
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 537.634

**МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ И ТОКОВЫХ СИСТЕМАХ**

© 2022 г. А. К. Андреев

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия**e-mail: alexande_andreev@yahoo.com*

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.

После доработки 11.08.2022 г.

Принята к публикации 19.08.2022 г.

Предложен метод расчета радиальных и аксиальных механических напряжений в многослойных магнитных и токовых системах с произвольными расстояниями между слоями. Напряжения вычисляются из энергии аксиально намагниченных цилиндров. Приведены расчетные формулы 3D-полей и размагничивающих факторов цилиндров, выраженные через функции Бесселя. Представлены тестовые результаты расчетов напряжений и, как дополнение, взаимных индуктивностей системы катушек и индуктивностей отдельных слоев.

Ключевые слова: механические напряжения, размагничивающий фактор, межслойные напряжения, функции Бесселя, пондеромоторные силы, индуктивность

DOI: 10.31857/S0235711922060037

Расчет пондеромоторных сил в магнитных системах необходим при разработке различных устройств и механизмов в машиностроении и других областях. Выполненные ранее подобные расчеты связаны, в основном, с созданием импульсных магнитных полей высокой интенсивности. Работы [1–5] посвящены технической реализации поставленных задач с акцентом на прочностные характеристики изделий. В расчетах используются приближенные формулы определения магнитных полей, полученные методами теоретической электротехники для токовых систем. Обычно рассчитываются интегральные напряжения обмотки по среднему витку.

В статье приведен альтернативный аналитический метод определения пондеромоторных сил и взаимной индуктивности сложных коаксиальных магнитных систем. Метод основан на модели аксиально намагниченного цилиндра и применим для катушек с плотной намоткой.

Катушка, цилиндр и связанные с ними системы координат показаны на рис. 1.

В модели используется факт равенства внутренних энергий аксиально намагниченных цилиндров и геометрически эквивалентных им катушек. Этот метод использовался в работе [6] при расчете взаимных индуктивностей катушек и пондеромоторных сил при взаимном продольном смещении двух магнитных систем. В [6] приведены ссылки на публикации, содержащие детали теоретической модели, не представленные в настоящей статье.

Математическая модель. В расчетах используются формулы, связывающие намагниченность цилиндра M_z с плотностью поверхностного тока цилиндра $j_{\text{пов}}$ и поверхностными “магнитными зарядами” [7]: $j_{\text{пов}} = \text{Rot } M_z$, $\sigma = -\text{Div } M_z$. При однородной

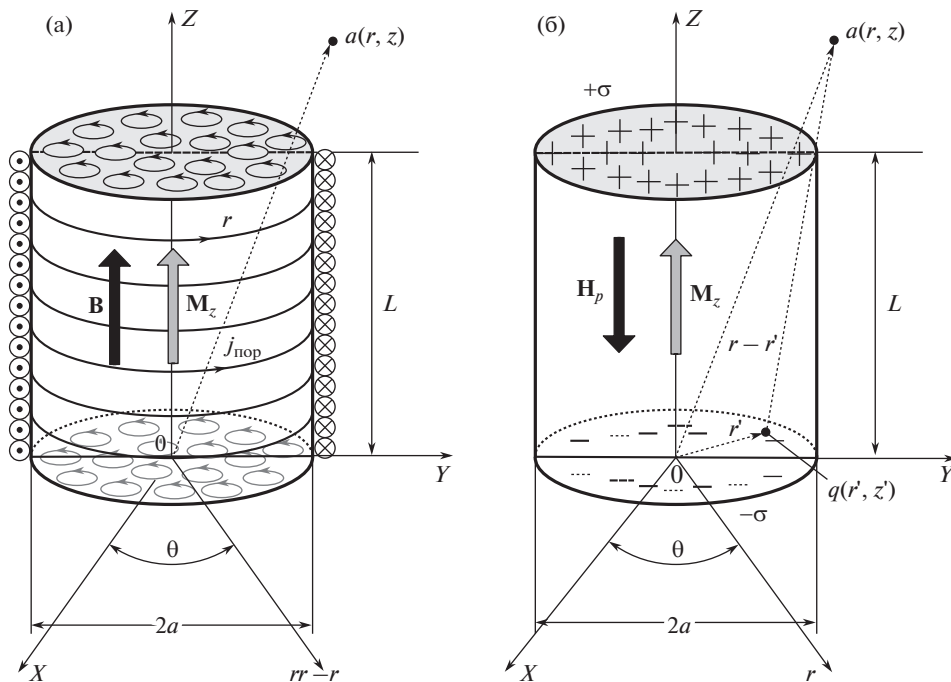


Рис 1. Схема определения индукции катушки и цилиндра \mathbf{B} – (а); Схема расчета поля цилиндра \mathbf{H} – (б); $q(r', z')$ – точка источника поля; $a(r, z)$ – точка наблюдения. Начало координат расположено в торце систем.

намагниченности ($M_z = \text{const}$) $\mathbf{J}_{\text{пов}} = [M_z \mathbf{n}]$ (рис. 1а), $\sigma = M_z \mathbf{n}$ (рис. 1б), где \mathbf{n} – внешняя нормаль к боковой и торцевым поверхностям цилиндра. В скалярной записи имеем соответственно

$$M_z = j_{\text{пов}}, \quad \sigma = M_z. \quad (1)$$

При заданных параметрах катушки: длине L , диаметре $2a$, числе витков w и токе в витке I плотность тока обмотки $j = wI/n$. Полагая $j_{\text{пов}} = j$ эквивалентная намагниченность равноразмерного цилиндра равна $M_z = j$ (рис. 1а), что обеспечивает равенство индукций катушки и цилиндра \mathbf{B} во всем пространстве. При определенных выше условиях равноразмерная катушка эквивалентна цилиндру и далее токовая модель (катушка) в расчетах не используется.

Поля в объемах катушки и цилиндра радикально различаются. Согласно дипольной (“зарядовой”) модели намагниченности на торцах однородно намагниченного цилиндра возникают поверхностные “магнитные заряды” $\pm\sigma$ (рис. 1б). “Заряды” создают размагничивающее поле $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ в объеме цилиндра, определяемое размагничивающим фактором формы образца $N(\mathbf{r})$, и поле рассеяния вне его, обозначаемое также символом \mathbf{H}_p . Размагничивающее поле $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ связано с M_z через размагничивающий фактор $N(\mathbf{r})$

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r}) = -N(\mathbf{r}) \cdot M_z. \quad (2)$$

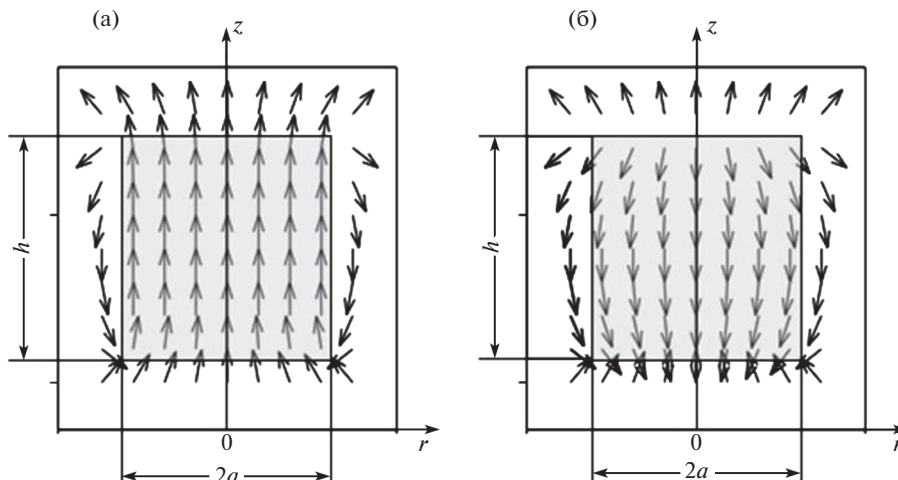


Рис. 2. График векторного поля индукции B – (а); график векторного поля H – (б). Внутренняя область магнитной системы в рамке затемнена.

Вне цилиндра $M_z = 0$ и размагничивающее поле равно нулю $H_p = 0$. Поле H_p терпит разрыв на торцах цилиндра. H_p и $N(r)$ есть функции координат \mathbf{r} . Вне цилиндра $N(r)$ есть коэффициент пропорциональности между M_z и полем рассеяния. Поля H_p внутри и вне образца рассчитываются по единым аналитическим выражениям.

Индукция цилиндра \mathbf{B} связана с H_p и M_z соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_p + \mathbf{M}_z), \tag{3}$$

где μ_0 – магнитная постоянная. На рис. 2 приведены графики векторного поля индукции B и поля H вдоль осевого сечения цилиндра.

На рис. 3 построены графики изменения B_z и H_z цилиндра вдоль продольного Z ($r = 0$) и радиального r ($z = L/2$) направлений.

Размагничивающий фактор аксиально намагниченного цилиндра. Расчет размагничивающего фактора N и поля H_p проводится с использованием модели однородно намагниченного в аксиальном направлении цилиндрического магнита. Для расчета N используется “зарядовая модель” (рис. 1б). То есть, поле цилиндра рассчитывается как суперпозиция полей от торцевых поверхностей с поверхностными “магнитными зарядами” $+\sigma$ и $-\sigma$.

Схема определения потенциала отрицательно заряженного торца цилиндра в точке наблюдения $a(z, r)$ приведена на рис. 1б. Точка наблюдения может располагаться как в объеме образца, так и вне его. Магнитоэстатический потенциал в точке наблюдения определяемый намагниченностью равен [8]

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \tag{4}$$

где \mathbf{r}' – радиус-вектор точки источника $q(r', z')$; \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения $a(r, z)$. $d^3 \mathbf{r}'$ – означает элемент объема V' . Формулы (4) определяют потенциал как внутри (в объеме) ферромагнетика, так и вне его. Поле внутри и вне ферромагнетика

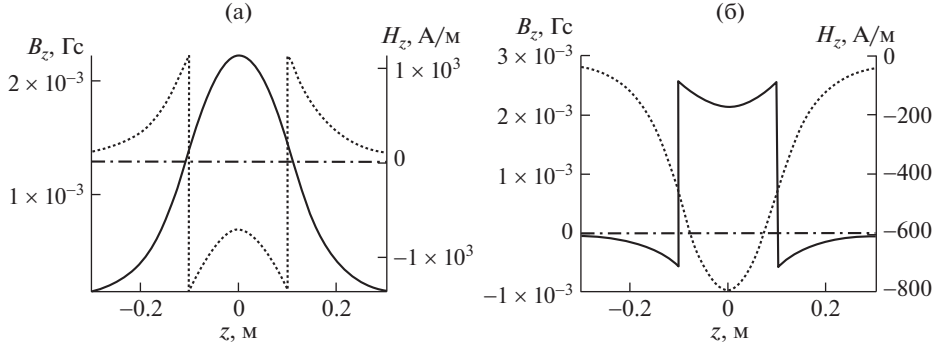


Рис. 3. Графики изменения индукции B_z и поля H_z одиночного цилиндра с параметрами $a = 10$ см, $L = 20$ см, $M_z = 2.5 \times 10^3$ А/м: (а) – вдоль оси Z ; (б) – в радиальном направлении r по центру цилиндра ($z = L/2$).

при известном распределении $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ выражается через градиент потенциала (4) в точке наблюдения $a(z, r)$.

При однородной намагниченности M_z вдоль оси Z поля H_p равны

$$H_p(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(r) = -M_z \left[\nabla \int_{V'} \alpha(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] = -M_z N(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где $\alpha(\mathbf{r}') = \alpha_z = 1$ – единичный вектор направления намагниченности. Штрихованный и не штрихованный операторы означают дифференцирование по точкам источника $q(r', z')$ и наблюдения $a(r, z)$, соответственно. Выражение, заключенное в квадратные скобки, определяет размагничивающий фактор $N(\mathbf{r})$. Компоненты поля H_p можно определить следующим образом $H_i = -N_{iz} M_z$, $i = r, z$. Исключая M_z из (5) можно записать следующий вспомогательный потенциал в цилиндрической системе координат:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = -\int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (L-z)^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \right] \quad 0 \leq z \leq L \wedge |r| \leq a. \quad (6)$$

Потенциалы (6) хорошо изучены и выражаются через специальные функции. Представление через функции Бесселя [9, 10] запишем как

$$\psi_1(r, z) = 2\pi a \int_0^\infty J_0(tr) J_1(ta) \left[e^{-tz} + e^{-(L-z)t} \right] \frac{dt}{t}, \quad (0 \leq z \leq L) \wedge |r| \leq a, \quad (7)$$

где $J_0(tr)$, $J_1(ta)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка от действительного аргумента. Применяя теорему Липшица и теорему сложения бesselевых функций получаем формулы для размагничивающих факторов [11]

$$N_{zz}(r, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \Psi_1(r, z) = \frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1(ta) \left[e^{-tz} + e^{-t(L-z)} \right] dt, \quad 0 \leq z \leq L \wedge |r| \leq a, \quad (8)$$

$$N_{rz}(r, z) = -\frac{\partial}{\partial r} \Psi_1(r, z) = -\frac{1}{2} a \int_0^{\infty} J_1(tr) J_1(ta) \left[e^{-tz} - e^{-t(L-z)} \right] dt, \quad |r| \leq a.$$

Для расчета полей удобно использовать координатную систему с началом координат в центре цилиндра. Размагничивающие коэффициенты для расчета 3D-полей внутри и вне цилиндра равны [6]

$$N_{zz}(n, r, z') = \begin{cases} \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-tz'} + e^{-t[L(n)-z']} \right] dt, & \text{если } [0 \leq z' \leq L(n)], \\ \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-tz'} - e^{t[L(n)-z']} \right] dt, & \text{если } [z' > L(n)], \\ \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-t[L(n)-z']} - e^{tz'} \right] dt, & \text{если } (z' < 0), \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{L(n) - z'}{\sqrt{[L(n) - z']^2 + a^2}} + \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + a^2}} - \frac{L(n) - z'}{|L(n) - z'|} - \frac{z'}{|z'|} \right] & \text{везде;} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{rz}(n, r, z') = \begin{cases} \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-tz'} + e^{-t[L(n)-z']} \right] dt, & \text{если } [0 \leq z' \leq L(n)], \\ \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-tz'} - e^{t[L(n)-z']} \right] dt, & \text{если } [z' > L(n)], \\ \frac{1}{2} a(n) \int_0^{\infty} J_0(tr) J_1[ta(n)] \left[e^{-t[L(n)-z']} - e^{tz'} \right] dt, & \text{если } (z' < 0), \end{cases}$$

где $a(n)$, $L(n)$ – радиус и длина n -го цилиндра, соответственно; $z'(z, n) = z + L(n)/2$; Z и r – компоненты полей определим как

$$H_z(n, r, z') = -M_z(n) N_{zz}(n, r, z'), \quad H_r(n, r, z') = -M_z(n) N_{rz}(n, r, z'). \quad (10)$$

Поле H_r перпендикулярно M_z , не вносит вклада в энергию, и в дальнейших расчетах не учитывается.

С учетом (2), (3), (10) получаем Z компоненту индукции

$$B_z(n, r, z') = \begin{cases} \mu_0 M_z(n) [1 - N_{zz}(n, r, z')], & \text{если } 0 < z' \leq L(n) \wedge |r| < a(n), \\ \mu_0 H_z(n, r, z') & \text{везде.} \end{cases} \quad (11)$$

Расчетная схема пондеромоторных сил для системы 3-х цилиндров (катушек) $n = 3$ приведена на рис. 4.

В расчетных формулах введены следующие обозначения: M – число слоев катушки (цилиндров); n – порядковый номер слоя ($n = 1, \dots, M$); $2a1$ – диаметр 1-го слоя; $2an$ – диаметр n -го слоя; $2aM$ – диаметр внешнего слоя; $L(n)$ – длина n -го цилиндра; $w(n)$ – число витков n -го слоя катушки.

В статье для демонстрации модели принято: концентрические цилиндры имеют равные длины $L(n)$, число слоев цилиндров $M = 3$. Для задания расстояния между слоями по r выбрана степенная функция

$$Func(aM, a1, n, k) = \left[(n - 1/M - 1)^k \right] \cdot (aM - a1),$$

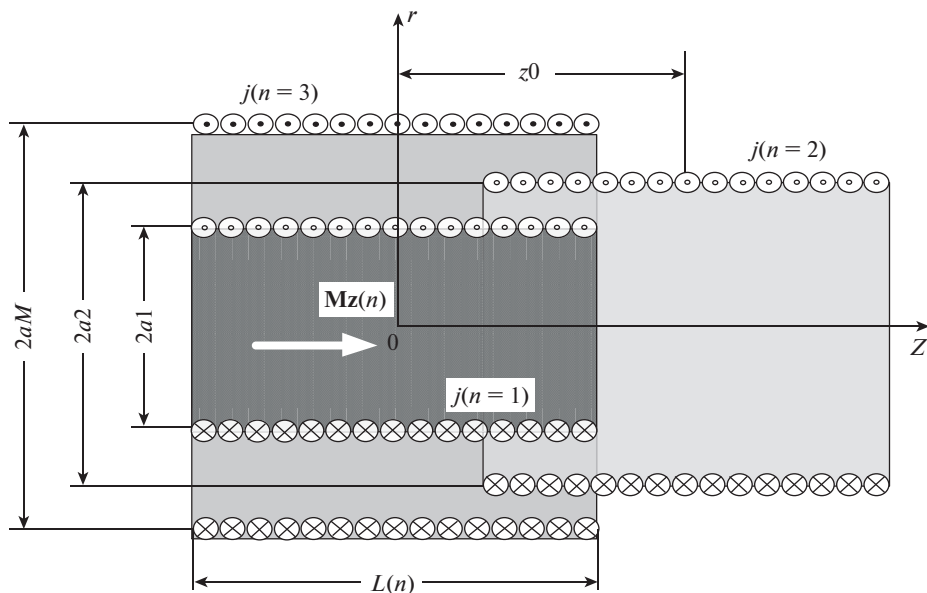


Рис. 4. $j(n)$ – плотность поверхностного тока n -го цилиндра (катушки), $M_z(n)$ – намагниченность n -го слоя цилиндра, z_0 – сдвиг n -го цилиндра относительно начала координат.

где k – показатель степени; $k = 1$ соответствует равным расстояниям между слоями. Радиус n -го слоя определяется как

$$a(n) = \begin{cases} a1, & \text{если } n = 1 \vee M = 1, \\ \text{не число,} & \text{если } n > M, \\ a1 + \text{Funcck}(aM, a1, n, k) & \text{везде.} \end{cases}$$

Ниже приведены результаты расчетов для следующих параметров системы:

$$a(n) = \begin{cases} 10 \text{ см,} & n = 1, \\ 15 \text{ см,} & n = 2, \\ 20 \text{ см,} & n = 3; \end{cases} \quad L(n) = \begin{cases} 20 \text{ см,} & n = 1, \\ 20 \text{ см,} & n = 2, \\ 20 \text{ см,} & n = 3; \end{cases} \quad w(n) = \begin{cases} 100, & n = 1, \\ 100, & n = 2, \\ 100, & n = 3; \end{cases}$$

$$M_z(n) = \begin{cases} 2.5 \times 10^3 \text{ А/м,} & n = 1, \\ 2.5 \times 10^3 \text{ А/м,} & n = 2, \\ 2.5 \times 10^3 \text{ А/м,} & n = 3; \end{cases} \quad I(n) = \begin{cases} 5 \text{ А,} & n = 1, \\ 5 \text{ А,} & n = 2, \\ 5 \text{ А,} & n = 3; \end{cases}$$

$$\text{Funcck}(aM, a1, n, k) = \begin{cases} 0 \text{ см,} & n = 1, \\ 5 \text{ см,} & n = 2, \\ 10 \text{ см,} & n = 3. \end{cases}$$

Энергия n -го цилиндра в поле i -го определяется формулой

$$E_{\text{cyl}}(n, i, r, z) = 2\pi \int_{-L(n)/2}^{L(n)/2} \int_0^{a(n)} \frac{M_z(n) B_z(i)}{2} r dr dz, \quad i = 1 \dots n. \quad (12)$$

При $n = i$ получаем внутреннюю энергию n -го цилиндра. Взаимные энергии цилиндров равны. Равенство взаимных энергий не означает равенство взаимных поверхностных напряжений, что объясняется различной площадью поверхности цилиндров вследствие различия их диаметров.

Радиальная $\langle \sigma n_i_r \rangle$ и аксиальная $\langle \sigma n_i_z \rangle$ плотности сил по цилиндрической и торцевой поверхностям n -го цилиндра в собственном поле $B_z(n)$ (усредненные по поверхностям) напряжения Н/м² равны

$$\langle \sigma n_i_r \rangle = \frac{d}{dan(n)} E_{cyl}(n, i, r, z) / L(n) 2\pi a n(n), \quad (13)$$

$$\langle \sigma n_i_z \rangle = \frac{d}{dL(n)} E_{cyl}(n, i, r, z) / \pi a n(n)^2. \quad (14)$$

Далее для демонстрации конкретных методов и результатов расчетов используется упрощенная запись основных соотношений. В уравнениях индекс n заменяется числами 1, 2, 3. Таким образом, в расчетах теперь фигурируют три цилиндра, между которыми определяются энергетические зависимости. Такой метод делает вычисления более прозрачными и удобен для систем, содержащих небольшое число цилиндров (ориентировочно до пяти). В противном случае необходимо полностью использовать приведенный метод программирования.

Расчет напряжений в системе 3-х концентрических цилиндров ($z_0 = 0$). В новом определении (обозначении) первой цифрой 1 обозначается рассчитываемый цилиндр или катушка. Последующие цифры относятся к внешним относительно его магнитным системам. Вместо индекса n используется запись: $M_z(n = 2) \rightarrow M_z 2$, $B_z(n = 1) \rightarrow B_z 1$, $B_z(n = 3) \rightarrow B_z 3$. В новом обозначении, например, энергия 2-го цилиндра в полях 1-го и 3-го записывается в виде

$$E_{213_{cyl}}(L2, a2) = 2\pi \int_{-L(2)/2}^{L(2)/2} \int_0^{a2} \frac{M_z 2 (B_z 1 (M_z 1, a1, r, z, L1) + B_z 3 (M_z 3, a3, r, z, L3))}{2} r dr dz. \quad (15)$$

Радиальная плотность силы по цилиндрической поверхности 2-го цилиндра в поле 1-го равна

$$\langle \sigma 21_r \rangle = \frac{d}{da2} E_{21_{cyl}}(L2, a2) / h 2\pi a 2. \quad (16)$$

Для плотности силы по поверхности 1-го цилиндра в поле 2-го имеем

$$\langle \sigma 12_r \rangle = - \frac{d}{da1} E_{12_{cyl}}(L1, a1) / h 2\pi a 1. \quad (17)$$

Легко рассчитываются напряжения, действующие на выделенный цилиндр в поле 2-х других. Так, например, суммарные радиальные напряжения 2-го цилиндра в полях 1-го и 3-го определяются как

$$\langle \sigma 213_r \rangle = \frac{dy}{da2} \left[\frac{E_{21}(L1, a1) + E_{23}(L3, a3)}{L 2\pi a 2} \right] = \langle \sigma 21_r \rangle + \langle \sigma 23_r \rangle. \quad (18)$$

Аналогично суммируются аксиальные напряжения.

На рис. 5 показаны взаимные радиальные механические напряжения по образующим цилиндров 3-х попарно.

Длины стрелок изображены в масштабе. Результирующие радиальные напряжения, действующие на отдельный цилиндр, получаются (с учетом знака) суммированием

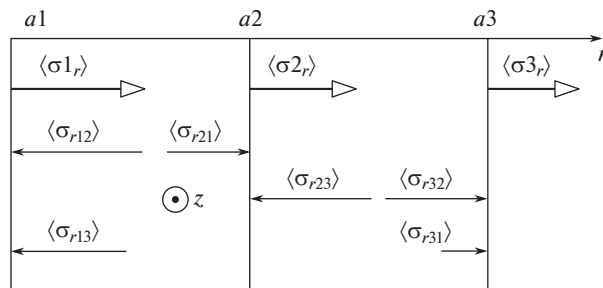


Рис. 5. Поверхностные радиальные напряжения цилиндров. $\langle \sigma_{1r} \rangle, \langle \sigma_{2r} \rangle, \langle \sigma_{3r} \rangle$ – напряжения, действующие на цилиндрические поверхности отдельных цилиндров в собственных полях (Н/м^2). $\langle \sigma_{1r} \rangle = 2.275$, $\langle \sigma_{2r} \rangle = 1.867$, $\langle \sigma_{3r} \rangle = 1.588$. Взаимные напряжения: $\langle \sigma_{12r} \rangle = 2.259$, $\langle \sigma_{21r} \rangle = 1.43$, $\langle \sigma_{23r} \rangle = 2.078$, $\langle \sigma_{32r} \rangle = 1.767$, $\langle \sigma_{13r} \rangle = 1.801$, $\langle \sigma_{31r} \rangle = 0.818$.

напряжений по приведенной схеме рисунка. Так $\langle \sigma_{132r} \rangle = \langle \sigma_{13r} \rangle + \langle \sigma_{12r} \rangle = 4.06$, что соответствует расчетам по формуле (18).

Аксиальные напряжения рассчитываются по такой же схеме и эти вычисления в статье не приводятся. Попарные продольные (аксиальные) силы H при смещении n -го цилиндра в поле i -го в Z -направлении (рис. 3) вычисляются по формуле $F_{zni}(z_0) = dE_{ni}/dz_0$. Для системы цилиндров результирующая сила получается простым суммированием. Например, при смещении 2-го цилиндра с учетом полей 1-го и 2-го цилиндров $F_{z213}(z_0) = dE_{213}(z_0)/dz_0$.

На рис. 6 построены графики аксиальных сил F_z , действующих на n -й цилиндр ($n = 1, 2$) при смещении в Z -направлении, и соответствующих взаимных индуктивностей M эквивалентных катушек (рис. 4).

Радиальные силы стремятся увеличить диаметр магнитной системы, а аксиальные приводят к сжатию системы с торцов. Для катушек возникновение таких сил следует из закона Ампера.

Таблица 1. Параметры магнитной системы $n = 3$

Радиус и номер цилиндра $a(n)$, см	Энергия цилиндра E_n , Дж	Радиальные напряжения цилиндра $\langle \sigma_r \rangle$, Н/м^2	Аксиальные напряжения цилиндра $\langle \sigma_z \rangle$, Н/м^2	Взаимные энергии цилиндров E_{ni} , Дж	Взаимные радиальные напряжения $\langle \sigma_{ni} \rangle$, Н/м^2	Индуктивность катушек L_n , 10^3 Гн	Взаимная индуктивность катушек M_{ni} , 10^4 Гн
$a1 = 10$	0.017	-2.276	-3.406	$E_{12} = 0.013$	$\langle \sigma_{3r12} \rangle = -2.585$	$L_1 = 1.359$	$M_{12} = 5.233$
$a2 = 15$	0.033	-1.867	-3.013	$E_{13} = 0.011$	$\langle \sigma_{2r13} \rangle = -3.509$	$L_2 = 2.643$	$M_{13} = 4.811$
$a3 = 20$	0.052	-1.588	-2.714	$E_{23} = 0.026$	$\langle \sigma_{1r23} \rangle = -4.06$	$L_3 = 4.149$	$M_{23} = 11.04$

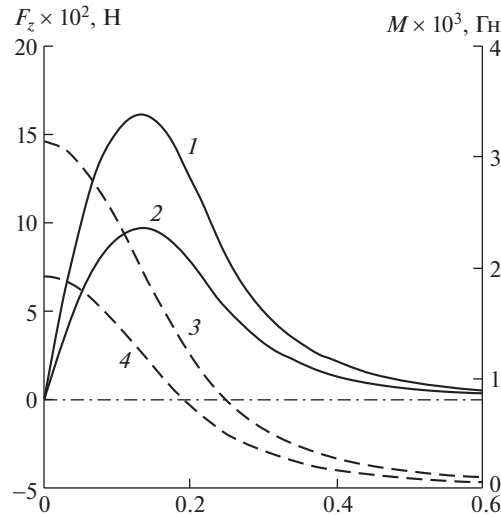


Рис. 6. 1 – $F_z 213$ ($n = 2$); 2 – $F_z 123$ ($n = 1$); 3 – $M 213$ ($n = 2$); 4 – $M 123$ ($n = 1$).

В случае однородно намагниченного цилиндра полная энергия увеличивается с ростом его диаметра, т.к. возрастает объем цилиндра и размагничивающее поле. Однако плотность энергии размагничивания равна

$$E_p(L, a, r, z) = \left(1/L\pi a^2\right) 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^a (Mz B_z(L, a, r, z)/2) r dr dz, \quad (\text{Дж/м}),$$

и уменьшается, что и приводит к возникновению сил, увеличивающих диаметр цилиндра.

Индуктивности $n = i$ и взаимные индуктивности катушек вычисляются из энергий и взаимных энергий цилиндров

$$M_{ni} = 2E_{ni}(n, i)/I(n)I(i). \tag{19}$$

В табл. 1 суммированы основные результаты расчетов параметров магнитной системы с используемой в статье модели.

Выводы. Показана эффективность расчетов магнитных систем, базирующаяся на концепции размагничивающего фактора цилиндра. Многие задачи расчета токовых систем (катушек) традиционно использующие методы электротехники эффективно решаются средствами, представленными в статье. Все расчетные значения взаимной индуктивности системы катушек, поверхностных механических напряжений и продольных пондеромоторных сил соответствуют данным работы [12].

В модели не накладываются какие-либо ограничения на число слоев, геометрические и магнитные параметры цилиндров (катушек) и их взаимное расположение. Магнитные и геометрические параметры систем задаются с учетом поставленной задачи. Метод применим к расчетам систем с параллельными осями. Модель позволяет рассчитывать гибридные магнитные и токовые системы универсальным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Монтгомери Д.* Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971. 359 с.

2. Карасик В.Р. Физика и техника сильных магнитных полей. М.: Наука, 1964. 347 с.
3. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Изд. МИР, 1972. 385 с.
4. Паркинсон Д., Малхолл Б. Получение сильных магнитных полей. М.: Атомиздат. 1971. 200 с.
5. Алиевский Б.Л., Октябрьский А.М., Орлов В.Л., Постников В.А. Моделирование магнитных полей осесимметричных систем: Учебное пособие / Под ред. Б.Л. Алиевского. М.: Изд-во МАИ, 2007. 320 с.
6. Андреев А.К. Поле многослойной многовитковой катушки с аналитически заданными законами изменений расстояний между слоями и витками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 1. С. 34.
<https://doi.org/10.1134/S0235711919010036>
7. Андреев А.К. Метод расчета пондеромоторных сил и взаимных индуктивностей в коаксиальных осесимметричных магнитных системах // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47. Вып. 11. С. 17.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.11.51001.18729>
8. Парселл Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975. 439 с.
9. Андреев А.К. Метод расчета взаимной индуктивности системы катушек с использованием модели аксиально намагниченного цилиндра // Письма в ЖТФ, 2020. Т. 46. Вып. 21. С. 48.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.21.50198.18042>
10. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
11. Vatan H. Partial differential equations of mathematical physics. New York: Dover Publications, 1944. 556 p.
12. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд. Иностранной литературы, 1954. 604 с.
13. Joseph R.J., Schlömann J. Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies // Appl. Phys. 1964. V. 36. № 5. P. 1579.
14. Андреев А.К. Метод расчета поверхностных механических напряжений в осесимметричных магнитных системах // Письма в ЖТФ. 2021. Т. 47. Вып. 9. С. 41.
<https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.09.50907.18626>
15. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.