{10}$$

Учитывая (6) в полученном (10), найдем искомую формулу (5), что и доказывает теорему 1.

Чтобы дать геометрическую интерпретацию формуле (5), покажем, что $t_\mu(\tau)$ — мю-процентный остаточный ресурс объекта сверх времени τ как функция переменной μ монотонно убывает на интервале (0, 1).

В самом деле, т.к. согласно (2) $P_\tau(t_\mu(\tau)) = \mu$, то, взяв производную по переменному μ, получим $P'_\tau(t_\mu(\tau))\dfrac{\partial t_\mu(\tau)}{\partial\mu} = 1$. Откуда найдем $\dfrac{\partial t_\mu(\tau)}{\partial\mu} = \dfrac{1}{P'_\tau(t_\mu(\tau))}$.

Поскольку правая часть найденного выражения отрицательна, то и левая должна быть отрицательной. Следовательно, $t_\mu(\tau)$ как функция переменной μ монотонно убывает на интервале (0, 1), что отражено на интервале $(\gamma, 1)$ рис. 1.

На рис. 1 видно, что площадь под кривой $T_\mu^{(\gamma)}(\tau)$, согласно математической интерпретации интеграла (5), выражает значение показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$. Поскольку общая область состоит из двух частей: область прямоугольника, площадь которого равна $\gamma t_\gamma(\tau)$ — это первое слагаемое формулы (10) и область криволинейного треугольника, площадь которого равна $\int_\gamma^1 t_\mu(\tau) d\mu$ — второе слагаемое формулы (10), то рис. 1 дает наглядную геометрическую интерпретацию значения показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$.

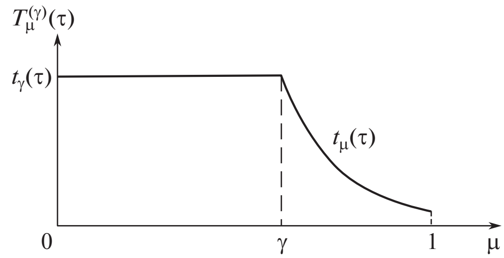

Рис. 1. Геометрическая интерпретация значения показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$.

Поскольку показатель $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ цензурирован сверху величиной $t_\gamma(\tau)$, то определим полный (нецензурированный) показатель средний остаточный ресурс объекта сверх времени τ по формуле

$$\rho(\tau) = E[(\zeta - \tau)/(\zeta > \tau)], \tag{11}$$

где $E[\cdot]$ – математическое ожидание случайной величины, заключенной внутри скобок. Очевидно, что

$$\rho(\tau) = \lim_{\gamma\to 0} R(\tau, t_\gamma(\tau)). \tag{12}$$

Следствие 1. Справедлива следующая формула для полного среднего ресурса объекта сверх времени τ: $\rho(\tau) = \int_0^1 t_\mu(\tau)\, d\mu$.

В частности, при $\tau = 0$ имеем $\lim_{\gamma\to 0} R(0, t_\gamma) = \int_0^1 t_\mu d\mu$, где $t_\gamma = t_\gamma(0)$, $t_\mu = t_\mu(0)$ – соответствующие безостаточные гамма-процентные ресурсы.

Следствие 2. Справедлива следующая оценка: $R(\tau, t_\gamma(\tau)) \ge \gamma t_\gamma(\tau)$. Эта оценка следует из формулы (10). Рис. 1 наглядно демонстрирует эту оценку, т.к. общая площадь под кривой равная $R(\tau, t_\gamma(\tau))$, больше, чем площадь прямоугольника, равная $\gamma t_\gamma(\tau)$.

Заметим, что формула (5) справедливая для любого закона расходования ресурса и является основой расчета показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ для конкретных законов. Покажем это.

Задача. Пусть расходование ресурса объекта на отрезке времени $(0, l)$ подчиняется равномерному закону распределения, т.е. вероятность безотказной работы объекта в течение времени t равна [5]

$$P(t) = 1 - \frac{t}{l}, \tag{13}$$

где $0 < t < l$ и задана условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, t_\gamma(\tau))$, равная γ, $(0 < \gamma < 1)$. Вывести формулу расчета среднего остаточного ресурса сверх времени τ в течение продолжительности $t_\gamma(\tau)$.

Решение. Используя формулы (2) и (3), с учетом (13), получим формулу расчета мю-процентного остаточного ресурса сверх времени τ

$$t_\mu(\tau) = (l - \tau)(1 - \mu), \tag{14}$$

где $\gamma \le \mu < 1$. Подставляя полученное в (5), имеем

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = (l - \tau)\gamma(1 - \gamma) + (l - \tau)\int_\gamma^1 (1 - \mu)\, d\mu.$$

Так как $\int_\gamma^1 (1 - \mu)\, d\mu = \frac{(1 - \gamma)^2}{2}$, то искомая формула расчета среднего остаточного ресурса сверх времени τ в течение продолжительности $t_\gamma(\tau)$ для равномерного закона равна

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = (l - \tau)\frac{1 - \gamma^2}{2}. \tag{15}$$

Например, если $l = 10000$ ч, $\tau = 5000$ ч, $\gamma = 0.95$, то, согласно (14), $t_\gamma(\tau) = 250$ ч и тогда по формуле (15) найдем средний остаточный ресурс сверх времени 5000 ч в течение продолжительности 250 ч, равный $R(\tau, t_\gamma(\tau)) = 244$ ч.

Для сравнения, согласно (12) и (15), полный средний ресурс сверх времени $\tau = 5000$ ч, равен $\rho(\tau) = \frac{l - \tau}{2} = 2500$ ч.

Зависимость показателя $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ от характеристик расходования ресурса. В некоторых случаях, мерой скорости расходования ресурса объекта служит заданная функция интенсивности отказов. В связи с этим, найдем функциональную зависимость показателей среднего остаточного ресурса $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ и $\rho(\tau)$ от функции интенсивности отказов.

Пусть

$$\lambda(t) = \frac{-P'(t)}{P(t)}, \tag{16}$$

функция интенсивности отказов, где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t [6]. Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$ равна γ, $(0 < \gamma < 1)$. Тогда для среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ в течение длительности $t_\gamma(\tau)$ справедлива формула

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \int_\gamma^1 \frac{d\mu}{\lambda(\tau + t_\mu(\tau))}. \tag{17}$$

Доказательство. Дифференцируя выражение (10), получим

$$\frac{\partial R(\tau, t_\gamma(\tau))}{\partial \gamma} = \gamma \frac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial \gamma}. \tag{18}$$

Далее, воспользуемся соотношением, которое вытекает из (2) и (3)

$$\frac{P(\tau + t_\gamma(\tau))}{P(\tau)} = \gamma. \tag{19}$$

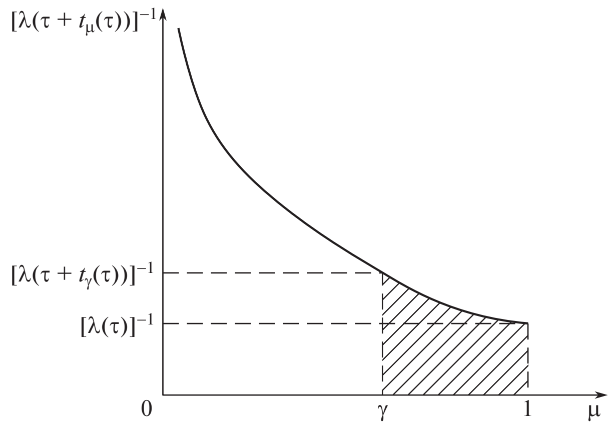

Рис. 2. Геометрическая интерпретации формул (17) и (21).

Так как $P\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)=\gamma P(\tau)$, то $P'\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)\dfrac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\gamma}=P(\tau)$. Откуда найдем

$$\frac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\gamma}=\frac{P(\tau)}{P'(\tau+t_\gamma(\tau))}.$$

Используя формулу (16), имеем $\dfrac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\gamma}=\dfrac{-P(\tau)}{P\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)\lambda\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)}$. Учитывая (19), получим $\dfrac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\gamma}=\dfrac{-1}{\gamma\lambda\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)}$. Подставляя полученное в (18), найдем $\dfrac{\partial R\left(\tau,t_\gamma(\tau)\right)}{\partial\gamma}=$ $=\dfrac{-1}{\lambda\left(\tau+t_\gamma(\tau)\right)}$. Полагая $\gamma=\mu$, имеем $\dfrac{\partial R\left(\tau,t_\mu(\tau)\right)}{\partial\mu}=\dfrac{-1}{\lambda\left(\tau+t_\mu(\tau)\right)}$.

Далее, интегрируя полученное выражение найдем

$$R\left(\tau,t_1(\tau)\right)-R\left(\tau,t_\gamma(\tau)\right)=-\int_\gamma^1\frac{d\mu}{\lambda\left(\tau+t_\mu(\tau)\right)}. \tag{20}$$

Так как $t_1(\tau)=0$, то согласно (10) $R\left(\tau,t_1(\tau)\right)=0$. Учитывая (20), найдем (17), что и доказывает теорему 2.

Следствие. Для полного среднего ресурса объекта сверх времени τ справедлива следующая формула:

$$\rho(\tau)=\int_0^1\frac{d\mu}{\lambda\left(\tau+t_\mu(\tau)\right)}. \tag{21}$$

В самом деле, согласно (12) и (17), для показателя (11) получим (21).

Поскольку интеграл от функции $\left[\lambda\left(\tau+t_\mu(\tau)\right)\right]^{-1}$ – это площадь под графиком этой функции, то геометрическая интерпретация формул (17) и (21) – соответствующие этим формулам площади (рис. 2). А именно: заштрихованная область имеет площадь, рассчитанную по формуле (17); суммарная площадь областей состоит из заштрихованной и незаштрихованной частей и имеет площадь, вычисленную по формуле (21).

Пример 1. Пусть задана условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$, равная γ, $(0 < \gamma < 1)$ и пусть интенсивность отказов объекта на этом интервале времени постоянна и равна $\mu > 0$, т.е.

$$\lambda(t) = \mu, \tag{22}$$

где $\tau < t < \tau + t_\gamma(\tau)$. Найти формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$ и формулу расчета полного остаточного ресурса сверх времени τ.

Решение. Используя условие (22) в (17), получим формулу расчета среднего остаточного ресурса объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \frac{1-\gamma}{\mu}. \tag{23}$$

Далее, используя (23) в определении (12), найдем формулу расчета полного остаточного ресурса сверх времени τ, равную

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\mu}. \tag{24}$$

Сравнивая формулы (23) и (24), получим $R(\tau, t_\gamma(\tau)) = q\rho(\tau)$, где $q = 1 - \gamma$. Другими словами, средний остаточный ресурс на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$ — это доля полного остаточного ресурса сверх времени τ, равная q.

Предельное значение среднего остаточного ресурса. Для объектов с большим сроком службы интенсивность отказов, как правило, носит установившийся постоянный характер. Для такого рода объектов докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция интенсивности отказов объекта удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\to\infty} \lambda(\tau) = z, \tag{25}$$

где $z > 0$ — постоянная и пусть задана γ, $(0 < \gamma < 1)$ условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$. Тогда справедливо следующее предельное значение среднего остаточного ресурса:

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau, t_\gamma(\tau)) = \frac{1-\gamma}{z}. \tag{26}$$

Доказательство. Так как $t_\gamma(\tau) > 0$, то $\tau < \tau + t_\gamma(\tau)$, и тогда, согласно (25), имеем $\lim\limits_{\tau\to\infty} \lambda(\tau + t_\gamma(\tau)) = z$.

По определению конечного предела z при стремлении $\tau \to \infty$ имеем следующее: каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него существует такое число $\Delta > 0$, что

$$|\lambda(\tau + t_\gamma(\tau)) - z| < \varepsilon, \tag{27}$$

лишь только $\tau > \Delta$. Следовательно, выбрав положительное число $\varepsilon < z$, согласно (27), получим $z - \varepsilon < \lambda(\tau + t_\gamma(\tau)) < z + \varepsilon$ при $\tau > \Delta$. Используя это в выражении (17), имеем

$$\frac{1-\gamma}{z+\varepsilon} < R(\tau, t_\gamma(\tau)) < \frac{1-\gamma}{z-\varepsilon}. \tag{28}$$

Устремив число ε к нулю, получим искомую формулу (26), что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть функция интенсивности отказов удовлетворяет условию (25). Тогда справедливо предельное значение полного среднего остаточного ресурса $\lim\limits_{\tau\to\infty} \rho(\tau) = \dfrac{1}{z}$.

Пример 2. Пусть расходование ресурса изделия эдлектронной техники подчиняется экспоненциальному закону, интенсивность отказов которого равна

$$\mu = 2\times 10^{-5}\ 1/\text{ч}. \tag{29}$$

При этом данное изделие зарезервировано аналогичным изделием в горячем режиме непрерывной работы. Найти предельное значение среднего остаточного ресурса образованного блока (из двух параллельно соединенных изделий) при заданном уровне вероятности безотказности, равной $\gamma = 0.9$.

Решение. Так как интенсивность отказов блока равна [9, 10]

$$\lambda(\tau) = \mu\left(1 - \frac{\exp(-\mu\tau)}{2 - \exp(-\mu\tau)}\right), \tag{30}$$

то $\lim\limits_{\tau\to\infty}\lambda(\tau) = \mu$. Следовательно, согласно (26) и (29), искомый предел среднего остаточного ресурса блока равен $\lim\limits_{\tau\to\infty} R(\tau, t_{0.9}(\tau)) = \dfrac{0.1}{\mu} = 5\times 10^3$ ч.

Нижние гарантированные оценки средних остаточных ресурсов. Характеристики остаточного ресурса используются как для дискретного случая воздействия на объект [7], так и для непрерывного [8]. В этих случаях более востребованными оказываются достижимые нижние гарантированные оценки показателей средних остаточных ресурсов. В связи с этим установим следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть функция интенсивности отказов в зависимости от времени монотонно возрастает и удовлетворяет условию (25). Тогда справедлива следующая достижимая нижняя гарантированная оценка среднего остаточного ресурса объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t_\gamma(\tau))$:

$$R(\tau, \tau + t_\gamma(\tau)) \ge \frac{1-\gamma}{z}. \tag{31}$$

Доказательство. Используя формулу (17), получим

$$\frac{\partial R(\tau, t_\gamma(\tau))}{\partial\tau} = -\int_\gamma^1 \frac{\left(1 + \dfrac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\tau}\right)}{\lambda^2(\tau + t_\mu(\tau))}\frac{\partial\lambda(\tau + t_\mu(\tau))}{\partial\tau}d\mu. \tag{32}$$

Так как [1] $1 + \dfrac{\partial t_\gamma(\tau)}{\partial\tau} = \dfrac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau + t_\mu(\tau))}$, то, учитывая это в (32), имеем

$$\frac{\partial R(\tau, t_\gamma(\tau))}{\partial\tau} = -\int_\gamma^1 \frac{\lambda(\tau)}{\lambda^3(\tau + t_\mu(\tau))}\frac{\partial\lambda(\tau + t_\mu(\tau))}{\partial\tau}d\mu. \tag{33}$$

Согласно условию теоремы, функция интенсивности отказов объекта монотонно растет, значит $\dfrac{\partial\lambda(\tau + t_\mu(\tau))}{\partial\tau} > 0$. Учитывая это в соотношении (33), получим $\dfrac{\partial R(\tau, t_\gamma(\tau))}{\partial\tau} < 0$. Откуда следует, что показатель $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ как функция времени τ монотонно убывает. Следовательно, $R(\tau, t_\gamma(\tau)) > R(\tau_1, t_\gamma(\tau_1))$, где $\tau_1 > \tau$. Применяя левую часть оценки (28), имеем

$$R(\tau, t_\gamma(\tau)) > \frac{1-\gamma}{z+\varepsilon}, \tag{34}$$

где $0 < \varepsilon < z$ и $\tau > \Delta$.

Поскольку левая часть оценки (34) не зависит от ε, то перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, найдем искомую оценку (31), которая, согласно (23), достижима, что доказывает теорему полностью.

Следствие. В условиях теоремы 4, справедлива следующая достижимая нижняя гарантированная оценка полного среднего остаточного ресурса объекта сверх времени τ:

$$\rho(\tau) \geq 1/z. \tag{35}$$

В самом деле, переходя к пределу при $\gamma \to +0$ в оценке (31), согласно определению (12), найдем искомую оценку (35).

Достижимость оценок (35) и (31) следует из формул (23) и (24).

Пример 3. В условиях примера 2 найти нижние оценки показателей $R(\tau, t_\gamma(\tau))$ и $\rho(\tau)$ для блока из двух параллельно соединенных однотипных изделий.

Решение. Используя (30), имеем $\lambda'(\tau) = \dfrac{2\mu^2 \exp(-\mu\tau)}{(2 - \exp(-\mu\tau))^2}$. Так как правая часть полученного выражения положительна, то функция интенсивности отказов (30) монотонно растет, принимая значения от нуля до μ. Следовательно, согласно (29) и (31) получим следующую нижнюю оценку:

$$R(\tau, t_{0.9}(\tau)) \geq \frac{1 - 0.9}{\mu} = 5 \times 10^3 \text{ ч.}$$

Для нижней оценки полного среднего остаточного ресурса, согласно (35) и (29), имеем $\rho(\tau) \geq 1/\mu = 5 \times 10^4$ ч.

Таким образом, доказаны формулы расчета и оценки показателей среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых объектов сверх назначенных ресурсов в течение длительности, определяемой расчетным способом в зависимости от заданного уровня безотказности. Исследована достижимость установленных оценок. Приведены примеры использования полученных результатов в задачах продления сроков эксплуатации объектов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00574-а и № 10-08-00607-а).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
2. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности и их статистический анализ. М.: URRS, 2013. 584 с.
3. ГОСТ Р 27.002.2009. Надежность в технике. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2011. 32 с.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2001. 298 с.
5. *Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В.* Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления // Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 11. С. 3. (5)

6. *Артюхов А.А.* Оценка средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Труды ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. С. 295. (6)
7. *Петушков В.А.* К прогнозированию остаточного ресурса конструкций с повреждениями, подвергаемых в эксплуатации ударным воздействиям // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 91.
8. *Северцев Н.А., Юрков Н.К., Нгуен К.Т.* Показатель “средний остаточный срок утилизации технических объектов” и его свойства // Надежность и качество: Труды междунар. симпозиума. В 2-х томах / Под ред. Н.К. Юркова / Пенза: Изд-во ПГУ. 2019. Т. 1. С. 202.
9. *Павлов И.А.* Доверительная граница для показателей надежности системы с возрастающей интенсивностью отказов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 70.
10. *Сидняев Н.И.* Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 4. С. 24.