

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 621.01

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ТОЧНОСТНОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА  
ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА DELTA С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ПЛЮККЕРОВЫХ КООРДИНАТ****© 2023 г. Е. С. Гебель<sup>1</sup>, А. Б. Ласточкин<sup>2</sup>, А. А. Романов<sup>2</sup>,  
Л. В. Гаврилина<sup>2,\*</sup>, М. В. Глазунов<sup>3</sup>**<sup>1</sup>*Омский государственный технический университет, Омск, Россия*<sup>2</sup>*Институт машиноведения им. А.А. Благоднарова РАН, Москва, Россия*<sup>3</sup>*Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, Москва, Россия**\*e-mail: griboedova04@mail.ru*

Поступила в редакцию 05.12.2022 г.

После доработки 20.01.2023 г.

Принята к публикации 20.02.2023 г.

В настоящей статье рассмотрен робот Delta, являющийся одним из наиболее известных представителей манипуляционных устройств параллельной структуры. Он включает в себя три кинематические цепи, каждая из которых содержит вращательный привод и шарнирный параллелограмм. Представлены решения задач кинематики, в том числе задачи о положениях и задачи точностного анализа. При решении используется винтовое исчисление. Показано, что близость к особым положениям обуславливает ухудшение повторяемости.

*Ключевые слова:* механизм параллельной структуры, робот Delta, задача о положениях, точностной анализ

**DOI:** 10.31857/S0235711923030069, **EDN:** PQGLQF

Для решения серьезных задач, стоящих перед отечественным машиностроением [1, 2] весьма важны механизмы параллельной структуры, отличающиеся высокими функциональными характеристиками [3, 4]. Данные механизмы явились темой исследований, представленных во многих работах, в частности, многочисленные публикации посвящены особым положениям этих устройств, в которых механизм либо теряет одну или несколько степеней свободы, либо теряет управляемость [5–7]. Следует отметить, что подобного рода механизмы можно получить объединением двух манипуляторов последовательной структуры, которые связаны через объект манипулирования, однако в данном случае каждая кинематическая пара снабжена приводом [8].

Многие публикации посвящены синтезу механизмов параллельной структуры, обладающих специфическими свойствами. Это необходимо для решения некоторых конкретных технических задач. В частности, речь идет о механизмах, обладающих свойством изоморфности, т.е. постоянством передаточных отношений между приводами и выходным звеном [9]. Также большое внимание было уделено механизмам с постоянной точкой ввода выходного звена в рабочую зону [10]. В ряде случаев важным является обеспечение свойства динамической развязки [11].

В последнее время много внимания уделяется механизмам, выходное звено которых приводится в движение с помощью тросов [12], а также механизмам, входные звенья которых перемещаются по круговой направляющей [13, 14]. Неизменно акту-

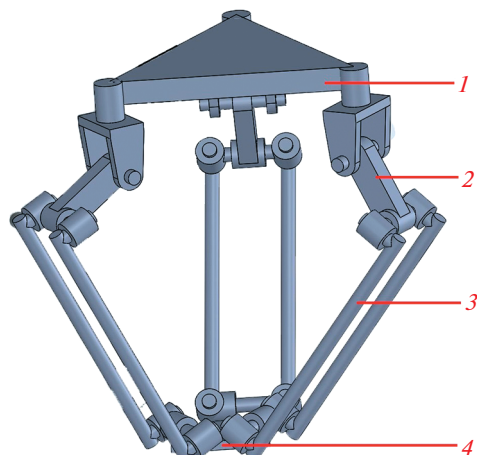


Рис. 1. Механизм параллельной структуры типа Delta.

альной является задача построения механизмов, обладающих повышенной точностью (повторяемостью). При этом применяются изгибные упругие кинематические пары [15].

Одним из наиболее известных используемых механизмов является механизм робота Delta [16–19]. В данном устройстве, обеспечивающем поступательные движения выходного звена, имеют место три кинематические цепи, в каждой из которых содержится привод и шарнирный параллелограмм.

В настоящей статье ставится задача определения плюккеровых координат силовых винтов, передаваемых на выходное звено механизма типа Delta. На этой основе можно найти взаимосвязь между повторяемостью позиционирования приводов и повторяемостью положений выходного звена. Поэтому требуется решить задачу о положениях и задачу о скоростях. При этом решение задачи о скоростях можно использовать для анализа точности (повторяемости). Важно уяснить, какова взаимосвязь между повторяемостью положений выходного звена и близостью к особым положениям.

Рассматриваемый механизм (рис. 1) содержит основание 1, три кинематические цепи, в каждой из которых имеется входное звено 2, шарнирный параллелограмм 3, сопряженный с выходным звеном 4. Механизм имеет три степени свободы, обеспечивающие поступательные движения выходного звена.

Для решения обратной задачи о положениях используем замещающую схему (рис. 2).

Эта схема получена путем “сдвигания” трех кинематических цепей к центру, так, чтобы оси вращательных пар, расположенных на выходном звене, пересеклись бы в одной точке. В данном случае точки  $A_1, A_2, A_3$  – это центры, через которые проходят оси приводных вращательных пар, единичные векторы которых –  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Точки  $B_1, B_2, B_3$  соответствуют серединам начальных звеньев шарнирных параллелограммов, точка  $C_{123}$  соответствует совмещенным центрам конечных звеньев шарнирных параллелограммов. Все точки можно представить их координатами в системе  $Oxuz$ .

Если плоскость  $xOy$  проходит через точки  $A_1, A_2, A_3$ , то взаимное положение основания механизма и системы координат (рис. 3) определяет векторы  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ , перпендикулярные векторам  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и проходящие через точки  $A_1, A_2, A_3$  (в дальнейшем для исключения сложных индексов номера элементов механизмов будем записывать в строчку).

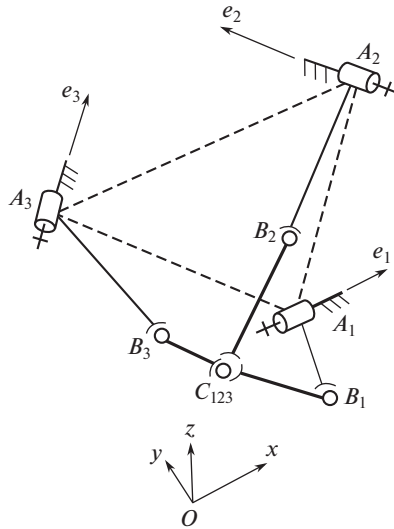


Рис. 2. Замещающая схема, используемая для решения задачи о положениях.

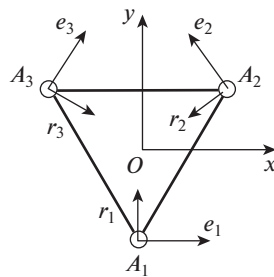


Рис. 3. Положение основания в случае, когда оно расположено в плоскости  $xOy$ .

Представим векторы, характеризующие положения осей кинематических пар и радиус-векторы точек, выражающих конфигурацию звеньев механизма. Единичные векторы осей входных кинематических пар и радиус-векторы центров этих пар

$$\mathbf{e}1 = \begin{pmatrix} e1_x \\ e1_y \\ e1_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}2 = \begin{pmatrix} e2_x \\ e2_y \\ e2_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}3 = \begin{pmatrix} e3_x \\ e3_y \\ e3_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}1 = \begin{pmatrix} r1_x \\ r1_y \\ r1_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}2 = \begin{pmatrix} r2_x \\ r2_y \\ r2_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}3 = \begin{pmatrix} r3_x \\ r3_y \\ r3_z \end{pmatrix}.$$

Кроме того, представим радиус-векторы центров входных кинематических пар и центр выходного звена, обозначив соответствующие точки

$$\mathbf{A}1 = \begin{pmatrix} A1_x \\ A1_y \\ A1_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}2 = \begin{pmatrix} A2_x \\ A2_y \\ A2_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}3 = \begin{pmatrix} A3_x \\ A3_y \\ A3_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}.$$

Найдем обобщенную координату  $\theta_1$  для первой кинематической цепи. Имеют место векторные и скалярные соотношения

$$\mathbf{A1C} = \mathbf{C} - \mathbf{A1}, \quad \mathbf{A1C} = \begin{pmatrix} C_x - A1_x \\ C_y - A1_y \\ C_z - A1_z \end{pmatrix},$$

$$L_{CC1} = \mathbf{e1} \cdot \mathbf{A1C};$$

$$L_{CC1} = e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z),$$

где  $\mathbf{A1C}$  – это вектор, проведенный из точки  $A1$  в точку  $C$ ;  $C1$  – точка основания перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{E1}$  и проходящую через точку  $A1$ ;  $L_{CC1}$  – расстояние между точками  $C$  и  $C1$ . Иначе соотношение можно переписать в виде

$$\mathbf{CC1} = \mathbf{e1} \cdot L_{CC1}.$$

Вектор  $\mathbf{CC1}$  можно представить следующим образом:

$$\mathbf{CC1} = \begin{bmatrix} e1_x [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ e1_y [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ e1_z [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \end{bmatrix},$$

где все элементы относятся к координатам соответствующих векторов.

Радиус-вектор точки  $C1$  записывается следующим образом:

$$\mathbf{C1} = \mathbf{C} + \mathbf{CC1},$$

что можно представить в координатной форме в виде

$$\mathbf{C1} = \begin{bmatrix} C_x + e1_x [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ C_y + e1_y [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ C_z + e1_z [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \end{bmatrix}.$$

Здесь все элементы соответствуют координатам упомянутых ранее векторов. В соответствии с изложенным вектор  $\mathbf{A1C1}$  будет иметь координаты

$$\mathbf{A1C1} = \begin{bmatrix} C_x - A1_x + e1_x [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ C_y - A1_y + e1_y [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \\ C_z - A1_z + e1_z [e1_x (C_x - A1_x) + e1_y (C_y - A1_y) + e1_z (C_z - A1_z)] \end{bmatrix}.$$

Расстояния между точками  $A1$  и  $C1$ ,  $B1$  и  $C1$  выражаются как

$$L_{A1C1} = \sqrt{A1C1_1^2 + A1C1_2^2 + A1C1_3^2},$$

$$L_{B1C1} = \sqrt{L_{B1C}^2 - L_{CC1}^2}.$$

Исходя из теоремы косинусов, имеем

$$L_{B1C1}^2 = L_{A1C1}^2 + L_{A1B1}^2 - 2L_{A1C1}L_{A1B1} \cos(\angle C1A1B1),$$

$$\cos(\angle C1A1B1) = \frac{L_{A1C1}^2 + L_{A1B1}^2 - L_{B1C1}^2}{2L_{A1C1}L_{A1B1}},$$

$$\angle C1A1B1 = \arccos\left(\frac{L_{A1C1}^2 + L_{A1B1}^2 - L_{B1C1}^2}{2L_{A1C1}L_{A1B1}}\right).$$

Кроме того, из геометрических соотношений имеем

$$\cos(\psi_1) = \frac{\mathbf{A1C1} \cdot \mathbf{r1}}{L_{\mathbf{A1C1}}}, \quad \psi_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{A1C1} \cdot \mathbf{r1}}{L_{\mathbf{A1C1}}}\right).$$

Первая обобщенная координата имеет значение

$$\theta_1 = \psi_1 + \angle C1A1B1.$$

Таким образом, обратная задача о положениях для первой кинематической цепи решена. Аналогичное решение имеем для второй и третьей кинематических цепей.

Переходим к численному примеру, в котором будет учтено то, что точки  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$  будут разнесены в соответствии с конструкцией механизма. При исходном, “совмещенном”, положении кинематических цепей имели место соотношения

$$L_{\mathbf{AB}} = L_{\mathbf{A1B1}} = L_{\mathbf{A2B2}} = L_{\mathbf{A3B3}} = 1 \text{ м},$$

$$L_{\mathbf{BC}} = L_{\mathbf{B1C1}} = L_{\mathbf{B2C2}} = L_{\mathbf{B3C3}} = 1 \text{ м},$$

$$\mathbf{e1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e2} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e3} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A2} = \begin{pmatrix} 0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A3} = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r3} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В случае, когда все точки расположения входных кинематических пар и точки центров шарниров, соединяющих кинематические цепи и выходное звено, “разнесены” на 0.1 м

$$\mathbf{A1}' = \mathbf{A1} + 0.1\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A2}' = \mathbf{A2} + 0.1\mathbf{A2} = \begin{pmatrix} 0.953 \\ 0.55 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A3}' = \mathbf{A3} + 0.1\mathbf{A3} = \begin{pmatrix} -0.953 \\ 0.55 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C11} = \mathbf{C} + 0.1\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ -1.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C22} = \mathbf{C} + 0.1\mathbf{A2} = \begin{pmatrix} 0.087 \\ 0.05 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C33} = \mathbf{C} + 0.1\mathbf{A3} = \begin{pmatrix} -0.087 \\ 0.05 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{A1}'$ ,  $\mathbf{A2}'$ ,  $\mathbf{A3}'$  – это новые радиус-векторы точек крепления входных вращательных кинематических пар;  $\mathbf{C11}$ ,  $\mathbf{C22}$ ,  $\mathbf{C33}$  – новые радиус-векторы точек крепления выходных пар всех кинематических цепей.

Новые положения радиус-векторов точек крепления входных вращательных кинематических пар, м

$$\mathbf{r1}' = \mathbf{r1} + 0.1\mathbf{r1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r2}' = \mathbf{r2} + 0.1\mathbf{r2} = \begin{pmatrix} 0.953 \\ 0.55 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r3}' = \mathbf{r3} + 0.1\mathbf{r3} = \begin{pmatrix} -0.953 \\ 0.55 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Геометрические свойства остаются прежними

$$\mathbf{r1}' \cdot \mathbf{e1} = 0, \quad \mathbf{r2}' \cdot \mathbf{e2} = 0, \quad \mathbf{r3}' \cdot \mathbf{e3} = 0,$$

$$\mathbf{r1}' \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{r2}' \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{r3}' \cdot \mathbf{z} = 0.$$

Приведем пример нахождения угла  $\theta_1$  в первой кинематической цепи. Пусть центр выходного звена расположен на оси  $z$  на расстоянии 1.2 м от центра координат. В этом случае вектор, проведенный из точки  $A1'$  до точки  $C11$  имеет координаты

$$\mathbf{A1}'\mathbf{C11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1.2 \end{pmatrix}.$$

Радиус-вектор точки  $C1$ , являющийся проекцией точки  $C11$  на плоскость, проходящую через точку  $A1'$  и перпендикулярную вектору  $\mathbf{e1}$ , выражается следующим образом:

$$\mathbf{C1} = \mathbf{C11} + \mathbf{C11C1}, \quad \mathbf{C1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ -1.2 \end{pmatrix}.$$

Вектор, соединяющий точки  $A1'$  и  $C1$ , имеет координаты

$$\mathbf{A1}'\mathbf{C1} = \mathbf{C1} - \mathbf{A1}', \quad \mathbf{A1}'\mathbf{C1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1.2 \end{pmatrix}.$$

Расстояние между точками  $A1'$  и  $C1$ , а также точками  $B1'$  и  $C1$  равны

$$L_{A1}'C1} = \sqrt{A1'C1_x^2 + A1'C1_y^2 + A1'C1_z^2}, \quad L_{A1}'C1} = 1.562 \text{ м},$$

$$L_{B1}'C1} = \sqrt{L_{B1}'C}^2 - L_{C11C1}^2}, \quad L_{B1}'C1} = 1 \text{ м}.$$

Исходя из теоремы косинусов, имеем

$$\angle C1A1'B1' = \arccos\left(\frac{L_{A1}'C1}^2 + L_{A1}'B1'}^2 - L_{B1}'C1}^2}{2L_{A1}'C1}L_{A1}'B1'}\right),$$

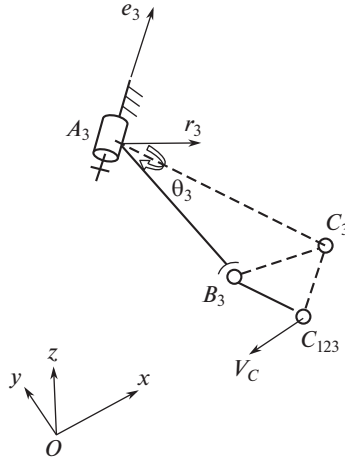


Рис. 4. К решению задачи о скоростях (для третьей кинематической цепи).

$$\angle C1A1'B1' = 0.674 \text{ рад.}$$

Кроме того, нужно учесть угол  $\psi_1$  между вектором  $A1'C1$  и радиус-вектором  $A1'$

$$\psi_1 = \arccos\left(\frac{A1'C1 \cdot r1'}{L_{A1'C1} |r1'|}\right),$$

$$\psi_1 = 2.266 \text{ рад.}$$

Находим обобщенные координаты

$$\theta_{11} = \psi_1 + \angle C1A1'B1', \quad \theta_{12} = \psi_1 - \angle C1A1'B1',$$

$$\theta_{11} = 2.94 \text{ рад,} \quad \theta_{32} = 1.591 \text{ рад.}$$

Для второй и третьей кинематических цепей порядок решения и результат аналогичен.

На основе решения задачи о положениях рассмотрим далее задачу о скоростях. Пусть для примера скорость точки  $C$  (рис. 4) имеет координаты, м/с

$$\mathbf{V}_c = \begin{pmatrix} V_{cx} \\ V_{cy} \\ V_{cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}.$$

Приведем соотношения для третьей кинематической цепи. Вектор, соединяющий точки  $A3'$  и  $B3'$ , выражается следующим образом:

$$\mathbf{A3'B3'} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{32}) & -\sin(\theta_{32}) \\ 0 & \sin(\theta_{32}) & \cos(\theta_{32}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -L_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.018 \\ -0.01 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Радиус-вектор точки  $B3'$

$$\mathbf{B3}' = \mathbf{A3}' + \mathbf{A3}'\mathbf{B3}', \quad \mathbf{B3}' = \begin{pmatrix} -0.935 \\ 0.54 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вектор, соединяющий точки  $\mathbf{B3}'$  и  $\mathbf{C33}$  (точка  $B3'$  принадлежит входному звену и смещена относительно точки  $B3$  на 1 м, точка  $C33$  принадлежит выходному звену), выражается следующим образом:

$$\mathbf{B3}'\mathbf{C33} = \mathbf{C33} - \mathbf{B3}' = \begin{pmatrix} 0.848 \\ -0.49 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

Проекция скорости  $\mathbf{Vc}$  на вектор  $\mathbf{B3C}$

$$V_{\mathbf{B3}'\mathbf{C33}} = \mathbf{Vc} \cdot \mathbf{B3}'\mathbf{C33} = -2.002 \times 10^{-3}.$$

Учтем, что точка  $B3'$  вращается вокруг вектора  $\mathbf{e3}$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{B3}'} = \mathbf{e3} \times \mathbf{A3}'\mathbf{B3}' = \begin{pmatrix} 866 \\ -0.5 \\ 0.02 \end{pmatrix}.$$

Проекция  $\mathbf{V}_{\mathbf{B3}'}$  на вектор  $\mathbf{B3C}$  при  $\omega_3 = 1$  рад/с

$$V_{\omega\mathbf{B3}'\mathbf{C33}} = V_{\mathbf{B3}'} \cdot \mathbf{B3}'\mathbf{C33} = 0.975.$$

Реальная угловая скорость равна

$$\omega_3 = \frac{V_{\mathbf{B3}'\mathbf{C33}}}{V_{\omega\mathbf{B3}'\mathbf{C33}}} = -2.052 \times 10^{-3} \text{ рад/с}.$$

Аналогичные результаты имеем для других кинематических цепей.

Далее рассмотрим плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар, силовых винтов, передаваемых с кинематических цепей на выходное звено, а также кинематического винта выходного звена. Главные (векторные) части ортов осей входных кинематических пар были рассмотрены ранее. Моментные части этих ортов представим в виде

$$\mathbf{ta1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A1}' \\ |\mathbf{A1}'| \end{pmatrix} \times \mathbf{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ta2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A2}' \\ |\mathbf{A2}'| \end{pmatrix} \times \mathbf{e2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{ta3} = \begin{pmatrix} \mathbf{A3}' \\ |\mathbf{A3}'| \end{pmatrix} \times \mathbf{e3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Следовательно, плюккеровы координаты единичных векторов осей входных кинематических пар будут иметь значения

$$\mathbf{EA1} = \begin{pmatrix} e1_1 \\ e1_2 \\ e1_3 \\ ta1_1 \\ ta1_2 \\ ta1_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{EA2} = \begin{pmatrix} e2_1 \\ e2_2 \\ e2_3 \\ ta2_1 \\ ta2_2 \\ ta2_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{EA3} = \begin{pmatrix} e3_1 \\ e3_2 \\ e3_3 \\ ta3_1 \\ ta3_2 \\ ta3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.866 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения плюккеровых координат силовых винтов, передаваемых на выходное звено со стороны кинематических цепей, будем иметь в виду единичный вектор (для первой кинематической цепи  $\mathbf{q1}$ ) и момент этого вектора (для первой кинематической цепи  $\mathbf{tc1}$ ) силового винта  $\mathbf{EC1}$ , расположенного вдоль оси промежуточно-го звена шарнирного параллелограмма

$$\mathbf{q1} = \frac{(\mathbf{B1}' - \mathbf{C11})}{|\mathbf{B1}' - \mathbf{C11}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.98 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{tc1} = \frac{\mathbf{C11}}{|\mathbf{C11}|} \times \mathbf{q1} = \begin{pmatrix} -0.993 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{EC1} = \begin{pmatrix} q1_1 \\ q1_2 \\ q1_3 \\ tc1_1 \\ tc1_2 \\ tc1_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.98 \\ 0.2 \\ -0.993 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для остальных кинематических цепей выражения аналогичны.

Для каждой кинематической цепи имеет место силовой винт, препятствующий вращению выходного звена вокруг одной оси. Этот силовой винт  $\mathbf{EB1}$  перпендикулярен плоскости соответствующего шарнирного параллелограмма. Для его определения используем соотношения

$$\mathbf{B1}'\mathbf{C11} = \frac{(\mathbf{B1}' - \mathbf{C11})}{|\mathbf{B1}' - \mathbf{C11}|}, \quad \mathbf{tb1} = \frac{\mathbf{B1}'\mathbf{C11} \times \mathbf{e1}}{\left( \frac{|\mathbf{B1}'\mathbf{C11} \times \mathbf{e1}|}{|\mathbf{B1}'\mathbf{C11}| \times |\mathbf{e1}|} \right)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.98 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{EB1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ tb1_1 \\ tb1_2 \\ tb1_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.98 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{B}'\mathbf{C11}$  – вектор, соединяющий центры промежуточной и конечной кинематических пар первой кинематической цепи;  $\mathbf{tb1}$  – моментная часть рассматриваемого силового винта.

Итак, будем иметь матрицу пюккерových координат силовых винтов

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} EC1_1 & EC1_2 & EC1_3 & EC1_4 & EC1_5 & EC1_6 \\ EB1_1 & EB1_2 & EB1_3 & EB1_4 & EB1_5 & EB1_6 \\ EC2_1 & EC2_2 & EC2_3 & EC2_4 & EC2_5 & EC2_6 \\ EB2_1 & EB2_2 & EB2_3 & EB2_4 & EB2_5 & EB2_6 \\ EC3_1 & EC3_2 & EC3_3 & EC3_4 & EC3_5 & EC3_6 \\ EB3_1 & EB3_2 & EB3_3 & EB3_4 & EB3_5 & EB3_6 \end{pmatrix},$$

для конкретного положения

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -0.98 & 0.2 & -0.993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.98 \\ 0.848 & 0.49 & 0.2 & 0.496 & -0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.173 & -0.1 & 0.98 \\ -0.848 & 0.49 & 0.2 & 0.496 & 0.86 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.173 & -0.1 & 0.98 \end{pmatrix},$$

определитель равен:  $|\mathbf{E}| = -0.051$ .

Кинематический винт выходного звена обозначим как

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Относительные моменты силовых винтов и кинематического винта выходного звена

$$\text{mom}(\mathbf{E}, \mathbf{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0.2V_z - 0.98V_y - 0.993\omega_x \\ 0.2\omega_y + 0.98\omega_z \\ 0.2V_z + 0.848V_x - 0.86\omega_y + 0.49V_y + 0.496\omega_x \\ -0.173\omega_x - 0.1\omega_y + 0.98\omega_z \\ 0.2V_z - 0.848V_x + 0.86\omega_y + 0.49V_y + 0.496\omega_x \\ 0.173\omega_x - 0.1\omega_y + 0.98\omega_z \end{pmatrix}.$$

Второе, четвертое и шестое уравнения включают в себя только угловые скорости, это относительные моменты с силовыми винтами, препятствующими вращению выходного звена.

Найдем относительные моменты силовых винтов и кинематических винтов во входных парах, будем иметь (в данном случае относительные моменты формально обозначаем как скалярные произведения)

$$\begin{aligned} \mathbf{EC1}^T \cdot (\mathbf{EA1}' \cdot \omega_1) &= -0.793\omega_1, & \mathbf{EB1}^T \cdot (\mathbf{EA1}' \cdot \omega_1) &= 0, \\ \mathbf{EC2}^T \cdot (\mathbf{EA2}' \cdot \omega_2) &= -0.793\omega_2, & \mathbf{EB2}^T \cdot (\mathbf{EA2}' \cdot \omega_2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{EC3}^T \cdot (\mathbf{EA3}' \cdot \omega_3) = -0.793\omega_3, \quad \mathbf{EB3}^T \cdot (\mathbf{EA3}' \cdot \omega_3) = 0.$$

Выпишем данные уравнения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} E_{2,4} & E_{2,5} & E_{2,6} \\ E_{4,4} & E_{4,5} & E_{4,6} \\ E_{6,4} & E_{6,5} & E_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{EB1}^T \cdot (\mathbf{EA1}' \cdot \omega_1) \\ \mathbf{EB2}^T \cdot (\mathbf{EA2}' \cdot \omega_2) \\ \mathbf{EB3}^T \cdot (\mathbf{EA3}' \cdot \omega_3) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0.200 & 0.980 \\ -0.173 & -0.860 & 0.980 \\ 0.173 & -0.100 & 0.980 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из этого уравнения, угловые скорости должны равняться нулю, либо должен равняться нулю определитель матрицы коэффициентов.

Зададим скорости в приводах и определим скорость выходного звена, решив систему уравнений

$$\omega_1 = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega_2 = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad \omega_3 = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$\begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{1,2} & E_{1,3} \\ E_{3,1} & E_{3,2} & E_{3,3} \\ E_{5,1} & E_{5,2} & E_{5,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{EC1}^T \cdot (\mathbf{EA1}' \cdot \omega_1) \\ \mathbf{EC2}^T \cdot (\mathbf{EA2}' \cdot \omega_2) \\ \mathbf{EC3}^T \cdot (\mathbf{EA3}' \cdot \omega_3) \end{pmatrix}.$$

Согласно рассматриваемому примеру

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.980 & 0.200 \\ 0.848 & 0.490 & 0.200 \\ -0.848 & 0.490 & 0.200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.793 \\ -0.793 \\ -0.793 \end{pmatrix}.$$

Решив данную систему уравнений, получим

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.964 \end{pmatrix},$$

решение получено в размерности линейной скорости, м/с.

Далее рассмотрим вопрос точности (повторяемости) данного механизма в зависимости от близости к особым положениям, в которых определитель матрицы плюккерых координат силовых винтов равен нулю. В данном случае особые положения будут иметь место в том случае, когда все шарнирные параллелограммы расположатся в одной плоскости.

Чем ближе к особому положению, тем меньше должен быть по модулю определитель матрицы, составленный из плюккерых координат силовых винтов и тем больше должно быть отклонение положения выходного звена при одинаковых ошибках в приводах.

Зададим погрешность в приводах, равной  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta$  для конкретного положения выходного звена  $z = -1.2$  м (в частности, пусть  $\Delta = 0.00001$  рад). Будем иметь соотношения

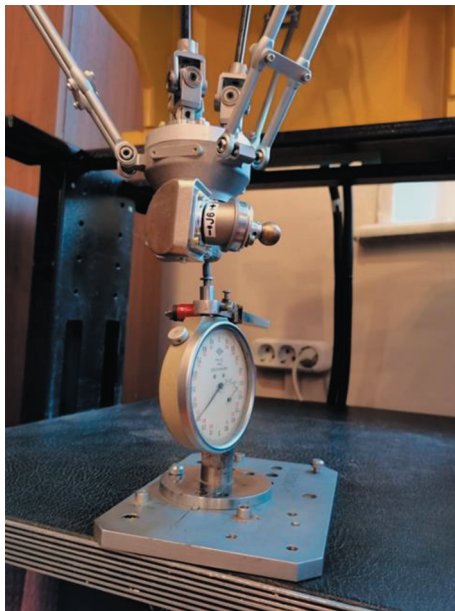


Рис. 5. Установка для проведения эксперимента.

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{0.1} & E_{0.2} \\ E_{2.0} & E_{2.1} & E_{2.2} \\ E_{4.0} & E_{4.1} & E_{4.2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2\Delta_z - 0.98\Delta_y \\ 0.848\Delta_x + 0.49\Delta_y + 0.2\Delta_z \\ 0.49\Delta_y - 0.848\Delta_x + 0.2\Delta_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{EC1}^T \cdot (\mathbf{EA1}' \cdot \Delta_1) \\ \mathbf{EC2}^T \cdot (\mathbf{EA2}' \cdot \Delta_2) \\ \mathbf{EC3}^T \cdot (\mathbf{EA3}' \cdot \Delta_3) \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  – ошибки положения выходного звена. Для конкретного случая получим

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.96 \times 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

При проведении аналогичной операции для положения  $z = -1.1$  м

$$\begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.998 \times 10^{-5} \end{pmatrix}.$$

То есть имеем соотношение полученных результатов

$$\frac{-8.998 \times 10^{-5}}{-3.96 \times 10^{-5}} = 2.272.$$

Это соотношение показывает, что при приближении к особому положению повторяемость ухудшается. Проверим это утверждение экспериментально. Для этого ис-

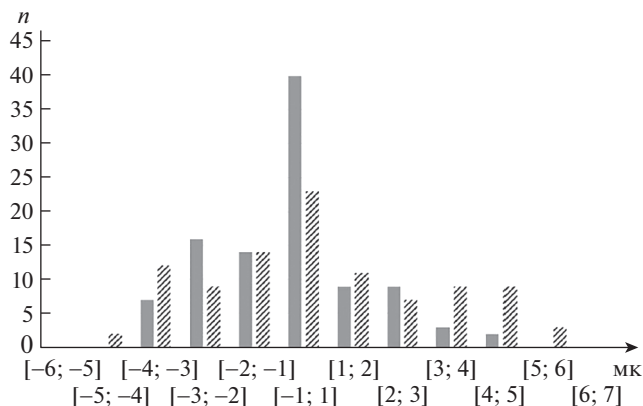


Рис. 6. Гистограммы проведения эксперимента по определению отклонений при позиционировании робота Delta.

пользовался серийный робот типа Delta и различное измерительное оборудование. Эксперимент предполагал подход к двум точкам, расположенным на разных расстояниях от особого положения. Было проведено два раза по сто испытаний, в простейшем случае использовался стрелочный индикатор, цена деления которого составляла 1 мк (рис. 5). Гистограммы (рис. 6), показывают, что в положении, более близком к особому (представлены косой штриховкой), повторяемость ухудшается.

**Заключение.** Таким образом, в настоящей статье решена задача определения плюнкеровых координат силовых винтов, передаваемых на выходное звено механизма типа Delta. Найдена взаимосвязь между повторяемостью позиционирования приводов и повторяемостью положений выходного звена указанного механизма. При этом приведено решение задачи о положениях и задачи о скоростях. Решение задачи о скоростях использовано для анализа повторяемости. Установлено, что при удалении от особых положений повторяемость улучшается.

Исследования проводились с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИМАШ РАН – промышленного робота Fanuc M-1iA/0.5A, измерительной лазерной системы CHOTEST SJ6000, координатно-измерительной машины Hexagon Absolute Arm 8312, 6 осей.

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 1. С. 3.
2. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 3. С. 3.
3. Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2013. № 2. С. 27.

4. *Russo M., Ceccarelli M.* Dynamics of a Humanoid Robot with Parallel Architectures // *Advances in Mechanism and Machine Science. Proceedings of the 15th IFToMM World Congress on Mechanism and Machine Science*, 2019. P. 1799.
5. *Balchankowski J., Szrek J., Wudarczyk S.* Analysis of constraint equations of the parallel mechanisms with 3 DoF in singular configurations // *Advances in Mechanism and Machine Science. Proceedings of the 15th IFToMM World Congress on Mechanism and Machine Science*, 2019. P. 607.
6. *Harada T., Kunishige Y.* Singularity Free Mode Changes of a Redundantly Driven Two Limbs Six-Dof Parallel Robot // *ROMANSY 23 – Robot Design, Dynamics and Control*, 2021. P. 405.
7. Гебель Е., Гаврилина Л., Глазунов В., Ласточкин А., Романов А., Духов А. К анализу сингулярных зон механизмов параллельной структуры с линейными двигателями // *Станкоинструмент*. 2021. № 3. С. 92.
8. Воробьев Е.И. Осуществление заданного относительного движения двух твердых тел двуруким роботом // *Механика твердого тела*. 2018. № 2. С. 122.
9. Едакина Т.В., Ласточкин А.Б., Гаврилина Л.В., Касилов В.П., Рамжаев В.С. Структурный анализ и построение рабочей зоны изоморфного поступательно-направляющего механизма параллельной структуры // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2022. № 4. С. 6.
10. *Tucan P., Gherman D., Andras Iu., Vaida C., Pisla D.* Kinematic Modelling of a Parallel Robot Used in Single Incision Laparoscopic Surgery // *CISM Int. Centre for Mechanical*. 2022. V. 606. P. 115.
11. *Lu Ya., Aoustin Ya., Arakelian V.* Control Performance Improvement in Dynamically Decoupled Manipulators // *CISM Int. Centre for Mechanical Sciences*. 2022. V. 606. P. 199.
12. *Guagliumi L., Berti A., Monti E., Carricato M.* Design Optimization of a 6-DOF Cable-Driven Parallel Robot for Complex Pick-and-Place Tasks // *CISM Int. Centre for Mechanical Sciences*. 2022. V. 606. P. 283.
13. *Fomin A., Antonov A., Glazunov V.* Forward Kinematic Analysis of a Rotary Hexapod // *CISM Int. Centre for Mechanical Sciences*. 2021. V. 601. 2021. P. 486.
14. *Laryushkin P., Antonov A., Fomin A., Glazunov V.* Inverse and Forward Kinematics of a Reconfigurable Spherical Parallel Mechanism with a Circular Rail // *CISM Int. Centre for Mechanical Sciences*. 2022. V. 606. P. 246.
15. *Glazunov V.A., Orlov A.V., Skvortsov P.A.* Rational Design of a Micro-positioner with Elastic Hinges // *Mechanism and Machine Science (book series)*. 2022. V. 113 MMS. P. 22.
16. *Clavel R.* Delta, a Fast Robot with Parallel Geometry // *Proc. of the 18th Int. Symposium on Industrial Robots*, Sydney, Australia, 1988. P. 79.
17. *Clavel R.* Device for displacing and positioning an element in space // *Brevet N WO 87/03528. Classification Internationale de brevets: B25J 17/02*. 1987. P. 719.
18. *Clavel R.* Device for the Movement and Positioning of an Element in Space. US Patent No. 4,976,582, December 11, 1990.
19. *Brinker J., Corves B.* A Survey on Parallel Robots with Delta-like Architecture // *The 14th IFToMM World Congress*, Taipei, Taiwan, October 25–30, 2015. P. 407.