

## МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.01

## ДИНАМИКА ГИБКОГО РОТОРА С ДИСКОМ ПРИ ТОЧЕЧНОМ КОНТАКТЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ ОГРАНИЧИТЕЛЯМИ КОЛЕБАНИЙ

© 2023 г. А. А. Азаров<sup>1,2</sup>, А. М. Гуськов<sup>1,2</sup>, Г. Я. Пановко<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*e-mail: gpanovko@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.09.2022 г.

После доработки 06.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

Рассмотрена динамика ротора с массивным диском при взаимодействии с дискретно расположенными в плоскости вращения диска вязкоупругими опорами — ограничителями колебаний. Получены дифференциальные уравнения, описывающие поперечные радиальные и угловые колебания ротора при его вращении. Решение представлено в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Исследуется закритическое поведение ротора после бифуркации Пуанкаре—Андропова—Хопфа, которое вызвано внутренним трением в материале вала. Введено обобщающее определение показателя прецессии ротора, позволяющее вычислять частоту и направление прецессии по информации о поперечных колебаниях ротора.

*Ключевые слова:* роторная система, критическая скорость, прецессия, упругие ограничители, внутреннее трение, неустойчивость, бифуркационный анализ

**DOI:** 10.31857/S0235711923010029, **EDN:** ASDRK1

Вращение ротора часто сопровождается различными, в том числе, и нелинейными эффектами, связанными с гироскопическими и аэрогидродинамическими силами, геометрическими особенностями вала, с взаимодействием с опорами, приводным двигателем и др. [1–6]. Отметим существенное влияние внутреннего трения, которое является дестабилизирующим фактором, вызывающим неустойчивость вращения ротора [5, 7–9]. Динамическая неустойчивость ротора проявляется в виде нарастающих колебаний оси ротора и особенностей прецессии [10–12]. Прецессия оси гибкого ротора обычно является крайне нежелательным явлением, приводящим к возможным контактным взаимодействиям с элементами статора. Особенности прецессионного движения при контакте с элементами жесткого или податливого статора рассматривались в работах [3–5, 13–20]. В частности, в статьях [3, 16–20] был выявлен режим обратной прецессии при обкатке ротора внутри статора за счет сухого трения. Показано, что существует предельная скорость обкатки, равная собственной частоте ротора [3]. В работе [4] исследованы контактные режимы ротора с элементами роторной системы в двух различных ситуациях: а) контакт ротора с неподвижным статором; б) контакт ротора с легкими подвижными элементами (уплотнительными кольцами, упругими опорами и т.д.). При анизотропной опоре возникает двуударный режим ротора, который может происходить как в плоскости наименьшей, так и наибольшей жесткости, в зависимости от соотношения масс ротора и опоры. Установлено, что анизотропия жесткости опор и внешнего трения приводит к взаимодействию прямой и обратной

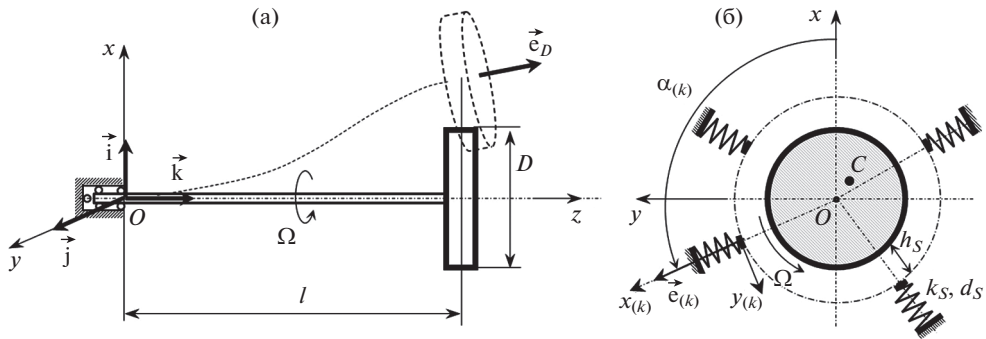


Рис. 1. Схема ротора в исходном и деформированном состоянии (а) и расположение ограничителей в поперечном сечении диска (б).

прецессии [4]. Прецессия ротора на анизотропных опорах представляет собой эллиптическую кривую, вследствие наложения прямой и обратной прецессии [5].

В этих работах показано, что при контакте вращающегося ротора с элементами кольцевого статора возможны различные типы движения (периодические, почти периодические, хаотические), сопровождающиеся ударами различной кратности. В статье [21] было рассмотрено поведение ротора типа Джеффкотта при контакте диска с одним упругим ограничителем, где установлено, что в докритической области при контакте ротора с ограничителем в зависимости от величины зазора и угловой скорости вращения ротора могут возникнуть периодические однократные или трехкратные контакты с опорой. В закритической области контакт ротора с ограничителем стабилизирует амплитуды его колебаний. При этом в зависимости от величины эксцентриситета массы диска в закритической области возможны различные прецессионные вибрации.

Настоящая статья посвящена анализу динамики прецессирующего гибкого ротора с внутренним трением в закритической области скорости вращения и стабилизации его поперечных колебаний за счет взаимодействия с точечными вязкоупругими опорами – ограничителями, установленными с радиальным зазором в плоскости диска.

**Расчетная схема.** Ротор представляет собой гибкий вал постоянного круглого поперечного сечения с массивным однородным диском массой  $M$  и диаметром  $D$ , закрепленным на одном из концов вала. Другой конец вала установлен в жесткой опоре по типу “заделки” (рис. 1а). Погонная масса вала  $m_R$  равномерно распределена по его длине  $l$ . Диск обладает эксцентриситетом массы  $e \ll D$ .

Ротор вращается вокруг своей продольной оси с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Учитываются внутреннее трение в материале вала, пропорциональное скорости его деформации, а также внешнее линейное демпфирование, пропорциональное абсолютной скорости ротора. Движение ротора рассматривается относительно неподвижной правосторонней системы координат  $Oxyz$  с началом в опоре ротора. Ось  $Oz$  совпадает с продольной осью недеформированного ротора; оси  $Ox$  и  $Oy$  взаимно перпендикулярны оси  $Oz$  (рис. 1а). Орты  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ <sup>1</sup> связаны с осями  $Oxyz$ ; орт  $\bar{e}_D$  связан с центральным сечением диска и направлен по нормали к его плоскости (по локальной касательной к оси вала).

Для ограничения изгибных колебаний ротора в диаметральной плоскости диска по направлениям векторов  $\bar{e}^{(k)} = \cos(\alpha_{(k)})\bar{i} + \sin(\alpha_{(k)})\bar{j}$ ,  $\alpha_{(k)} = \angle(x, x_{(k)})$ , установлены

<sup>1</sup> Физические векторы помечаются стрелкой сверху; матричные векторы и матрицы в неподвижном базисе пишутся жирным шрифтом.

$k = \overline{1, N_S}$  одинаковых вязкоупругих опор с линейной жесткостью  $k_{(k)}$  и коэффициентом демпфирования  $d_{(k)}$ , которые могут деформироваться вдоль направления  $Ox_{(k)}$  (рис. 1б). Контактная поверхность опор расположена на расстоянии  $h_{(k)}$  по нормали к окружной поверхности диска. Массой ограничителей пренебрегаем, что предполагает безударный контакт. Задача сводится к исследованию влияния внутреннего трения вала, дисбаланса диска и параметров ограничителей (установочного зазора, жесткости, демпфирования и коэффициента трения скольжения) на особенности прецессионного вращения ротора.

**Уравнения движения ротора.** Положение и угол поворота оси ротора в системе координат  $Oxyz$  будем описывать векторами  $\mathbf{r}(z, t) = \{u_x(z, t), u_y(z, t)\}^T$  и  $\vartheta(z, t) = \{\vartheta_x(z, t), \vartheta_y(z, t)\}^T$ . При вращении ротора на диск действуют внешняя сила  $\mathbf{P}_{D\text{ext}}(t)$  и внешний момент  $\mathbf{L}_{D\text{ext}}(t)$ ; здесь и ниже по тексту индекс  $D$  приписан к параметрам диска.

Внешняя сила включает в себя: 1) силу трения о внешнюю среду  $\mathbf{P}_{Dd}(t) = -d_{Dr}\dot{\mathbf{r}}_D(t)$ ,  $d_{Dr}$  – коэффициент внешнего линейного трения; 2) силу веса (в случае горизонтальной оси ротора)  $\mathbf{P}_{Dg} = -Mg\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i} = \{1 \ 0\}^T$ ; 3) силу от дисбаланса диска  $\mathbf{P}_{De}(t) = Me\Omega^2\mathbf{c}(t)$ ,  $\mathbf{c}(t) = \{\cos(\Omega t + \varphi_e), \sin(\Omega t + \varphi_e)\}^T$ ,  $\varphi_e$  – произвольная начальная фаза; 4) суммарную силу взаимодействия диска с системой точечных вязкоупругих безмассовых опор  $\mathbf{F}_{D\Sigma}(t)$ , которая будет описана ниже; 5) силу действия на диск со стороны вала  $\mathbf{P}_{DR}(t)$

$$\mathbf{P}_{D\text{ext}}(t) = \mathbf{P}_{Dd}(t) + \mathbf{P}_{Dg} + \mathbf{P}_{De}(t) + \mathbf{F}_{D\Sigma}(t) + \mathbf{P}_{DR}(t). \quad (1)$$

При формировании внешнего момента ограничимся моментом, вызванным внешним трением, которое пропорционально скорости угловых поворотов относительно поперечных осей диска, а также моментом  $\mathbf{L}_{DR}(t)$ , действующим на диск со стороны вала ротора

$$\mathbf{L}_{D\text{ext}}(t) = -d_{D\vartheta}\dot{\vartheta}_D(t) + \mathbf{L}_{DR}(t), \quad \dot{\vartheta}_D(t) = \{\dot{\vartheta}_{Dx}(t), \dot{\vartheta}_{Dy}(t)\}^T. \quad (2)$$

Уравнения Ньютона–Эйлера для диска принимают вид

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{u}}_D(t) = \mathbf{P}_{D\text{ext}}(t) \\ B\ddot{\vartheta}_D(t) + 2\Omega BS\dot{\vartheta}_D(t) = \mathbf{L}_{D\text{ext}}(t) \end{cases}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{S}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $2\Omega BS\dot{\vartheta}_D(t)$  – гироскопический момент вращающегося диска,  $B = MD^2/16$  – момент инерции диска вокруг поперечных осей.

Уравнения движения вала ротора под действием распределенной поперечной нагрузки  $\mathbf{q}(z, t)$  и распределенной моментной изгибающей нагрузки  $\mathbf{m}(z, t)$  для модели стержня Бернулли–Эйлера запишем в векторно-матричной форме

$$\begin{cases} m_R\ddot{\mathbf{r}}(z, t) = \mathbf{Q}'(z, t) + \mathbf{q}(z, t), \\ \rho_R I_R (\ddot{\vartheta}(z, t) + 2\Omega \mathbf{S}\dot{\vartheta}(z, t)) = \mathbf{M}'(z, t) - \mathbf{S}\mathbf{Q}(z, t) + \mathbf{m}(z, t), \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{Q}(z, t)$ ,  $\mathbf{M}(z, t)$  – векторы поперечной силы и изгибающего момента в текущем сечении вала;  $\rho_R$  – плотность материала вала;  $I_R$  – геометрический момент инерции поперечного сечения вала относительно поперечной оси; “штрихом” обозначена операция дифференцирования по координате  $z$ .

Влияние диска учитывается введением в распределенные нагрузки  $\mathbf{q}(z, t)$ ,  $\mathbf{m}(z, t)$  сосредоточенной силы  $\mathbf{P}_{RD} = -\mathbf{P}_{DR}$  и сосредоточенного изгибающего момента  $\mathbf{L}_{RD} = -\mathbf{L}_{DR}$  с помощью дельта-функции Дирака  $\delta(z - z_D)$ . Таким образом, распределенные нагрузки

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(z, t) &= [-d_{Dr}\dot{\mathbf{r}}_D(t) - M\ddot{\mathbf{u}}_D(t) + \mathbf{P}_\Sigma(t)]\delta(z - z_D) - d_e\dot{\mathbf{r}} - EI_R T_V(\mathbf{r}'''' + \Omega \mathbf{S}\mathbf{r}''''') - m_R g \mathbf{i}, \\ \mathbf{m}(z, t) &= [-d_{D\vartheta}\dot{\vartheta}_D(t) - B\ddot{\vartheta}_D(t) - 2\Omega BS\dot{\vartheta}_D(t)]\delta(z - z_D), \\ \mathbf{P}_\Sigma(t) &= \mathbf{P}_{Dg} + \mathbf{P}_{De}(t) + \mathbf{F}_{D\Sigma}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $d_e$  – коэффициент внешнего демпфирования вала;  $T_V$  – коэффициент, характеризующий внутреннее трение в материале вала (время релаксации в законе Фойгта);  $EI_R$  – изгибная жесткость вала.

Учитывая, что  $\dot{\vartheta} = -\mathbf{S}\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{M} = EI_R\vartheta'$ , после преобразований системы (4), получим уравнение четвертого порядка относительно вектора  $\mathbf{r}(z, t)$

$$\begin{aligned} EI_R \mathbf{r}''''(z, t) &= \mathbf{q}_\Sigma(z, t), \\ \mathbf{q}_\Sigma(z, t) &= \mathbf{q}(z, t) - \mathbf{S}\mathbf{m}'(z, t) + \rho_R I_R (\mathbf{S}\dot{\vartheta}'(z, t) - 2\Omega\vartheta'(z, t)) - m_R \ddot{\mathbf{r}}(z, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Приведенные уравнения движения аналогичны полученным другими авторами, например, в книге [5]. Однако настоящая форма записи уравнений (6), позволяет при их численном решении более наглядно проанализировать влияние всех учитываемых силовых факторов на движение ротора при взаимодействии с дополнительными опорами.

Приведем уравнения (6) к безразмерному виду, используя линейный масштаб  $Z_*$  и масштаб времени  $T_*$ :  $z = Z_*\zeta$ ,  $t = T_*\tau$ , причем  $Z_* = l T_* = \sqrt{MI^3/EI_R}$ . Кроме того, введем безразмерные прогиб и поворот оси вала (поперечного сечения)  $\xi(z, t) = \mathbf{r}(z, t)/l$ ,  $\vartheta(z, t) = -\mathbf{S}\xi'(z, t)$ . Используем также обозначения для производных  $\forall a, a' = \partial a / \partial \zeta = l \partial a / \partial z$ ,  $\dot{a} = \partial a / \partial \tau = \sqrt{MI^3/EI_R} \partial a / \partial t$ . Тогда в уравнениях (6) образуются следующие безразмерные комплексы – критерии подобия (обозначены греческими буквами)

$$\begin{aligned} \beta_R &= \beta_B \frac{\varepsilon_D^2}{16}, \quad \beta_B = \frac{\rho_R I R}{B}, \quad \beta = \frac{B}{Ml^2} = \frac{\varepsilon_D^2}{16}, \quad \varepsilon_D = \frac{D}{l}, \quad \eta_e = \frac{d_e l^4}{2\sqrt{MI^3 EI_R}}, \\ \eta_i &= \frac{T_V}{2} \sqrt{\frac{EI_R}{MI^3}}, \quad \eta_{D\xi} = \frac{d_{Dr} l^3}{2\sqrt{MI^3 EI_R}}, \quad \eta_{D\vartheta} = \frac{d_{D\vartheta} l}{2\sqrt{MI^3 EI_R}}, \quad \gamma = \frac{l^2}{EI_R} (Mg), \\ \mu_R &= \frac{m_R l}{M} = \mu_B \frac{\varepsilon_D^2}{16}, \quad \mu_B = \frac{m_R l^3}{B}, \quad N = \Omega \sqrt{\frac{MI^3}{EI_R}}, \quad \Pi_\Sigma = \frac{l^2}{EI_R} \mathbf{P}_\Sigma, \quad \Psi_{D\Sigma} = \frac{l^2}{EI_R} \mathbf{F}_{D\Sigma}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon_D$  – относительный диаметр диска (диаметр, отнесенный к длине ротора),  $N$  – угловая скорость вращения ротора.

Учитывая подстановки  $\mathbf{m} \leftarrow (l^2/EI_R)\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{q} \leftarrow (l^3/EI_R)\mathbf{q}$ , получим уравнения движения ротора в следующей безразмерной форме

$$\xi''''(\zeta, \tau) = \mathbf{q}_\Sigma(\zeta, \tau) - \mathbf{S}\mathbf{m}'(\zeta, \tau), \quad \mathbf{S}\vartheta(\zeta, \tau) = \xi'(\zeta, \tau), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\Sigma(\zeta, \tau) &= \mathbf{q}_V(\zeta, \tau) + \mathbf{q}_\xi(\zeta, \tau), \quad \mathbf{q}_V(\zeta, \tau) = -2\eta_i(\ddot{\xi}'''' + N\mathbf{S}\xi''''), \\ \mathbf{q}_\xi(\zeta, \tau) &= -2\eta_e\dot{\xi} - (\ddot{\xi} + 2\eta_{D\xi}\dot{\xi} - \mathbf{\Pi}_\Sigma)\delta(\zeta - \zeta_D) - \mu_R\ddot{\xi} + \beta_R(\mathbf{S}\dot{\theta}' - 2N\dot{\theta}') - \gamma\mu_R\mathbf{i}, \quad (9) \\ \mathbf{m}(\zeta, \tau) &= -[\beta(\ddot{\theta} + 2N\mathbf{S}\dot{\theta}) + 2\eta_{D\theta}\dot{\theta}]\delta(\zeta - \zeta_D), \end{aligned}$$

здесь  $\mathbf{q}_V(\zeta, \tau)$  – распределенная поперечная нагрузка от сил внутреннего трения в материале вала.

**Взаимодействие ротора (диска) с ограничителями.** Каждая из  $N_S$  упруго-демпферных опор, обладающих линейной жесткостью  $\kappa_{(j)} = (k_{(j)}l/EI_R)$  и коэффициентом демпфирования  $\eta_{(j)} = d_{(j)}\sqrt{l^3/(MEI_R)}$ , расположена на расстоянии  $\chi_{(j)} = h_{(j)}/l$ ,  $j = \overline{1, N_S}$  от периферийной поверхности диска. Опора может деформироваться только вдоль направления  $Ox_{(j)}$ . При контакте ротора с опорой в распределенной нагрузке  $\mathbf{q}_\xi(\zeta, \tau)$ , входящей в безразмерные уравнения (9), необходимо добавить сосредоточенную силу действия  $j$ -й опоры на диск  $\Psi_{(j)}(\tau) = \{\Psi_{x(j)}(\tau), \Psi_{y(j)}(\tau)\}^T$ , которая содержит две компоненты – нормальную, вдоль оси  $Ox_{(j)}$ , и тангенциальную к поверхности опоры (сила трения с коэффициентом  $f_S$ ) вдоль оси  $Oy_{(j)}$ . Силу взаимодействия ротора с упруго-демпфированной опорой будем описывать формулами

$$\begin{aligned} \Psi_{(k)} &= -N(\xi_{x(k)} - \chi_{(k)})H(r_{(k)})r_{(k)}\mathbf{s}_{(k)}, \quad \Psi_{(k)xy} = \mathbf{T}_{(k)}\Psi_{(k)}, \\ r_{(k)} &= \kappa_{(k)}(\xi_{x(k)} - \chi_{(k)}) + \eta_{(k)}\dot{\xi}_{x(k)}, \quad \mathbf{s}_{(k)} = \{1, f_{(k)}V_{(k)}/|V_{(k)}|\}^T, \quad V_{(k)} = N\varepsilon_D/2 - \xi_{y(k)}, \quad (10) \\ \mathbf{T}_{(k)} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{(k)}) & -\sin(\alpha_{(k)}) \\ \sin(\alpha_{(k)}) & \cos(\alpha_{(k)}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $H(\xi_{x(k)} - \chi_{(k)})$  – функция Хэвисайда, которая равна единице, если диск внедрен в одностороннюю опору –  $(\xi_{x(k)} - \chi_{(k)}) > 0$ ,  $H(r_{(k)})$  – опора работает, если существует только нормальная сила давления на контактные поверхности,  $r_{(k)}$  – нормальная контактная сила,  $\mathbf{s}_{(k)}$  – вектор распределения сил на опоре,  $V_{(k)}$  – скорость скольжения поверхности диска относительно поверхности  $k$ -й опоры. В результате суммарная сила от взаимодействия со всеми опорами  $\Psi_{D\Sigma} = \sum_{k=1}^{N_S} \Psi_{(k)xy}$ .

**Влияние эксцентриситета массы и силы веса диска.** При наличии эксцентриситета  $\varepsilon = e/l$  в векторе  $\mathbf{q}_\xi(\zeta, \tau)$  и, соответственно, в безразмерных уравнениях движения, необходимо учитывать дополнительную компоненту  $\mathbf{\Pi}_{De}$  поперечной сосредоточенной силы  $\mathbf{\Pi}_\Sigma$ , входящую в выражение (9)

$$\mathbf{\Pi}_{De}(\tau) = \varepsilon N^2 \mathbf{c}(\tau), \quad \mathbf{c}(\tau) = \{\cos(N\tau + \varphi), \sin(N\tau + \varphi)\}^T, \quad (11)$$

где  $\varphi$  – произвольная начальная фаза. В случае горизонтального расположения ротора учитывается сила веса диска  $\mathbf{\Pi}_{Dg} = -\gamma\mathbf{i}$ . В результате суммарного действия сосредоточенных сил  $\mathbf{\Pi}_{De}(\tau)$  и  $\mathbf{\Pi}_{Dg}$  сосредоточенная сила  $\mathbf{\Pi}_\Sigma(\tau)$  принимает вид

$$\mathbf{\Pi}_\Sigma(\tau) = \mathbf{\Pi}_{Dg} + \mathbf{\Pi}_{De}(\tau) + \Psi_{D\Sigma}(\tau). \quad (12)$$

**Интегральная форма решения.** Решение уравнений (8) с учетом (2) и (11) будем искать как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с помощью функции Грина  $G(\zeta, s)$  для стержня Бернулли–Эйлера

$$\xi(\zeta, \tau) = \int_0^1 G_{,00}(\zeta, s)[\mathbf{q}_\Sigma(s, \tau) - \mathbf{S}\mathbf{m}'(s, \tau)]ds. \quad (13)$$

В дальнейшем используются обозначения для частных производных функции Грина  $G_{,kl}(\zeta, s) = \partial^k \partial^l G(\zeta, s) / \partial \zeta^k \partial s^l$ . При подстановке (13) в уравнения (8) получим

$$\begin{cases} \xi(\zeta, \tau) + 2\eta_i(\xi + \mathbf{N}\mathbf{S}\xi) = \int_0^1 G_{,00}(\zeta, s)[\mathbf{q}_\xi(s, \tau) - \mathbf{S}\mathbf{m}'(s, \tau)]ds, \\ \mathbf{S}\mathbf{\vartheta}(\zeta, \tau) + 2\eta_i(\mathbf{S}\mathbf{\vartheta} - \mathbf{N}\mathbf{E}\mathbf{\vartheta}) = \int_0^1 G_{,10}(\zeta, s)[\mathbf{q}_\xi(s, \tau) - \mathbf{S}\mathbf{m}'(s, \tau)]ds, \end{cases} \quad (14)$$

где функция Грина для консольно закрепленного ротора равна

$$G_{,00}(r, s) = \mathbf{H}(r - s) \left( \frac{(r - s)^3}{3!} - \frac{r^3}{3!} + \frac{r^2}{2!} s \right).$$

Последующее решение сводится к вычислению интегралов, входящих в (14), например, приближенно по методу трапеций для  $m$  узлов коллокации. В результате исходные уравнения в частных производных сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно независимых переменных. После вычисления корней характеристического уравнения и определения бифуркации Пуанкаре–Андронов–Хопфа устанавливается значение критической скорости вращения ротора  $N_{\text{crit}}$  в зависимости от параметров системы, при которой возникает потеря устойчивости прямолинейного вращения ротора при отсутствии контакта с опорами.

Условия потери устойчивости за счет внутреннего трения были подробно описаны в [5, 11].

При численном решении были использованы следующие базовые значения параметров<sup>2</sup>: длина ротора  $l = 0.7$  м, диаметр вала  $d = 0.02$  м, диаметр диска  $D = 0.2$  м, толщина диска  $a = 0.01$  м, эксцентриситет массы,  $e = 0.001$  м ( $\epsilon = 0.00142$ ), коэффициенты внутреннего и внешнего трения вала  $\eta_i = 0.005$ ,  $\eta_e = 0.025$ , коэффициенты внешнего и линейного и углового демпфирования диска  $\eta_{D\xi} = 0.0025$ ,  $\eta_{D\vartheta} = 0.05$ , установочный зазор опор  $h_{(j)} = 0.0075$  м ( $\chi_{(j)} = 0.0107$ ), коэффициенты жесткости и демпфирования опоры  $k_S = 4.087 \times 10^6$  Н/м ( $\kappa = 850$ ) и  $\eta_{(j)} = 0.06$ , коэффициент трения скольжения на опоре  $f_S = 0.1$ . В настоящей статье из-за незначительного влияния на динамику ротора пренебрегаем его силой веса.

В расчетах учитывались три одинаковых опоры, установленные под углом  $2\pi/3$  друг к другу, причем первая опора была установлена под углом  $\alpha_1 = \pi/3$  к оси  $Ox$ . Такое расположение опор обеспечивает равные условия взаимодействия при контакте с ротором. Указанный алгоритм был реализован в комплексе MATLAB с использованием решателя ode23t (метод трапеций с интерполяцией), значения абсолютной и относительной ошибок  $\text{AbsTol} = \text{RelTol} = 10^{-7}$ .

**Критическая скорость вращения ротора.** Единственной причиной потери устойчивости является наличие силы внутреннего трения в материале вала, которые приводят к циркуляционным силам. Критическую угловую скорость вращения ротора  $N = N_{\text{crit}}$  в

<sup>2</sup> Во всех расчетах по умолчанию приняты указанные базовые параметры за исключением случаев, когда варьируются некоторые из них.

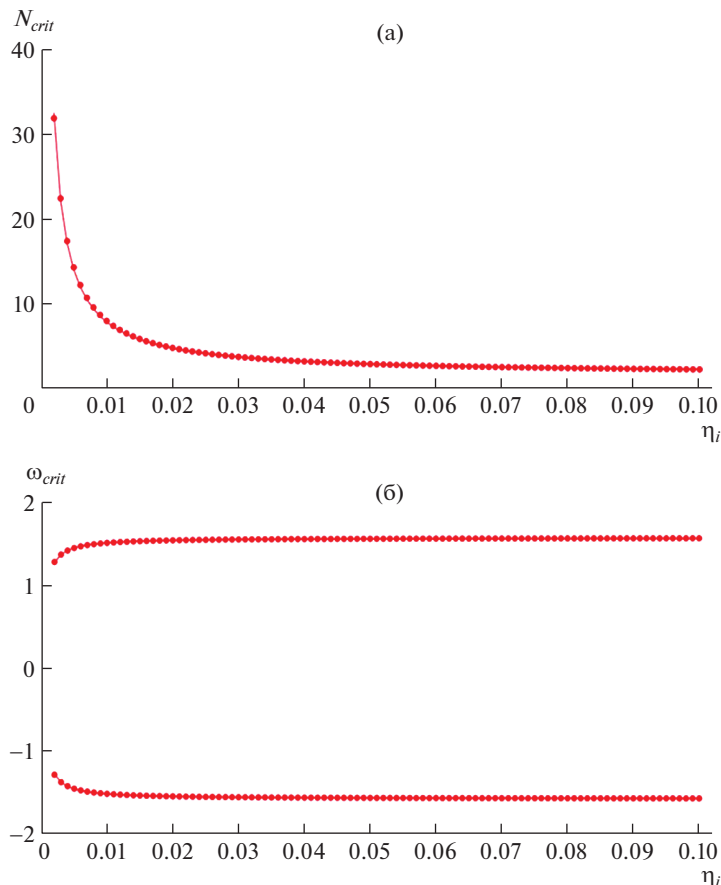


Рис. 2. Графики зависимостей критической скорости  $N_{crit}(\eta_i)$  и критической частоты  $\omega_{crit}(\eta_i)$ .

зависимости от коэффициента внутреннего трения (рис. 2а) можно аппроксимировать функцией  $N_{crit} = a \frac{\eta_e}{\eta_i} + b$ , где  $\eta_e$ ,  $\eta_i$  – коэффициенты внешнего и внутреннего трения (7),  $a$  и  $b$  – коэффициенты аппроксимации.

При этом критическая частота колебаний ротора  $\omega_{crit}$  (мнимая часть характеристического показателя) линейно зависит от критической скорости вращения ротора  $\omega_{crit} = N_{crit}c + d = ac \frac{\eta_e}{\eta_i} + (bc + d) = a' \frac{\eta_e}{\eta_i} + b'$ ,  $a' = ac$ ,  $b' = bc + d$ , где  $a = 2.47$ ,  $b = 1.64$ ,  $a' = -0.024$ ,  $b' = \pm 1.58$ .

**Показатель прецессии.** Прецессия центра вала в плоскости поперечного сечения диска может быть описана полярным вектором  $\mathbf{R}_D(\tau) = \{\xi_{Dx}(\tau), \xi_{Dy}(\tau)\}^T$  с полярным углом  $\tan(\psi(\tau)) = \frac{\xi_{Dy}(\tau)}{\xi_{Dx}(\tau)}$ , где переменные  $\xi_{Dy}(\tau)$ ,  $\xi_{Dx}(\tau)$  являются результатом численного расчета (или измерения) движения центра диска по двум ортогональным направлениям  $x$ ,  $y$ . Угловая скорость прецессии при этом равна<sup>3</sup>  $\dot{\psi}(\tau) = \frac{\xi_{Dy}\dot{\xi}_{Dx} - \xi_{Dx}\dot{\xi}_{Dy}}{\xi_{Dx}^2 + \xi_{Dy}^2}$ .

Для оценки направления прецессии ротора будем использовать относительную угловую скорость прецессии  $\Lambda(\tau) = \dot{\psi}(\tau)/N$ , где скорость вращения задается с учетом принятого положительного направления вращения. Тогда знак относительной угловой скорости прецессии будет определять вид прецессии: прямую или обратную прецессию. Безразмерная (нормированная) частота колебаний относительной угловой скорости прецессии оси ротора  $v_\Lambda = \Lambda/2\pi$ ,  $v_N = N/2\pi$  – безразмерная частота вращения вала ротора ( $v$ , [Гц  $T_*$ ],  $T_* = 0.0226$  с). Заметим, что в системе координат, вращающейся вместе с радиусом вектором, соединяющим неподвижный центр с центром вала, его материальное сечение поворачивается с угловой скоростью  $(N - \dot{\psi})$ . При *прямой синхронной прецессии* ( $\dot{\psi} = N, \Lambda = 1$ ) сечение остается неподвижным во вращающейся системе координат, *обратная синхронная прецессия* ( $\dot{\psi} = -N, \Lambda = -1$ ) возникает тогда, когда в неподвижном базисе сечение вала совершает только поступательное движение.

Для произвольных движений ротора удобнее пользоваться средним по реализации значением относительной скорости прецессии  $\bar{\Lambda} = \langle \Lambda \rangle$ , знак которой является фактическим показателем прецессии: при  $\bar{\Lambda} < 0$  – прямая прецессия, при  $\bar{\Lambda} > 0$  – обратная прецессия, при  $|\bar{\Lambda}| = 1$  – синхронная прецессия (прямая или обратная),  $|\bar{\Lambda}| = 0$  – прецессия отсутствует.

**Докритическое поведение ротора.** Очевидно, что на докритических скоростях вращения и при наличии эксцентриситета  $\epsilon \neq 0$ , когда отсутствует контакт с опорами, происходят моногармонические колебания ротора с прямой синхронной прецессией. При контакте несбалансированного ротора с опорами возникают нерегулярные неустановившиеся колебания. При этом относительная скорость прецессии  $\Lambda > 0$  и наблюдается тенденция выхода на прямую прецессию.

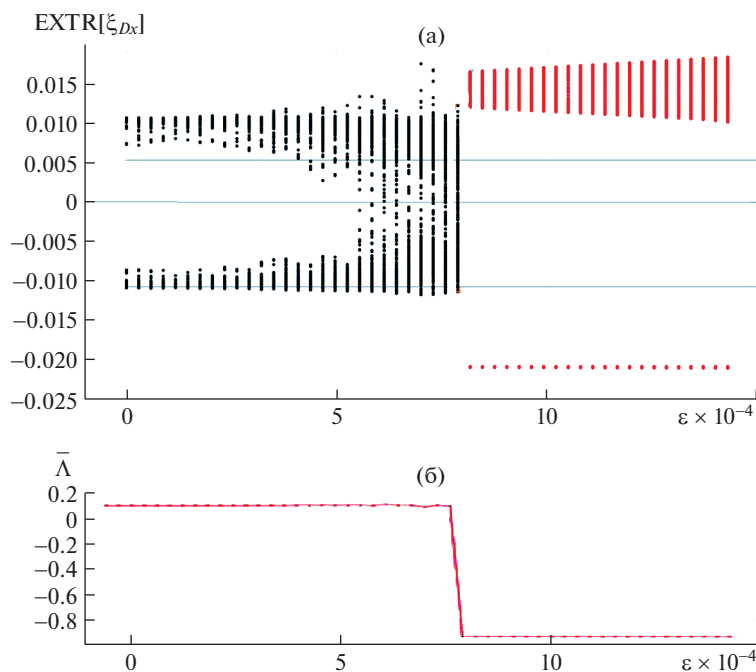
**Закритическое поведение.** Закритическое вращение ротора с внутренним трением всегда сопровождается контактом с опорами независимо от величины зазора и внешнего демпфирования. На рис. 3а для случая  $N = 15 > N_{\text{crit}}$ , представлена диаграмма экстремумов радиальных перемещений диска  $\text{EXTR}[\xi_{Dx}]$  в направлении оси  $Ox$  при варьировании эксцентриситета массы ( $\epsilon = 0-0.00143$ ).

Черные точки соответствуют неустановившимся колебаниям с почти прямой прецессией  $\bar{\Lambda} \approx 0.095 > 0$ ; красные точки соответствуют устойчивой обратной прецессии  $\bar{\Lambda} \approx -0.93 < 0$ . При значении  $\epsilon = \epsilon_* \approx 0.0008$  меняется знак показателя прецессии ротора  $\bar{\Lambda}$  (рис. 3б), что соответствует смене ее направления с прямой на обратную. Эта смена направления прецессии объясняется возрастанием сил трения при увеличении нормальных сил в контакте, что связано с увеличением неуравновешенности диска.

Рассмотрим две области  $E^- = \{\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon^-\}$ ,  $E^+ = \{\epsilon : \epsilon \geq \epsilon^+\}$ . Как показали расчеты изменение в определенных пределах зазора между диском и коэффициента скольжения (трения) на опорах не приводит к переходу к обратной прецессии. Увеличение радиальной жесткости опор по сравнению с базовым значением позволяет стабилизировать движение ротора с прямой прецессией ( $\bar{\Lambda} \approx 0.099$ ). В области  $\epsilon \in E^+$  наблюдается режим обратной прецессии ( $\bar{\Lambda} \approx -0.913$ ), который можно поддержать варьированием параметрами опор (рис. 4). Красными точками на рис. 4б показано стробирование сигнала с частотой, соответствующей периоду вращения ротора (в данном случае – на последних 300-х оборотах).

<sup>3</sup> Подобное выражение используется, например, в [22].





**Рис. 3.** Диаграмма экстремумов  $\xi_{Dx}$  (а) и изменение показателя прецессии  $\bar{\Lambda}$  (б) при варьировании эксцентриситета  $\varepsilon = 0-0.00143$ .

На рис. 5а представлена временная реализация колебаний относительной угловой скорости прецессии  $\Lambda(\tau)$  и ее частотный спектр (рис. 5б) при эксцентриситете  $\varepsilon = 0.00082$ .

В спектре нормированной угловой частоты колебаний прецессии наблюдается пик  $\Lambda(\tau)$  на частоте вращения вала ротора  $\nu_{\Lambda^*} \approx 2.061$ , которой соответствуют стробоскопические отметки, показанные красными точками на рис. 4. Наибольший пик возникает на частоте  $\nu_{\Lambda} \approx 6.6686 \approx N_S \bar{\Lambda} \nu_{\Lambda^*}$  (рис. 5б).

Кроме того, в данной системе при нулевом эксцентриситете существуют устойчивые чисто периодические движения. В частотном спектре существуют только две гармоники: на частотах  $\nu_{\Lambda} \approx 6.6686 \approx N_S \bar{\Lambda} \nu_{\Lambda^*}$  и  $\nu_{\Lambda} \approx 13.3372 \approx 2N_S \bar{\Lambda} \nu_{\Lambda^*}$ . При этом также поддерживается обратная прецессия  $\bar{\Lambda} \approx -0.931$ .

При изменении скорости вращения  $N$  ротор проходит через область докритического вращения без взаимодействия с опорами (при выборе достаточно большого зазора) с прямой синхронной прецессией, а в области закритического вращения с взаимодействием с опорами – с устойчивой обратной прецессией.

В качестве обобщения полученных численных результатов на рис. 6 представлен спектральный состав относительной угловой скорости прецессии ротора  $\Lambda$  в зависимости от частоты вращения вала и частотного спектра частоты прецессии при взаимодействии с опорами.

На рис. 6 видно, как прямая синхронная прецессия скачком переходит к обратной прецессии при критической частоте вращения ротора  $\nu_{N_{\text{crit}}} \approx 2.35$  (все значения пара-

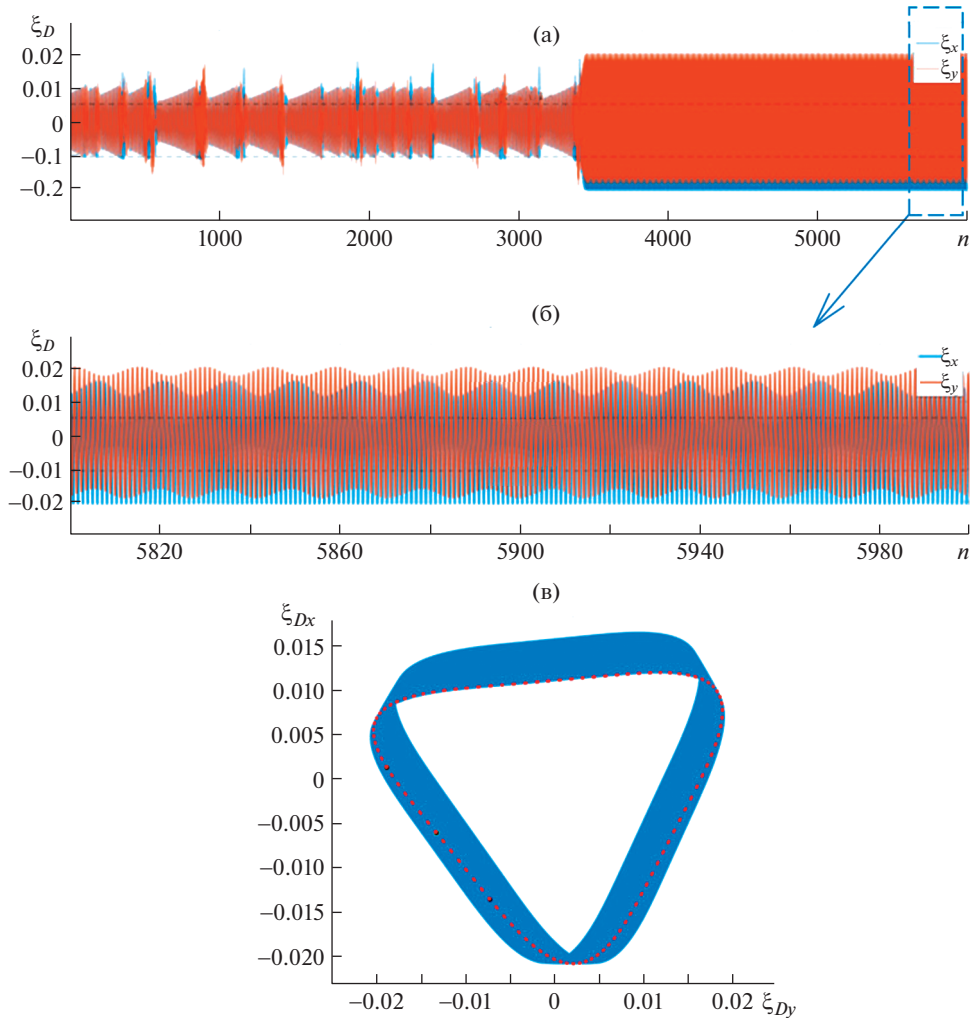


Рис. 4. Графики поперечных  $\xi_D$  (а) и угловых  $\xi_\theta$  (б) колебаний диска и траектория оси ротора (б) при  $\varepsilon = 0.00082$ .

метров ротора соответствуют базовым). Уменьшение частоты обратной прецессии с ростом закритической скорости вращения связано с тем, что происходит рост амплитуд ротора, рост сил нормального давления на опоры и, как следствие, увеличение тормозящих прецессию сил трения.

**Заключение.** Разработанная математическая модель ротора с массивным диском и внутренним трением позволяет исследовать закритическую динамику взаимодействия ротора с дискретно расположенными упруго демпфированными опорами. Введено определение относительной скорости прецессии ротора и ее показателя, позволяющие находить частоту прецессии и ее направление, для случая произвольной нелинейной динамики ротора. Показано, что в закритической области всегда существует уровень неуравновешенности ротора, при котором поддерживается устойчивая обратная прецессия, близкая к синхронной при квазипериодическом движении. Наибольшее влияние на стабилизацию обратной прецессии ротора оказывают

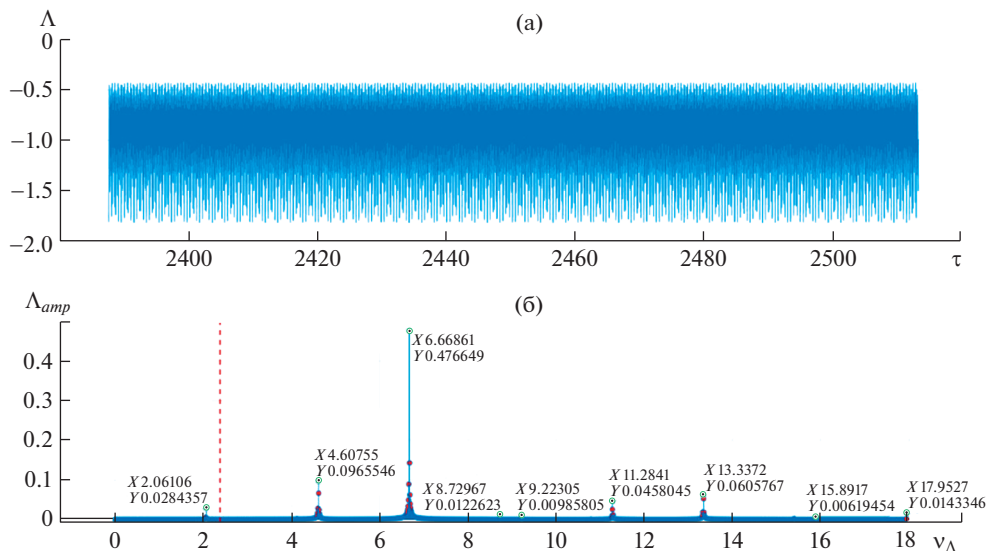


Рис. 5. Временная реализация колебаний относительной скорости прецессии  $\Lambda(\tau)$  (а) и ее спектральный состав (б) при  $\epsilon = 0.00082$ .

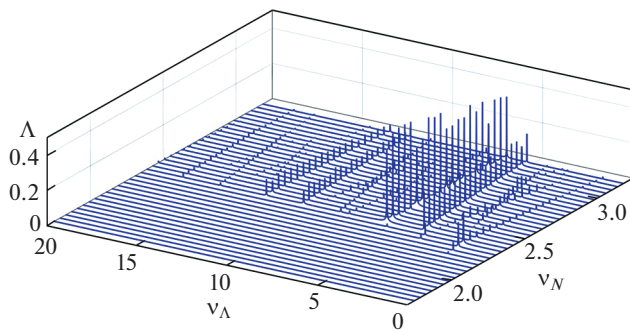


Рис. 6. Спектральный состав относительной скорости прецессии  $\Lambda$ .

эксцентриситет ротора и радиальная жесткость опор. При нулевом эксцентриситете возможно существование чисто периодического движения. Наибольшая частотная амплитуда колебаний прецессирующего ротора возникает на частоте прецессионного вращения, умноженной на количество установленных с начальным зазором упруго демпфированных опор. Изменение зазора между диском и дискретно расположенными опорами, как и изменение коэффициента трения скольжения (силы трения) на опорах в определенных пределах не приводят к переходу от неустойчивого, срывного характера движения, близкого к прямой прецессии, к устойчивой обратной прецессии. Изменение радиальной жесткости опор позволяет стабилизировать движение переходом к обратной прецессии.

Взаимодействие с опорами в зависимости от эксцентриситета массы  $\epsilon$  может приводить к неустановившимся срывным колебаниям ротора при стремлении к прямой прецессии или — к устойчивому вращению с обратной прецессией.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет средств гранта РНФ (проект 21-19-00183).

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yamamoto T., Jshida Y.* Linear and Nonlinear Rotordynamics. Wiley & Sons, 2001. 358 p.
2. *Genta G.* Dynamics of Rotating Systems. NY: Springer-Verlag, 2005. 658 p.
3. *Банах Л.Я.* Некоторые явления, возникающие при вращении вала в подшипнике с зазором // Машиноведение. 1965. № 1. С. 70.
4. *Vanakh L.* Contact problems in rotor systems // *Vibroengineering Procedia*. 2016. V. 8. P. 90.
5. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во академии наук СССР, 1959. 248 с.
6. *Tiwari R.* Rotor Systems: Analysis and Identification. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018. 1059 p.
7. *Pasynkova I.A.* Bifurcations of cylindrical precessions of an unbalanced rotor // *Technische Mechanik*. 2006. V. 26. № 1. P. 1.
8. *Ding Q., Cooper J. E., Leung A.Y.T.* Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system // *J. of Sound and Vibration*. 2002. V. 252. Iss. 5. P. 817.
9. *Karpenko E.V., Pavlovskaja E.E., Wiercigroch M.* Bifurcation analysis of a preloaded Jeffcott rotor // *Chaos, Solutions and Fractals*. 2003. V. 15. P. 407.
10. *Khanlo H.M., Ghayour M., Ziaei-Rad S.* Chaotic vibration analysis of rotating, flexible, continuous shaft-disk and the stator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2011. V. 16. Iss. 1. P. 566.
11. *Bolotin V.V.* Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Oxford: Pergamon Press, 1963. 324 p.
12. *Dimentberg M.F.* Vibration of a rotating shaft with randomly varying internal damping // *J. of Sound and Vibration*. 2005. V. 285. P. 759.
13. *Zorzi E.S., Nelson H.D.* Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping // *ASME J. of Engineering for Power*. 1977. V. 99. № 1. P. 71.
14. *Zhang G.F., Xu W.N., Xu B., Zhang W.* Analytical study of nonlinear synchronous full annular rub motion of flexible rotor–stator system and its dynamic stability // *Nonlinear Dynamics*. 2009. V. 57. P. 579.
15. *Grāpis O., Tamužs V., Ohlson N.-G., Andersons J.* Overcritical high-speed rotor systems, full annular rub and accident // *J. of Sound and Vibration*. 2006. V. 290. Iss. 3–5. P. 910.
16. *Childs D.W.* Fractional-frequency rotor motion due to nonsymmetric clearance effects // *Trans ASME J. Eng. Power*. 1982. V. 104 (3): 533–41.
17. *Куракин А.Д., Нухамкин М.Ш., Семенов С.В.* Динамика неуравновешенного гибкого ротора в анизотропных опорах при контакте со статором // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. № 4. С. 364.
18. *Никифоров А.Н., Шохин А.Е.* Упругопластическая вязкая модель ударного и безотрывного взаимодействия ротора со статором // *Изв. РАН. МТТ*. 2016. № 1. С. 67.
19. *Lahriri S., Weber H.I., Santos I.F., Hartmann H.* Rotor-stator contact dynamics using a non-ideal drive – Theoretical and experimental aspects // *J. of Sound and Vibration*. 2012. V. 331. P. 4518.
20. *Neilson R.D., Barr A.D.S.* Dynamics of a rigid rotor mounted on discontinuously non-linear elastic supports // *Proc Institut Mech. Engrs, Part C*. 1988. V. 202 (5). P. 369.
21. *Гуськов А.М., Пановко Г.Я., Шохин А.Е.* Динамика роторной системы вибрационно-центробежного сепаратора с односторонним упругим ограничителем колебаний // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2022. № 2. С. 16.
22. *Xia Y., Ren X., Qin W., Yang Y., Lu K., Fu C.* Investigation on the transient response of a speed-varying rotor with sudden unbalance and its application in the unbalance identification // *J. of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2020. V. 39 (4). P. 1065.