
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.3:539.42

**ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ,
УЧИТЫВАЮЩИЙ ДВУХМЕРНОЕ СТЕСНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ
ПО ФРОНТУ ТРЕЩИНЫ СМЕШАННОГО ТИПА**© 2023 г. А. М. Покровский^{a,*}, Ю. Г. Матвиенко^b^aМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия^bИнститут машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

*e-mail: pokrovsky@bmstu.ru

Поступила в редакцию 24.06.2023 г.

После доработки 03.08.2023 г.

Принята к публикации 20.08.2023 г.

В настоящей статье предложен новый критерий разрушения для трещины смешанного типа (тип I + тип II), основанный на предположении, что максимальные тангенциальные напряжения в зоне предразрушения равны локальной прочности материала. При этом размер зоны предразрушения и локальная прочность определены с учетом несингулярных T_{xx} - и T_{zz} -напряжений, входящих в разложение функции напряжений Вильямса. Использование в расчете T_{xx} - и T_{zz} -напряжений позволяет описать двухмерное локальное стеснение деформации по фронту трещины в трехмерных телах. В полученное выражение для эффективного коэффициента интенсивности напряжений (КИН), кроме K_I и K_{II} входят отношения T_{xx} - и T_{zz} -напряжений к пределу текучести, что позволяет учесть стеснение деформаций в поперечном и продольном направлениях фронта трещины соответственно. Приведен пример реализации разработанного критерия применительно к определению разрушающей нагрузки растянутой пластины со сквозной наклонной трещиной. Представлены зависимости T_{xx} - и T_{zz} -напряжений по толщине пластины для различных углов наклона трещины и толщин пластины. Показано, что увеличение толщины пластины и уменьшение угла наклона трещины приводят к снижению разрушающей нагрузки.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, T_{xx} - и T_{zz} -напряжения, критерий разрушения, трещина смешанного I + II типа

DOI: 10.31857/S0235711923060135, **EDN:** YXPNKR

Оценка трещиностойкости деталей является чрезвычайно актуальной задачей, которая позволяет своевременно сделать вывод о возможности существования конструкции с имеющимся в ней трещиноподобным дефектом. Часто реальные детали и конструкции нагружены таким образом, что в них наблюдаются трещины смешанного типа, т.е. такие, в которых присутствует растрескивание по I, II и III типам. Частным случаем трещины смешанного типа, причем довольно часто встречающимся на практике, является трещина смешанного типа (I + II), т.е. нормального отрыва и поперечного сдвига.

Для оценки трещиностойкости деталей с трещинами смешанного типа (I + II) наиболее часто используется критерий максимальных тангенциальных напряжений (МТН), согласно которому разрушение происходит тогда, когда максимальные тангенциальные напряжения в зоне предразрушения равны предельному значению [1]. В качестве предельного значения обычно используется предел текучести или предел

прочности, а в качестве размера зоны предразрушения поправка Ирвина на пластическую зону [2].

В настоящее время все большее применение в расчетах на трещиностойкость, кроме классических параметров упругой механики разрушения, таких как, коэффициент интенсивности напряжений (КИН) и интенсивность выделения упругой энергии в вершину трещины, находят компоненты лежащих в плоскости трещины несингулярных T -напряжений, входящих в разложение функции напряжений Вильямса [3]. Использование в расчетах T_{xx} -напряжений позволяет описать стеснение деформаций в направлении перпендикулярном фронту трещины, а T_{zz} -напряжений параллельном фронту трещины [4]. В России наибольший вклад в популяризацию использования компонентов T -напряжений в расчетах на трещиностойкость и живучесть внесен в работах [4–6].

В статье [7] критерий максимальных тангенциальных напряжений был доработан, посредством учета несингулярных T_{xx} -напряжений. В работе [4] предложено в качестве предельного напряжения в зоне предразрушения использовать локальную прочность материала, зависящую не только от предела текучести, но и от T_{xx} -напряжений, а также сделан следующий шаг в усовершенствовании критерия максимальных тангенциальных напряжений, а именно, предложено использовать в условии разрушения осредненные максимальные тангенциальные напряжения, которые приравниваются к локальной прочности материала.

Целью настоящей статьи является разработка двухпараметрического критерия разрушения для трещины смешанного типа (I + II), в который кроме T_x -напряжений, входят еще и T_{zz} -напряжения.

Формулировка критерия разрушения. В упругом случае поля напряжений в окрестности трещины смешанного типа (I + II) можно представить в виде [8]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] + T_{xx}, \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ \sigma_z &= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \right] + T_{zz}, \quad T_{zz} = E\varepsilon_z + \mu T_{xx},\end{aligned}\tag{1}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ – нормальные и касательные напряжения, T_{xx} и T_{zz} – компоненты несингулярных T -напряжений, лежащих в плоскости трещины и направленные перпендикулярно и параллельно фронту трещины, соответственно; ε_z – деформация в направлении фронта трещины; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; r, θ – радиус-вектор и угол в полярной системе координат, связанной с точкой на фронте трещины (рис. 1).

В полярной системе координат, связанной с вершиной трещины, тангенциальные напряжения σ_θ , перпендикулярные радиусу вектора r , согласно (1) будут иметь вид [4]

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] + T_{xx} \sin^2 \theta.\tag{2}$$

Воспользуемся критерием максимальных тангенциальных напряжений [1], согласно которому трещина растет в направлении плоскости действия максимальных тан-

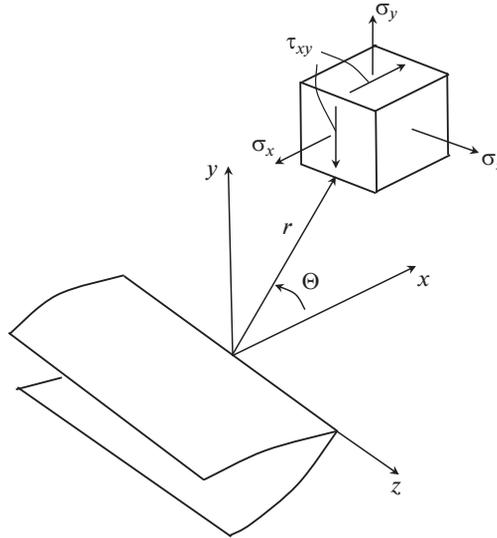


Рис. 1. Напряженное состояние по фронту сквозной трещины.

генциальных напряжений. Для определения этого направления, определяемого углом θ^* , приравняем к нулю производную от тангенциального напряжения

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (3)$$

Подстановка σ_θ по формуле (2) для r равного размеру зоны предразрушения r_c в условие (3) приводит к выражению для вычисления θ^* [4]

$$K_I \sin \theta^* + K_{II} (3 \cos \theta^* - 1) - \frac{16}{3} T_{xx} \sqrt{2\pi r_c} \sin \frac{\theta^*}{2} \cos \theta^* = 0. \quad (4)$$

В связи с тем, что плоскость действия максимальных тангенциальных напряжений является главной площадкой, касательные напряжения τ_θ , в ней и перпендикулярной ей площадке отсутствуют (рис. 2). Поэтому размер зоны предразрушения в этом направлении можно определить для трещины нормального отрыва [9]

$$r_c = \frac{(1 - 2\mu)^2}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T + T_{zz}} \right)^2. \quad (5)$$

Следует отметить, что формула (5) получена согласно гипотезе пластичности Треска–Сен-Венана с использованием для записи эквивалентного напряжения выражений (1) при $\theta = 0$. Кроме того, в критерии максимальных тангенциальных напряжений, учитывающим только T_{xx} -напряжения [7], размер зоны предразрушения также определяется на основании гипотезы пластичности Треска–Сен-Венана для трещины нормального отрыва. Причем это выражение совпадает с поправкой Ирвина на пластическую зону [10].

Подстановка формулы (5) в уравнение (4) приводит к окончательному выражению для вычисления θ^*

$$K_I \sin \theta^* + K_{II} (3 \cos \theta^* - 1) - \frac{16(1 - 2\mu)K_{Ic}}{3(\sigma_T + T_{zz})} T_{xx} \sin \frac{\theta^*}{2} \cos \theta^* = 0. \quad (6)$$

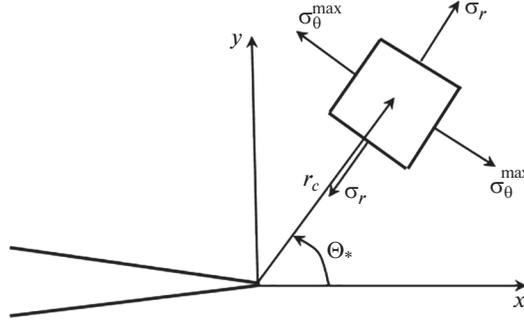


Рис. 2. Направление роста трещины.

Критерием разрушения будет являться условие, при котором максимальное тангенциальное напряжение, вычисленное по формуле (2) для угла $\theta = \theta^*$, на расстоянии от вершины трещины, равно размеру зоны предразрушения, равно локальной прочности материала

$$\sigma_{\theta}(r_c, \theta_*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_c}} \cos \frac{\theta^*}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta^* \right] + T_{xx} \sin^2 \theta^* = \sigma_0. \quad (7)$$

Локальную прочность материала σ_0 вычислим, согласно [9], с учетом T_{xx} и T_{zz} -напряжений

$$\sigma_0 = -\frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} + \sqrt{\left(\frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} \right)^2 + \frac{\sigma_T^2 - T_{xx}^2 - T_{zz}^2 + T_{xx}T_{zz}}{(1 - 2\mu)^2}}. \quad (8)$$

Подстановка локальной прочности материала по формуле (8) в уравнение (7) приводит к выражению

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}(r, \theta^*) &= \frac{(\sigma_T + T_{zz})}{K_{Ic}(1 - 2\mu)} \cos \frac{\theta^*}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta^* \right] = \\ &= -\frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} + \sqrt{\left(\frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} \right)^2 + \frac{\sigma_T^2 - T_{xx}^2 - T_{zz}^2 + T_{xx}T_{zz}}{(1 - 2\mu)^2}} - T_{xx} \sin^2 \theta^*. \end{aligned}$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{2(\sigma_T + T_{zz})}{\sqrt{(T_{xx} - 2T_{zz})^2 + 4(\sigma_T^2 - T_{xx}^2 - T_{zz}^2 + T_{xx}T_{zz})^2 - T_{xx}[1 + 2(1 - 2\mu)\sin^2 \theta_*] + 2T_{zz}}} \times \\ &\quad \times \cos \frac{\theta_*}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_* \right] = K_{Ic}. \end{aligned}$$

Тогда обозначив левую часть уравнения за K_{eff} можно получить выражение для эффективного коэффициента интенсивности напряжений

$$\begin{aligned} K_{eff} &= \frac{2(\sigma_T + T_{zz})}{\sqrt{(T_{xx} - 2T_{zz})^2 + 4(\sigma_T^2 - T_{xx}^2 - T_{zz}^2 + T_{xx}T_{zz})^2 - T_{xx}[1 + 2(1 - 2\mu)\sin^2 \theta_*] + 2T_{zz}}} \times \\ &\quad \times \cos \frac{\theta_*}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_* \right]. \end{aligned}$$

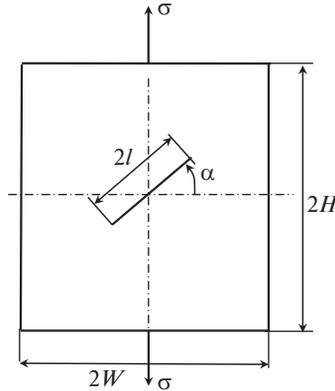


Рис. 3. Схема растянутой пластины с наклонной трещиной.

Вводя для упрощения выражения отношения Т-напряжений к пределу текучести, придем к следующему критерию разрушения:

$$K_{eff} = \frac{2(1 + \chi_z)}{\sqrt{(\chi_x - 2\chi_z)^2 + 4(1 - \chi_x^2 - \chi_z^2 + \chi_x\chi_z)^2 - \chi_x[l + 2(1 - 2\mu)\sin^2\theta^*] + 2\chi_z}} \times \times \cos \frac{\theta_*}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta_*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_* \right] = K_{Ic}, \quad (9)$$

где $\chi_x = T_{xx}/\sigma_T$, $\chi_z = T_{zz}/\sigma_T$.

Вспользуемся полученным критерием для определения разрушающего напряжения σ_{frac} для растянутой пластины высотой $2H$, шириной $2W$ и толщиной $2t$ со сквозной трещиной длиной $2l$, наклоненной относительно горизонтали на угол α (рис. 3). Очевидно, что для такой трещины будет возникать КИН I и II типов, т.е. трещина будет смешанного типа.

Для упрощения процедуры создания конечно-элементной модели вместо исходной задачи решали две задачи: растяжения и чистого сдвига пластины с поперечной трещиной. Сгенерировать конечно-элементную сетку для пластины с поперечной трещиной намного проще, чем с наклонной, особенно когда нужно рассматривать пластины с различными углами наклона трещины.

В расчете использовался авторский конечно-элементный комплекс [9].

Напряжения для этих задач определяли из уравнений равновесия как растягивающее σ_α и касательное τ_α напряжения в плоскости наклонной трещины соответственно [11]

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha. \quad (10)$$

В первой задаче рассматривалась пластина с поперечной трещиной, растянутая нормальными напряжениями σ_α . Очевидно, что трещина в этом случае будет нормального отрыва (тип I). Во второй задаче рассматривалась пластина с поперечной трещиной, находящаяся в условии чистого сдвига. Касательные напряжения задавались равными τ_α . Трещина в этом случае будет поперечного сдвига (тип II). В связи с этим K_I вычислялся из решения первой задачи, а K_{II} из решения второй.

Очевидно, что суммарное напряженное состояние в окрестности вершины трещины, по которому вычисляются КИН и T -напряжения, при таком задании напряжений будет не сильно отличаться от исходного.

Для проверки обоснованности такого подхода были вычислены K_I и K_{II} в пластине с наклонной трещиной полудлиной $l = W/2$ и с отношением высоты к ширине равном $5/4$, для которой в справочнике [12] приведены значения КИН для некоторых углов наклона. Толщина пластины принималась, равной $1/20$ от ширины.

В силу симметрии первой задачи и косо́й симметрии второй задачи относительно трех плоскостей рассматривалась только восьмая часть пластины (рис. 4). Сначала пластина разбивалась на прямоугольные параллелепипеды. Причем по ширине и высоте пластина разбивалась на 20 шагов, а по толщине на 5. Шаги по высоте и толщине были постоянные, а по ширине были разные в зоне трещины и вне ее. Каждый параллелепипед разбивался на шесть тетраэдральных симплекс-элементов [13]. Количество конечных элементов в модели составляло 12 тысяч. После вычисления постоянных напряжений и деформаций в тетраэдральных конечных элементах они осреднялись по параллелепипедам. При решении первой задачи грани пластины, совпадающие с координатными плоскостями xu и uz , закреплялись в направлении z и x соответственно. Грань, совпадающая с плоскостью xz , закреплялась по направлению y , но только вне зоны трещины. При решении второй задачи грань пластины, совпадающая с координатной плоскостью xu , также как в первом случае, закреплялась в направлении оси z . Грань, совпадающая с координатной плоскостью uz , закреплялась в направлении оси y . Грань, совпадающая с плоскостью xz , закреплялась по направлению x вне зоны трещины. Нагружение в первой задаче осуществлялось по направлению оси y в узлах, выходящих на грань, параллельную плоскости xz . Узловые силы рассчитывались по напряжению σ_α . Во второй задаче узловые силы, рассчитанные по τ_α , прикладывались в узлах, лежащих на грани параллельной xz в направлении оси x , а на грани параллельной uz в направлении оси y .

Вычисление КИН проводилось с использованием асимптотического метода расчета по значениям перемещений в точках, лежащих на берегах трещины в срединной плоскости в окрестности фронта трещины, по формулам [10]

$$K_I^{(i)} = \frac{E v_i}{4\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}}, \quad K_{II}^{(i)} = \frac{E u_i}{4\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{r_i}},$$

где κ – коэффициент, зависящий от типа плоской задачи теории упругости. $\kappa = 1 - \mu^2$ для ПДС и $\kappa = 1$ для плоского напряженного состояния (ПНС). $K_I^{(i)}$, $K_{II}^{(i)}$ и v_i , u_i – КИН I и II типов и перемещения по оси x и y соответственно в i -х точках.

На основании метода экстраполяции [14] вычислялись $K_I^{(i)}$, $K_{II}^{(i)}$ в пяти точках. При этом значения КИН в последних трех точках укладывались на линию близкую к прямой, которая экстраполировалась до оси, проходящей через вершину трещины. Данное значение принималось за КИН.

В табл. 1 представлены результаты сравнения значений, полученных МКЭ, с данными из [12] для угла наклона трещины равного 22.5° . Из таблицы видно, что численные значения достаточно хорошо согласуются с данными из справочника. Данный факт свидетельствует о том, что напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности фронта трещины, по которому вычисляются КИН и T -напряжения, для исходной расчетной схемы с наклонной трещиной близко к суммарному НДС в двух расчетных схемах с поперечными трещинами. Следует отметить, что T_{xx} - и T_{zz} -напряжения возникают в обеих схемах, и значения для пластины с наклонной трещиной определяются на основании принципа суперпозиции, т.е. как сумма T -напряжений для двух расчетных схем.

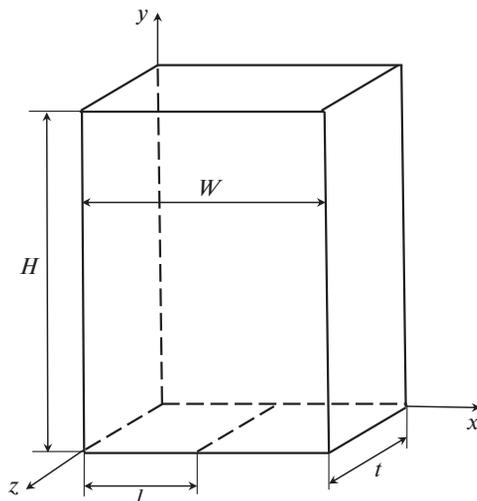


Рис. 4. Расчетная схема.

Для каждой схемы T_{xx} -напряжения вычислялись, согласно (1), по напряжениям в плоскости трещины ($\theta = 0$) по формуле

$$T_{xx} = \sigma_x - \sigma_y. \tag{11}$$

Для расчета T_{xx} -напряжения также, как при расчете КИН, использовался метод экстраполяции [14]. При этом T_{xx} -напряжения вычислялись формуле (10) в 5 точках на линии продолжения трещины для данной точки фронта. При этом также, как при расчете КИН, значения для последних трех точек укладывались на прямую линию. Экстраполяция этой прямой до вершины трещины давала значение T_{xx} -напряжения в данной точке фронта трещины. Значения T_{zz} -напряжений в этой точке определялись по формуле (1) по T_{xx} -напряжениям и деформациям ϵ_z в этой точке.

Алгоритм численного расчета разрушающего напряжения σ_{frc} для пластины заключается в следующем:

1. Задается произвольное значение внешнего напряжения σ , например, равное 200 МПа. Для заданного угла наклона трещины α по формулам (10) определяются напряжения σ_α и τ_α . С использованием МКЭ вычисляются K_I , K_{II} , T_{xx} - и T_{zz} -напряже-

Таблица 1. Сравнение расчетных значений КИН со справочными данными

l/W	0.4		0.5		0.6	
	МКЭ	[13]	МКЭ	[13]	МКЭ	[13]
$K_I/\sigma\sqrt{\pi l}$	0.939	0.955	1.01	1.04	1.10	1.12
$\delta, \%$	1.68		2.88		1.84	
$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi l}$	0.333	0.351	0.364	0.352	0.382	0.375
$\delta, \%$	5.13		3.41		1.79	

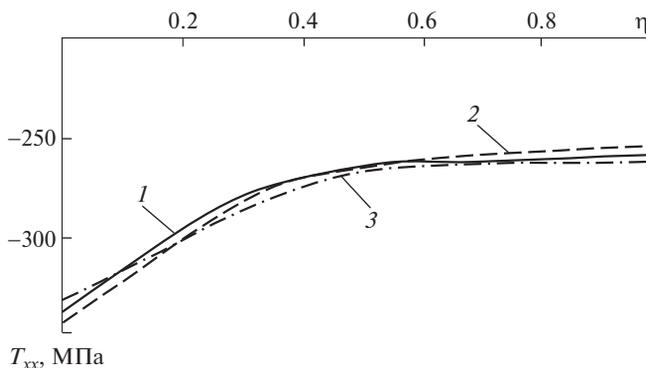


Рис. 5. Распределение T_{xx} -напряжений по толщине пластины толщиной: 1 – 20 мм; 2 – 40 мм; 3 – 100 мм.

ния. Причем, как уже отмечалось, суммарные T_{xx} - и T_{zz} -напряжения определяются посредством суммирования T_{xx} - и T_{zz} -напряжений для двух схем.

2. Посредством итерационного решения уравнения (6) вычисляется угол распространения трещины θ^* в наиболее опасной точке фронта трещины, лежащей на срединной плоскости. По формуле (9) определяется эффективный КИН K_I^{eff} в этой точке. Полученное значение сравнивается с вязкостью разрушения K_{Ic} .

3. Корректируется значение внешнего напряжения по формуле

$$\sigma' = K_{Ic} / K_I^{eff} \sigma.$$

4. Так как параметры линейной механики разрушения прямопропорциональны внешней нагрузке, значения K_I , K_{II} , T_{xx} и T_{zz} корректируются посредством умножения на K_{Ic} / K_I^{eff} .

5. Для скорректированных значений K_I , K_{II} , T_{xx} и T_{zz} процедура повторяется, начиная с пункта 2. Итерационный процесс завершается, когда эффективный КИН отличается от вязкости разрушения менее чем на 1%.

Следует отметить, что необходимость в итерациях возникает вследствие того, что K_I , K_{II} , T_{xx} - и T_{zz} -напряжения линейно зависят от растягивающего напряжения σ , а эффективный КИН, согласно (9), нелинейно от χ_x и χ_z , т.е. от T -напряжений. Кроме того, входящий в выражение (9) угол θ^* нелинейно зависит от всех параметров механики разрушения K_I , K_{II} , T_{xx} - и T_{zz} -напряжений.

Результаты расчетов. В качестве иллюстрации возможностей приведенного алгоритма на рис. 5 представлено распределение T_{xx} -напряжений, а на рис. 6 T_{zz} -напряжений по толщине пластины для квадратной пластины со стороной 200 мм со сквозной наклонной соосной трещиной длиной 100 мм. Пластина растянута постоянным напряжением $\sigma = 200$ МПа, угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 3).

На рис 5 и 6 по оси абсцисс отложена относительная координата η , равная отношению расстояния от свободной поверхности пластины к половине толщины.

Из рис. 5 видно, что максимальные по модулю T_{xx} -напряжения возникают на поверхности пластины, а минимальные на срединной плоскости. Распределение T_{xx} -напряжений практически не зависит от толщины пластины, что вполне ожидаемо, поскольку на T_{xx} -напряжения влияют геометрия тела, размер трещины и схема нагружения, но не толщина. Из рис. 6 видно, что также, как и T_{xx} -напряжения, максимальные

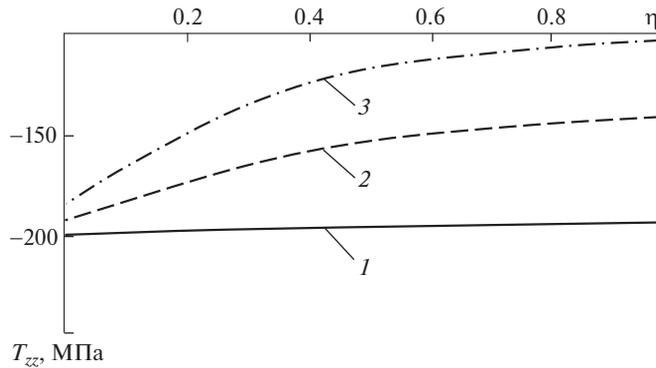


Рис. 6. Распределение T_{zz} -напряжений по толщине пластины: 1 – 10 мм; 2 – 20 мм; 3 – 50 мм.

по модулю T_{zz} -напряжения возникают на поверхности пластины. Причем значения T_{zz} -напряжений по модулю меньше, чем T_{xx} -напряжения. Следует отметить, что в отличие от T_{xx} -напряжений, T_{zz} -напряжения существенно зависят от толщины пластины и снижаются по модулю по мере увеличения толщины пластины. Расчеты показали, что начиная с толщины, равной 10 мм и меньше, T_{xx} - и T_{zz} -напряжения практически не изменяются по толщине. Изменение составляет не более трех процентов.

Для изучения влияния угла наклона трещины на разрушающее напряжение σ_{frac} были проведены расчеты для значения $\alpha = 30, 45$ и 60° . Рассматривалась такая же растянутая квадратная пластина, как выше, толщиной 10 мм. Значение вязкости разрушения K_{Ic} принималось равным $50 \text{ МПа} \sqrt{\text{м}}$. Причем разрушающее напряжение было определено, как с помощью предложенного двухпараметрического критерия разрушения МТН, так и классического однопараметрического критерия МТН. Для последнего угол направления распространения трещины θ^* и эффективный КИН определяют по формулам [1]

$$\theta^* = 2 \arctg \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda} \right), \quad K_{eff} = \cos \frac{\theta^*}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta^*}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta^* \right).$$

Результаты расчетов сведены в табл. 2, в которой значения КИН и T -напряжений приведены для значения внешнего напряжения, равного разрушающему напряжению.

При увеличении угла наклона трещины α значения КИН уменьшаются (табл. 2), как при использовании однопараметрического критерия максимальных тангенциальных напряжений, так и при использовании двухпараметрического критерия. Причем значения КИН соответствующие разрушающему напряжению в первом случае меньше. Это связано с тем, что в двухпараметрическом критерии учитываются T -напряжения, которые снижают эффективный КИН. При этом значения T -напряжений по модулю уменьшаются по мере увеличения угла α . Аналогичный вывод получен в работе [4] при исследовании T -напряжений в диаметрально сжатом диске с центральной сквозной наклонной трещиной. Так же, как в работе [4], получилось, что для всех рассматриваемых углов наклона трещины T_{zz} -напряжения по модулю меньше, чем T_{xx} -напряжения. В связи с уменьшением по модулю T -напряжений эффективный КИН меньше снижается при увеличении угла α . Поэтому разрушающие напряжения, рассчитанные по однопараметрическому и двухпараметрическому критериям, меньше

Таблица 2. Влияние угла наклона трещины на разрушающее напряжение

$\alpha, ^\circ$	Однопараметрический критерий МТН				Двухпараметрический критерий МТН					
	$K_I, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$K_{II}, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$\theta^*, ^\circ$	$\sigma_{frac}, \text{МПа}$	$K_I, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$K_{II}, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$T_{xx}, \text{МПа}$	$T_{zz}, \text{МПа}$	$\theta^*, ^\circ$	$\sigma_{frac}, \text{МПа}$
30	42.2	20.6	-61.6	121	55.6	27.0	-227	-151	-26.9	159
45	31.0	26.1	-55.6	132	42.1	35.5	-194	-104	-40.3	181
60	22.4	32.6	-46.7	191	27.0	39.4	-148	-56.1	-51.6	231

Таблица 3. Влияние толщины пластины на разрушающее напряжение

$2t, ^\circ$	Однопараметрический критерий МТН				Двухпараметрический критерий МТН					
	$K_I, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$K_{II}, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$\theta^*, ^\circ$	$\sigma_{frac}, \text{МПа}$	$K_I, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$K_{II}, \text{МПа} \cdot \text{м}^{1,2}$	$T_{xx}, \text{МПа}$	$T_{zz}, \text{МПа}$	$\theta^*, ^\circ$	$\sigma_{frac}, \text{МПа}$
10	42.2	20.6	-61.6	121	55.6	27.0	-227	-151	-26.9	159
40	42.5	20.4	-61.7	121	53.2	25.5	-194	-105	-29.1	151
100	41.9	20.6	-61.5	119	51.4	25.3	-190	-76.2	-51.6	145

отличаются при увеличении угла α . Так для $\alpha = 30^\circ$ отличие составляет 23.9%, а для $\alpha = 60^\circ$ – 17.3%. Наиболее важный вывод заключается в том, что разрушающие напряжения σ_{frac} , рассчитанные по однопараметрическому критерию, получаются заниженными в среднем на 20%. Угол распространения трещины θ^* отрицательный для двух вариантов расчета, причем больше зависит от угла α при использовании двухпараметрического критерия. При изменении α от 30 до 60° θ^* при использовании однопараметрического критерия уменьшается по модулю на 24.2%, а при использовании двухпараметрического критерия увеличивается по модулю почти в два раза.

Для изучения влияния толщины пластины на разрушающее напряжение была рассмотрена такая же пластина, как и при исследовании влияния угла наклона трещины. Рассматривалась трещина длиной 100 мм, наклоненная на угол 30°. Толщина пластины принималась равной 10, 20 и 100 мм. Результаты расчетов сведены в табл. 3. При использовании однопараметрического критерия (табл. 3) разрушающее напряжение σ_{frac} и угол распространения трещины θ^* практически не зависят от толщины пластины. Этот факт объясняется тем, что КИН не зависит от толщины пластины как для трещины I, так и II типа. Небольшие отличия (меньше 1%) возникают вследствие погрешности численного вычисления.

При использовании двухпараметрического критерия, наблюдается снижение разрушающего напряжения при увеличении толщины пластины, за счет существенного понижения T_{zz} -напряжений по модулю. Угол распространения трещины увеличивается по модулю при увеличении толщины пластины. Разрушающие напряжения, прогнозируемые по однопараметрическому критерию, кроме того, что не зависят от толщины пластины, получаются сильно заниженными, что свидетельствует о целесообразности применения разработанного критерия разрушения для более точной оценки статической трещиностойкости деталей с трещинами смешанного типа I + II.

Заключение. В настоящей статье разработан критерий разрушения для трещины смешанного типа I + II. С использованием разработанных алгоритмов проведена оценка статической трещиностойкости растянутой пластины разной толщины с на-

клонной сквозной трещиной. В результате проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы: **1.** Разработанный критерий разрушения позволяет учесть двухосное стеснение деформаций по фронту трещины смешанного типа посредством введения в критериальное уравнение компонентов T -напряжений, а именно, T_{xx} и T_{zz} несингулярных T -напряжений, лежащих в плоскости трещины и направленных перпендикулярно и параллельно, соответственно. Введение в рассмотрение T_{zz} несингулярных напряжений позволяет учесть толщину пластины. **2.** Уменьшение угла наклона исходной трещины и увеличение толщины пластины приводят к снижению разрушающего напряжения. **3.** Однопараметрический критерий максимальных тангенциальных напряжений, а также двухпараметрический критерий, в который входят только T_{xx} -напряжения, не позволяют учесть толщину пластины при вычислении разрушающих напряжений. **4.** Разрушающие напряжения, прогнозируемые по однопараметрическому критерию разрушения, получаются сильно заниженными, особенно для тонких пластин. **5.** Разработанный двухпараметрический критерий разрушения позволяет не только определить разрушающее напряжение, но и прогнозировать траекторию распространения трещины с учетом толщины пластины.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Erdogan F., Sih G.C.* On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear // *Journal of Basic Engineering.* 1963. V. 85 (4). P. 519.
2. *Черепанов Г.В.* Механика разрушения. М.: Изд-во: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2012. 872 с.
3. *Williams M.L.* On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // *Journal of Applied Mechanics.* 1957. V. 24 (1). P. 109.
4. *Матвиенко Ю.Г.* Двухпараметрическая механика разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. 208 с.
5. *Belova O.N., Stepanova L.V.* Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2022. T. 119. 103298.
6. *Stepanova L.V., Belova O.N.* Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations // *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2022. V. 30 (15). P. 1. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>
7. *Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J.* Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading // *Eng. Fract. Mech.* 2010. V. 77. P. 2200.
8. *Nakamura T., Parks D.M.* Determination of elastic T-stress along three-dimensional crack front an interaction integral // *Int. J. Solid Struct.* 1992. V. 29. P. 1597.
9. *Покровский А.М., Матвиенко Ю.Г.* Критерий разрушения, учитывающий двухосное стеснение деформаций по фронту трещины нормального отрыва // *Проблемы машиностроения и надёжности машин.* 2023. № 4. С. 34.
10. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. Основы механики разрушения. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с.
11. *Феодосьев В.И.* Соппротивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 544 с.
12. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т. 1: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. 448 с.*
13. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
14. *Морозов Е.М., Муземнек А.Ю., Шадский А.С.* ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.