

УДК 631.4

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХИМИЧЕСКОЙ СУФФОЗИИ ПРИ ПРОМЫВКАХ ЗАСОЛЕННЫХ ПОЧВ

© 2020 г. Ф. Д. Микаилсой^а, Е. В. Шеин^{б, с, *}^аСельскохозяйственный факультет университета “Ыгдыр”, Ыгдыр, 76000 Турция^бМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Ленинские горы, 119991 Россия^сПочвенный институт им. В.В. Докучаева, Пыжевский пер., 7, Москва, 119017 Россия

*e-mail: evgeny.shein@gmail.com

Поступила в редакцию 23.01.2020 г.

После доработки 21.02.2020 г.

Принята к публикации 18.03.2020 г.

Проблема количественной оценки и прогноза суффозионных просадок в засоленных почвах и грунтах актуальна в связи с орошением, промывками засоленных почв, увеличивающимся количеством бытовых и промышленных стоков. На основе решения уравнения конвективной диффузии с учетом динамики растворения солей твердой фазы представлена математическая аналитическая модель, которая может быть использована для решения как прямой задачи (прогноз рассоления почвенной толщи, нахождения промывной нормы и времени промывки заданной толщи до определенного уровня), так и обратной задачи – определение гидродинамической дисперсии и параметра “шаг смешения” (“diffusivity”) для прогнозирования химической суффозии. В основе аналитической математической модели лежит понятие среднеинтегрального (то есть средней концентрации почвенного раствора в расчетном почвенном профиле, а не по отдельным дискретным слоям) значения и соответствующего метода определения параметра скорости растворения солей твердой фазы почв и грунтов, благодаря которому появилась возможность количественного аналитического расчета и прогноза суффозионного уплотнения почв, явлений просадки почв и дисперсных грунтов. С учетом протекающих процессов в реальном времени разработана аналитическая процедура нахождения параметра скорости растворения солей твердой фазы почв, аналитические уравнения прогноза интенсивности суффозионных просадок. Предложено аналитически полученное решение конвективно-диффузионного переноса солей, с помощью которого возможен прогноз перераспределения солей во времени при промывке водонасыщенных поверхностно засоленных почв с глубоким залеганием грунтовых вод.

Ключевые слова: засоленные дисперсные грунты и почвы, мелиоративные промывки, выщелачивание, просадки, уравнение конвективной диффузии, среднеинтегральная концентрация солей в слое, уплотнение при промывках

DOI: 10.31857/S0032180X20090105

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы просадок засоленных почв при их мелиоративных промывках, прочности и устойчивости грунтов, залегающих в основаниях промышленных, гражданских и гидротехнических сооружений, являются исключительно актуальными. Это вызвано тем, что содержащиеся в таких грунтах соли растворяются и вымываются при фильтрации в них промывных вод, атмосферных осадков и особенно различных хозяйственных, бытовых и промышленных стоков. В этих условиях здания и сооружения получают дополнительные неравномерные осадки, которые в совокупности с деформацией уплотнения грунтов оснований могут вызвать опасность для устойчивости и прочности эксплуатируемых зданий и сооружений. Рас-

творение и вымывание солей из грунта в первую очередь способствует росту пористости и потере кристаллизационной структурной связности. Происходит при этом увеличение водопроницаемости и ослабление прочности грунта. Засоленные грунты в этих условиях получают дополнительную деформацию – суффозионную осадку или суффозионную консолидацию – процесс уплотнения первоначально насыщенной почвы путем отбора (медленного “выжимания”) воды при свободном ее оттоке. Поэтому вопросы прогнозирования суффозионных деформаций оснований сооружений, а также прогноз суффозионных просадок, появления суффозионных ложбин и “блюдец”, вызываемых выщелачиванием из почв растворимых солей (в ряде случаев при орошении

вымывается до 70% растворимых солей [15, 25, 35]) приобретают большую научно-практическую важность. Различные аспекты проблемы суффозии освещаются в разнообразных научно-исследовательских работах отечественных и зарубежных авторов, которые опубликованы в различных научных трудах, освещаются на международных научных конференциях [6, 7, 12, 14, 16, 18, 20–29, 31–36]. Вместе с тем следует отметить, что имеющиеся методы изучения и прогноза растворения и выноса веществ фильтрационным потоком и вызываемой этими процессами дополнительной осадки сооружений, лишь для определенных условий математически описаны и отражены в математических моделях [6, 10, 14, 16, 18, 19, 30]. Развитие такого рода моделей требует углубленной проработки теории вопроса, параметров модели и разного рода уточнений, чему и посвящена данная статья.

Цель статьи: аналитический анализ и разработка математической модели химической суффозии засоленных почв при промывках.

Задачи: 1 – построить математическую модель изменения порового пространства почв при суффозии при решении прямой и обратной задач; 2 – дать математическое обоснование использования средних величин соледержания в конкретной почвенной почвенной толще; 3 – дать аналитический анализ параметра конвективной диффузии солей в почве “шаг смешения”; 4 – предложить прогностическую математическую модель перераспределения солей при промывке водонасыщенных поверхностно засоленных почв.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

На основе натуральных наблюдений и лабораторных опытов установлено [6, 14], что в связных и не связных грунтах в процессе растворения и вымывания солей всегда происходит суффозионная осадка почв и грунтов. Влияния выноса фильтрационным потоком солей приводит к увеличению пористости почв и грунтов, при этом под действием нормальной уплотняющей нагрузки одновременно происходит ее уменьшение.

Таким образом, в водонасыщенных засоленных почвогрунтах в общем случае может происходить три различных процесса – *фильтрационная консолидация*, *суффозионная осадка* и *ползучесть скелета грунта* (вторичная консолидация). Анализ и прогноз этих процессов под различными природными и антропогенными нагрузками представляет большой научный и практический интерес.

Следуя Веригину [6], пористость засоленного почвогрунта в процессе выщелачивания солей можно представить в виде:

$$m(t) = m_0 + P_0 - P(t), \quad (1)$$

где m_0 – начальные (при $t = 0$) значения пористости почв, P_0 – удельный объем растворимых солей в кристаллах (в твердой фазе почвы), $P(t)$ – изменение удельного объема растворимых солей в кристаллах или твердой фазе в процессе выщелачивания (см^3 солей/ см^3 почвы).

Согласно (0.1) имеем:

при $t = 0$: $P(0) = P_0$ и поэтому $m(t) = m(0) = m_0 + P_0 - P_0 = m_0$;

при $t \rightarrow \infty$: $P(\infty) = 0$ и поэтому $m(t) = m(\infty) = m_0 + P_0 = m_{\max}$.

Коэффициент пористости (e_0) засоленной почвы в естественном состоянии определяется известным соотношением:

$$e_0 = \frac{m_0}{1 - m_0}. \quad (2)$$

В процессе выщелачивания солей будем иметь:

$$e(t) = \frac{m(t)}{1 - m(t)} = \frac{m_0 + P_0 - P(t)}{1 - [m_0 + P_0 - P(t)]}. \quad (3)$$

Относительная суффозионная осадка почвы $\delta_c(t)$ будет определяться выражением [14]:

$$\delta_c(t) = \frac{e(t) - e_0}{1 + e_0}. \quad (4)$$

Учитывая (1)–(3) в (4) имеем:

$$\delta_c(t) = \frac{m(t) - m_0}{1 - m(t)} = \frac{P_0 - P(t)}{1 - [m_0 + P_0 - P(t)]}. \quad (5)$$

Согласно принятым начальным (при $t = 0$) условиям и полученной зависимости (5), имеем при $t = 0$: $P(0) = P_0$ и $\delta_c(0) = 0$, а в период стабилизации суффозионной осадки, то есть при $t = T$ (так как $P(T) = 0$) согласно (5), получим

$$\delta_c(T) = \delta_c^{\max} = \frac{P_0}{1 - (m_0 + P_0)}.$$

Если обратить внимание на знаменатель выражения (5), то легко можно заметить, что величина $P(t)$ в течение всего периода выщелачивания солей существенно меньше, чем сумма $(m_0 + P_0)$. Поэтому в знаменателе этого выражения можно пренебречь $P(t)$. Такое допущение в инженерных расчетах всегда приводит к запасу устойчивости засоленных почв и грунтов [14].

С учетом отмеченного допущения, для относительной суффозионной осадки $\delta_c(t)$ будем иметь:

$$\delta_c(t) = \frac{P_0 - P(t)}{1 - (m_0 + P_0)}. \quad (6)$$

Функция $P(t)$ при поверхностном (пленочном) засолении почвогрунта, связана с концентрацией фильтрующейся воды $C(x, t)$ зависимостью [5–7, 15]:

$$\rho \frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma [C_H - C(x,t)] \quad \text{или} \quad (7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma [C_H - C(x,t)],$$

где ρ – плотность солей (г/см^3); $N = \rho P$ – концентрация солей в кристаллах или твердой фазы почвы (г/см^3 или в смоль(экв)/кг почвы); C_H – концентрация предельного насыщения (г/см^3); $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 v^r$ – коэффициент скорости растворения солей, зависящий от физико-механических свойств почвогрунтов и скорости переноса влаги v (1/сут); γ_1 и γ_2 – постоянные, зависящие от физико-химических свойств почвы, вида солей и типа засоленности; $C(x,t)$ – концентрация солей в растворе (г/см^3) в момент времени t (сут) в точке x (м).

При $C < C_H$ соли растворяются ($\partial N/\partial t < 0, \gamma > 0$), а при $C > C_H$ выпадают в осадок (кристаллизация) из перенасыщенного почвенного раствора ($\partial N/\partial t < 0, \gamma < 0$) [6, 7, 10, 15].

Теоретическое рассмотрение вопроса растворения солей в пористой среде в условиях ламинарного потока показало [7], что $r = 0.5$. Этот случай характерен в период промывки почвы. В этом случае для коэффициента γ имеем $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 v^{0.5} = \gamma_1 + \gamma_2 \sqrt{v}$.

Интегрируя (7) по времени для каждой глубины, получим:

$$P(x,t) = P_0 - \frac{\gamma}{\rho} \int_0^t [C_H - C(x,t)] dt \quad \text{или} \quad (8)$$

$$N(x,t) = N_0 - \gamma \int_0^t [C_H - C(x,t)] dt. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (6), для прогноза изменения суффозионной осадки в точке x поверхностно засоленных почв во времени получим формулу:

$$\delta_c(x,T) = \frac{\gamma}{\rho [1 - (m_0 + P_0)]} \int_0^T [C_H - C(x,t)] dt. \quad (10)$$

Изменение суффозионной осадки в слое $[0, L]$ поверхностно засоленных почв во времени получим формулу:

$$\Delta_c(T) = \frac{1}{L} \int_0^L \delta_c(x,T) dx = \frac{1}{L} \frac{\gamma}{\rho [1 - (m_0 + P_0)]} \times \int_0^L \left\{ \int_0^T [C_H - C(x,t)] dt \right\} dx = \frac{\gamma}{\rho [1 - (m_0 + P_0)]} \times \int_0^T [C_H - S(t)] dt. \quad (11)$$

В полученной формуле (11) функция $C(x,t)$ определяется из решения соответствующей прямой

задачи растворения и вымывания солей при фильтрации воды в поверхностно засоленных почв.

Определение функции $C(x,t)$ путем решения системы дифференциальных уравнений при известных краевых (начальных и граничных) условиях является предметом решения прямой задачи солепереноса. В нашем случае, $C(x,t)$ – концентрация солей в растворе в момент времени t (сут) в точке x (м) в почвенном толще. Попытаемся определить указанную функцию $C(x,t)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

1. Решение прямой задачи. Прямой задачей в решении уравнения переноса (например, описывающая тепло-, соле-, влаго- и т.д.) является получение аналитического выражения, с помощью которого можно вычислить в точке x и в момент времени t искомую переменную состояния (например, значения температуры, концентрации солей, содержания влаги).

Согласно существующей модели физико-химической гидродинамики, процесс растворения и выщелачивания солей при одномерной фильтрации, вызывающей суффозионную деформацию поверхностно засоленных почвогрунтов, описывается уравнением [1, 5–7, 10, 12, 13, 15–17, 30–36]:

$$m \frac{\partial C}{\partial t} + \rho \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial P}{\partial t} = -\gamma (C_H - C).$$

Здесь, $D = D_M + \lambda |v|$ – коэффициент конвективной диффузии, где D_M – коэффициент молекулярной диффузии ($\text{м}^2/\text{сут}$); λ – параметр дисперсии, “шаг смешения” (м); v – скорость фильтрации (м/сут).

Как отмечается в [7, 16], в период промывки или промывном режиме при орошении (то есть в случае высоких скоростей фильтрации в вычислениях можно пренебречь D_M и γ_1) практическая величина D и γ определяются скоростью фильтрации и, следовательно, можно полагать, что $D = \lambda |v|$ и $\gamma = \gamma_2 \sqrt{v}$ [7, 35]. Только при очень малых скоростях фильтрации параметры D_M и γ_1 оказывают заметное влияние на миграции солей.

Рассмотрим процесс переноса солей при: $v \neq 0$. Тогда задача прогноза перераспределения солей при промывке водонасыщенных поверхностно засоленных почвогрунтов с глубоким залеганием грунтовых вод сведется к следующей:

$$m \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x} + \gamma_2 \sqrt{v} (C_H - C), \quad (13)$$

$$\{0 < t < \infty; \quad 0 < x < \infty\}$$

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0: C(x, t) &= C_0(x), \\ \text{при } x = 0: D \frac{\partial C}{\partial x} &= v[C(0, t) - C_{\Pi}], \\ \text{при } x \rightarrow \infty: \frac{\partial C}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $C_0(x)$ и C_{Π} – соответственно концентрация солей в почвенном профиле в начальный момент времени $t = 0$ и в промывной или поливной воде.

Можно показать, что решение задачи (13)–(14) имеет вид [12, 30]:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \left(\frac{\omega_-}{b+1} - \frac{\omega_+}{b-1} + \frac{2\chi}{b^2-1} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \exp[-a^2(b^2-1)] \int_0^{\infty} \theta_0(y) \left[\frac{\partial}{\partial y} M_1(x, y) \right] dy, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \exp[2a^2z(1 \pm b)] \operatorname{erfc}[a(z \pm b)], \\ \chi &= \exp[4a^2z - a^2(b^2-1)] \operatorname{erfc}[a(z+1)], \\ \theta(x, t) &= \frac{C_{\Pi} - C(x, t)}{C_{\Pi} - C_0(x)}, \quad \theta_0(x) = \frac{C_{\Pi} - C_0(x)}{C_{\Pi} - C_0(x)}, \\ M_{n+1}(x, y) &= i^n \operatorname{erfc}\left(a + \frac{y-x}{d}\right) + \\ &+ \left[i^n \operatorname{erfc}\left(a + \frac{y+x}{d}\right) - 4ai^{n+1} \operatorname{erfc}\left(a + \frac{y+x}{d}\right) \right] e^{\frac{4ax}{d}}, \\ z &= \frac{x}{\tau}, \quad \tau = \frac{vt}{m}, \quad a = \sqrt{\frac{\tau}{4\lambda}}, \quad b = \sqrt{1 + \Pi}, \\ \Pi &= \frac{4\lambda\gamma_2}{\sqrt{v}}, \quad d = \sqrt{4\lambda\tau}, \quad \lambda = D/v, \\ i^{n+1} \operatorname{erfc}(x) &= \int_0^{\infty} i^n \operatorname{erfc}(z) dz, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ i^0 \operatorname{erfc}(x) &= \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Для частных случаев зависимости начального засоления $C_0(x)$ от глубины x , следствия этого решения опубликованы в [17]. Рассмотрим следующие часто встречающиеся эпюры начального засоления, а именно:

а) допустим, что имеет место $C_0(x) \equiv C_{\Pi} = \text{const}$, то есть начальная концентрация солей порового раствора на сильнозасоленных почвогрунтах близка к концентрации насыщения, тогда из решения (15) имеем:

$$\theta_{\Pi}(x, t) = \frac{\omega_-}{b+1} - \frac{\omega_+}{b-1} + \frac{2\chi}{b^2-1}. \quad (17)$$

б) допустим, что распределение $C_0(x)$ до глубины L равномерное, то есть $C_0(x) \equiv C_0 = \text{const}$. В этом случае решение (15) имеет упрощенный вид:

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= \theta_{\Pi}(x, t) + \frac{1}{2} \theta_0 M_1(x, 0) \exp[-a^2(b^2-1)], \\ \theta_0 &= \frac{C_{\Pi} - C_0}{C_{\Pi} - C_0} \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} C_{\Pi} - C(x, t) &= (C_{\Pi} - C_0) \left(\frac{\omega_-}{b+1} - \frac{\omega_+}{b-1} + \frac{2\chi}{b^2-1} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (C_{\Pi} - C_0) M_1(x, 0) \exp[-a^2(b^2-1)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} M_1(x, 0) &= \operatorname{erfc}\left(a - \frac{x}{d}\right) + \\ &+ \left[\operatorname{erfc}\left(a + \frac{x}{d}\right) - 4ai \operatorname{erfc}\left(a + \frac{x}{d}\right) \right] \exp\left(\frac{4ax}{d}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя (15), (17) и (18) в (10) и (11), можно вычислить изменения сульфатной осадки в точке x поверхностно засоленных почв во времени, а также в слое $[0, L]$ чего и требовала постановка данной задачи.

2. Решение обратной задачи. В случае обратной задачи требуется определение параметров модели переноса по данным специальных полевых и лабораторных экспериментов с использованием аналитического решения краевой задачи модели солереноса при точном и строгом задании краевых условий [4, 8]. В данном случае задача определения параметров уравнения (12) сводится к нахождению λ , γ_1 и γ_2 . Изложим методику определения каждого параметра в отдельности.

Как отмечается в работах [4, 8, 11–13, 30], для решения обратных задач моделирования переноса солей в почвогрунтах необходимо получить аналитические зависимости, которые должны характеризовать средние показатели засоления в расчетном слое. После этого с помощью полученных зависимостей нужно определить осредненные (по всему расчетному профилю, а не по дискретным почвенным слоям) параметры D и γ , поскольку в уравнении (12) предполагается неизменность параметров солереноса по координате x . В противном случае найденные в разных точках x коэффициенты D и γ могут быть различными, что противоречит предположениям, заложенным в уравнении (12).

Приведенные выше зависимости (15), (17), (18) позволяют вычислить минерализацию поровых растворов в определенной момент времени в любой точке расчетного слоя почвогрунтов. Не менее важным является изучение средней концентрации почвенного раствора расчетного слоя после промывки и орошения. Прежде всего это связано с тем, что, во-первых, для проведения мелиоративных мероприя-

тий необходимо знать – водно-солевой режим почв до определенных глубин [9, 30], а, во-вторых, исходные данные по засолению и рассолению, получаемые в натуральных условиях при почвенных изысканиях и характеризующие содержание солей не в конкретной точке $x = x_0$, а в некотором слое ($0 < x < L$), что связано с методикой отбора почвенных проб на анализы. Математическое обоснование этих методов [4, 8, 11] в основном заключается в том, что средние значения распределения солей в почвенной толще определяются с большой точностью и являются более информативными, чем содержание солей в какой-либо точке. Для стационарного режима этот вопрос исследован С.Ф. Аверьяновым [1] и развит в работах [2, 3]. Позднее для нестационарного режима эта проблема была исследована в работах [4, 7, 8, 11–13, 30, 32], для моделей солепереноса в одномерном потоке, не учитывающим существование застойных зон.

Обычно при описании процесса конвективной диффузии используют понятие “выходной кривой” [8, 11–13, 19, 29–36], как зависимости относительной концентрации раствора на нижней границе определенного слоя почвы от времени. Однако, наряду с выражением для выходной кривой, целесообразно иметь расчетные формулы, определяющие среднюю концентрацию в слое $0 < x < L$.

Обозначим через $S(L, t)$ среднюю концентрацию порового раствора в слое $[0, L]$, то есть $S_t = S(L, t) = L^{-1} \int_0^L C(x, t) dx$.

Интегрируя выражения (18) в пределах от 0 до L получим:

$$n(\xi, \eta, b) = \frac{C_H - S_t}{C_H - C_{\Pi}} = \frac{1}{p} [e^{-p} f_1(\xi, \eta, 1) - f_1(\xi, \eta, b)] + \frac{C_H - C_0}{C_H - C_{\Pi}} f_2(\xi, \eta) e^{-p}, \quad (20)$$

где

$$f_1(\xi, \eta, b) = \frac{\xi}{2} \exp[2\eta(1+b)] \operatorname{erfc} \left[(1+b\xi) \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \right] + \exp[2\eta(1-b)] \operatorname{erfc} \left[(1-b\xi) \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \right] - 2, \\ f_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left\{ (\xi+1) \exp(4\eta) \operatorname{erfc} \left[(\xi+1) \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \right] - (\xi-1) \operatorname{erfc} \left[(\xi-1) \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \right] \right\}, \quad \xi = \frac{\tau}{L} = \frac{vt}{mL}, \\ \eta = \frac{L}{4\lambda}, \quad p = \xi \eta (b^2 - 1) = \left(\frac{\gamma_2 \sqrt{v}}{m} \right) t, \\ b = \sqrt{1 + \Pi}, \quad \Pi = \frac{4\lambda \gamma_2}{\sqrt{v}}.$$

Если почвенный слой насыщен легкорастворимыми солями, находящимися в основном в растворе (то есть при $\gamma_2 \rightarrow 0$ имеем: $b \rightarrow 1$ и $p \rightarrow 0$), то из формулы (20) имеем:

$$\frac{C_H - S_t}{C_H - C_{\Pi}} = [1 - f_2(\xi, \eta)] + \left(\frac{C_H - S_0}{C_H - C_{\Pi}} \right) f_2(\xi, \eta) \quad (21) \\ \text{или } \bar{n} = \frac{S_t - C_{\Pi}}{S_0 - C_{\Pi}} = f_2(\xi, \eta).$$

Значения функции $f_2(\xi, \eta)$ приведены на графике в работе [4] и табулированы в работах [8, 11, 12], которые позволяют решать как прямую задачу, – прогноз рассоления толщи, нахождение промывной нормы и времени промывки заданной толщи до определенного уровня, так и обратную задачу, – определение параметра дисперсии λ (или D).

После нахождения λ , по данным промывки легкорастворимых солей по формуле (21), можно найти параметр γ_2 (для средне- и легкорастворимых компонентов вымываемых солей) из зависимости (21). Наиболее универсальным в этом случае будет метод подбора коэффициента γ_2 из условия совпадения соответствующих кривых прогнозных зависимостей с фактической.

Если начальная концентрация порового раствора на сильно засоленных почвах близка к концентрации насыщения ($C_0(x) \cong C_H$), то расчетная формула (21) намного упрощается и примет следующий вид:

$$\frac{C_H - S_t}{C_H - C_{\Pi}} = \frac{1}{p} [e^{-p} f_1(\xi, \eta, 1) - f_2(\xi, \eta, b)]. \quad (22)$$

Следовательно, для заранее известных значений параметров ξ^* , η^* и исходных данных C_{Π} , C_0 , C_H , а также допустимого среднеинтегрального содержания S_t с помощью ЭВМ находятся значения функции (21) или (22) при различных значениях величин параметра b до тех пор пока не совпала $n_{\text{экс}}$ с вычисленными значениям $n_{\text{выч}}$, то есть: $n_{\text{выч}} = n(\xi = \xi^*, \eta = \eta^*, b = b_*)$.

Из соотношения $b_* = \sqrt{1 + 4\lambda \gamma_2 / \sqrt{v}}$ находим величины искомого параметра γ_2 , который равен

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\lambda} [(b_*^2 - 1) \sqrt{v}], \quad (23)$$

где b_* – то значения параметра b , при котором $|n_{\text{экс}} - n_{\text{выч}}| \leq 10^{-4}$.

Для иллюстрации предложенной методики расчета гидрохимических параметров λ и γ_2 приведем пример: в качестве исходной информации для расчета λ и γ_2 взяты данные из табл. 1. Расчет λ проводили по данным вымывания хлоридов по

Таблица 1. Значения шага смешения (λ , м) и коэффициента скорости растворения (γ_2 , 1/сут) по содержаниям ионов Cl^- и SO_4^{2-} до и после промывки ($C_{\text{П}} = 0.5$ г/л, $C_{\text{Н}} = 80.0$ г/л)

Пористость, m , %	Промывные нормы, N_n , м	Время промывки, t , сут	Содержание ионов в слое 0–100 см				Шаг смешения, λ , м	Коэффициент скорости растворения SO_4^{2-} , γ_2 , 1/сут
			до промывки, C_0 , г/л		после промывки, S_t , г/л			
			Cl^-	SO_4^{2-}	Cl^-	SO_4^{2-}		
0.40	0.60	30	20	45	3.0	22	0.258	0.06122
0.42	0.60	25	24	52	3.5	30	0.227	0.11448
0.45	0.60	20	36	65	5.0	35	0.186	0.17075

формуле (21), и он привел к следующим значениям: для

$$m = 0.40: \lambda = 0.2584 \text{ м}, \quad m = 0.42: \lambda = 0.2273 \text{ м}, \\ m = 0.45: \lambda = 0.1862 \text{ м}.$$

Используя это значения λ и для сульфатов, путем подбора рассчитываем коэффициент скорости растворения γ_2 по формуле (21).

Здесь C_0 и $C_{\text{П}}$ – соответственно концентрация солей в почвенном профиле в начальной момент времени $t = 0$ и в промывной (поливной) воде.

Например, для $m = 0.40$; $N_n = 0.6$ м; $L = 1.0$ м; $\lambda = 0.2584$ м и по исходным данным определяем:

$$\xi = \frac{N_n}{mL} = \frac{0.6}{0.4 \times 1.0} = 1.5; \\ \eta = \frac{L}{4\lambda} = \frac{1.0 \text{ м}}{4 \times 0.2584 \text{ м}} = \frac{1}{1.0336} = 0.96749; \\ \theta_0 = \frac{C_{\text{Н}} - C_0}{C_{\text{Н}} - C_{\text{П}}} = \frac{80 - 45}{80 - 0.5} = \frac{35}{79.5} = 0.44025, \\ n_{\text{экс}} = \frac{C_{\text{Н}} - S_t}{C_{\text{Н}} - C_{\text{П}}} = \frac{80 - 22}{80 - 0.5} = \frac{58}{79.5} = 0.72956$$

и находим значение величины $b_* = 1.2031$, при котором $n_{\text{выч}} = 0.72964$. Подставляя эти данные в формулу (23) находим значение γ_2 :

$$\gamma_2 = (b_*^2 - 1)\sqrt{v}/4\lambda = (1.44745 - 1.0) \times \\ \times 0.141421/4 \times 0.2584 = 0.06122 \text{ [1/сут]}.$$

При отсутствии слоя промывной воды на поверхности поля (после прекращения водоподачи, то есть предполагается, что на скорость растворения солей твердой фазы в жидкости конвективно-диффузионные и фильтрационные процессы не влияют), область промачивания делится на две зоны – зону увлажнения: $0 \leq x \leq L$, где фильтрация отсутствует ($v \approx 0$) и зону фильтрации: $L \leq x \leq \ell$.

В зоне увлажнения $0 \leq x \leq L$ процесс перераспределения солей описывается следующим образом ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{v} \approx \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{0} \approx \gamma_1$):

$$m \frac{\partial C}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \gamma_1(C_{\text{Н}} - C), \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x, t = t_s) &= \varphi_0(x, t_s) \\ \text{при } x = 0: \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \quad x = L: \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

где $\varphi_0(x, t_s)$ – концентрация почвенного раствора, взятая из соответствующего решения уравнения (12), при $t = t_s$, то есть: $\varphi_0(x, t_s) = C(x, t = t_s)$, t_s – длительность промывки.

Решения задачи (24)–(25) имеет вид:

$$\theta(x, t) = \frac{C_{\text{Н}} - C(x, t)}{C_{\text{Н}} - S(t_s)} = \exp[-q(t - t_s)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \exp[-(t - t_s)p_n], \quad (26)$$

где

$$\theta_0(x) = \theta(x, t = t_s), \quad q = \frac{\gamma_1}{m}, \quad r = \sqrt{\frac{D_m}{m}}, \\ p_n = b + \left(\frac{\pi r n}{L}\right)^2, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \theta_0(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx, \\ n \in \mathbb{N}^+,$$

$S(t_s) = L^{-1} \int_0^L \varphi_0(x, t_s) dx$ – среднеинтегральное начальное солесодержание в слое $[0, L]$ в момент времени $t = t_s$.

Интегрируя выражение (26) в пределах от 0 до L , получим

$$\Theta_{\text{ср}}(t) = \frac{C_{\text{Н}} - S(t)}{C_{\text{Н}} - S(t_s)} = \exp[-q(t - t_s)], \quad (27)$$

$$\text{здесь } S(t) = L^{-1} \int_0^L C(x, t) dx.$$

Решая (27) относительно γ_1 , получим

$$\gamma_1 = \left(\frac{m}{t - t_s}\right) \ln \left[\frac{C_{\text{Н}} - S(t_s)}{C_{\text{Н}} - S(t)} \right] \quad (28)$$

с помощью которого, для заранее известных значений $t, t_s, m, C_H, S(t)$ и $S(t_s)$ можно легко определить искомый параметр γ_1 .

3. Прогноз суффозионной осадки поверхностно засоленных почв и грунтов. Используя приведенные выше решения уравнения (12), можно найти расчетные формулы, позволяющие в зависимости от характеристики почвогрунта, солей и скоро-

сти фильтрации прогнозировать суффозионную осадку поверхностно засоленных почв во времени при одномерной неустановившейся фильтрации.

Подставляя (18) в (10) и (11), можно вычислить изменения суффозионной осадки в точке x поверхностно засоленных почв во времени, а также в слое $[0, L]$. Например:

$$\begin{aligned} \delta_c(x, t) &= \frac{\gamma}{\rho[1 - (m_0 + P_0)]} \int_0^t [C_H - C(x, t)] dt = \\ &= \frac{\gamma \int_0^t \left[(C_H - C_{II}) \left(\frac{\omega_-}{b+1} - \frac{\omega_+}{b-1} + \frac{2\chi}{b^2-1} \right) + \frac{1}{2} (C_H - C_0) M_1(x, 0) e^{-\left(\frac{\gamma_2}{m}\right)t} \right] dt}{\rho[1 - (m_0 + P_0)]} = \\ &= \frac{\gamma \int_0^t \left[(C_H - C_{II}) \left(\frac{\omega_-}{b+1} - \frac{\omega_+}{b-1} + \frac{2\chi}{b^2-1} \right) + \frac{1}{2} (C_H - C_0) M_1(x, 0) e^{-\left(\frac{\gamma_2}{m}\right)t} \right] dt}{\rho[1 - (m_0 + P_0)]}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $M_1(x, 0) = \operatorname{erfc}\left(a - \frac{x}{d}\right) + \left[\operatorname{erfc}\left(a + \frac{x}{d}\right) - 4aierfc\left(a + \frac{x}{d}\right) \right] e^{\frac{4ax}{d}}$.

Изменение суффозионной осадки в слое $[0, L]$ поверхностно засоленных почв во времени получим формулу:

$$\begin{aligned} \Delta_c(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L \delta_c(x, T) dx = \\ &= \frac{\gamma \int_0^t \left\{ \frac{1}{L} \int_0^L [C_H - C(x, t)] dx \right\} dt}{\rho[1 - (m_0 + P_0)]} = \\ &= \frac{\gamma \int_0^t [C_H - S(t)] dt}{\rho[1 - (m_0 + P_0)]}. \end{aligned} \tag{30}$$

Если $C_0(x) \cong C_H$, то используя формулу (22) получаем:

$$\frac{C_H - S_t}{C_H - C_{II}} = \frac{1}{p} \left[e^{-p} f_1(\xi, \eta, 1) - f_2(\xi, \eta, b) \right],$$

а для формулы (30) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_c(t) &= \frac{1}{L} \int_0^L \delta_c(x, t) dx = \frac{\gamma(C_H - C_{II})}{\rho p [1 - (m_0 + P_0)]} \times \\ &\times \int_0^t \left[e^{-p} f_1(\xi, \eta, 1) - f_2(\xi, \eta, b) \right] dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Дальнейшее развитие моделей суффозионных процессов в почвах с использованием предложенных выше подходов и расчетов будет перспективным, если будут предложена конкретная верификация параметров предложенного математического подхода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения уравнения конвективной диффузии (12) с учетом растворения солей твердой фазы,

– предложен среднеинтегральный метод определения параметра скорости растворения солей твердой фазы почвогрунта, то есть γ ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \sqrt{v}$);

– получены аналитические формулы (29)–(30), с помощью которых можно прогнозировать интенсивность суффозионных просадок, то есть: $\delta_c(t, x)$ и $\Delta_c(t)$;

– предложена аналитическая математическая модель суффозионных просадок поверхностно засоленной водонасыщенной почвы при промывках и свободном дренаже на нижней границе профиля (автоморфные условия).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа осуществлена при частичной финансовой поддержке фонда TÜBİTAK (TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU BAŞKANLIĞI) (Научно-техническим исследовательским советом Турции (TUBITAK)).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверьянов С.Ф.* Борьба с засолением орошаемых земель. М.: Колос, 1978. 288 с.
2. *Айдаров И.П., Корольков А.И., Хачатурьян В.Х.* Расчет водно-солевого режима почв // Почвоведение. 1988. № 5. С. 62–69.
3. *Богомолов Ю.Г., Жабин В.Ф., Хачатурьян В.Х.* Изменение гидрогеологических условий под влиянием мелиорации. М.: Наука, 1979. 164 с.
4. *Ваксман Э.Г., Мироненко Е.В., Пачепский Я.А.* Метод определения параметра солепереноса при промывках // Гидротехника и мелиорация. 1981. № 11. С. 83–84.
5. *Веригин Н.Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники // Изв. АН СССР. ОТН. 1953. № 7. С. 1369–1382.
6. *Веригин Н.Н.* О кинетике растворения солей при фильтрации воды в грунтах // Растворение и выщелачивание горных пород. М.: Стройиздат, 1957. С. 84–113.
7. *Веригин Н.Н., Васильев С.В., Куранов Н.П., Саркисян В.С., Шульгин Д.Ф.* Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.: Колос, 1979. 336 с.
8. *Веригин Н.Н., Азизов К.З., Микайылов Ф.Д.* О влиянии граничных условий при моделировании переноса солей в почвогрунтах при промывке // Почвоведение. 1986. № 6. С. 67–73.
9. *Волобуев В.Р.* Расчет промывки засоленных почв. М.: Колос, 1975. 65 с.
10. *Горев Л.Н., Пелешенко В.И.* Мелиоративная гидрохимия. К.: Вища школа. Головное изд-во, 1984. 256 с.
11. *Микайылов Ф.Д.* Вопросы моделирования переноса солей в почвогрунтах при промывке и в условиях режима орошения. Автореф. дис. ... канд. н. Баку, 1989. 24 с.
12. *Микайылов Ф.Д.* Определение параметров модели солепереноса при промывках водонасыщенных поверхностно-засоленных почвогрунтов // Почвоведение. 2007. № 5. С. 599–609. <https://doi.org/10.1134/S1064229307050092>
13. *Микайылов Ф.Д., Азизов К.З.* Определение гидрохимического параметра дисперсии переноса солей при промывках засоленных водонасыщенных почвогрунтов // Почвоведение. 1985. № 5. С. 84–90.
14. *Мустафаев А.А.* Деформация засоленных грунтов в основаниях сооружений. М.: Стройиздат, 1985. 280 с.
15. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Отв. ред. Полубаринова-Кочина П.Я. М.: Наука, 1969. С. 314–336.
16. *Рекс Л.М.* Перераспределение солей в почвогрунтовым слое // Журн. ПМТФ. 1967. № 6. С. 35–39.
17. *Файбишенко Б.А.* Водно-солевой режим грунтов при орошении. М.: Агропромиздат, 1986. 304 с.
18. *Хоменко В.П.* Закономерности и прогноз суффозионных процессов. М.: ГЕОС, 2003. 216 с.
19. *Шеин Е.В., Рыжова И.М.* Математическое моделирование в почвоведении. Учебник. М.: “ИП Маракушев А. Б.”, 2016. 377 с.
20. *Boneli S., Jommi C., Sterpi D.* Internal Erosion in Earthdams, Dikes and Levees // Proceedings of EWG-IE 26th Annual Meeting, 2018, Lecture Notes in Civil Engineering, Springer, Cham. 2018. V. 17. P. 168–179 https://doi.org/10.1007/978-3-319-99423-9_16
21. *Bykov A.A., Kuzichkin O.R.* Regression prediction algorithm of suffusion processes development during geoelectric monitoring // Advances in Environmental Biology. 2014. V. 8(5). P. 1404–1408.
22. *Chetti A., Benamar A., Hazzab A.* Modeling of particle migration in porous media: application to soil suffusion // Transport in Porous Media. 2016. V. 113(3). P. 591–606. <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0714-y>
23. *Golay F., Bonelli S.* Numerical modeling of suffusion as an interfacial erosion process // European J. Environmental and Civil Engineering. 2011. V. 15(8). P. 1225–1241. <https://doi.org/10.1080/19648189.2011.9714850>
24. *Herus V., Martyniuk P., Stepanchenko O., Tsvetkova T.* Numerical modeling of a system of interrelated consolidation and mechanical-chemical suffusion processes in heterogenic porous media // International J. Pure and Applied Mathematics. 2017. V. 116(4). P. 1043–1056. <https://doi.org/10.12732/ijpam.v116i4.19>
25. *Hosseininia M., Hassanpour F., Naghavi H. et al.* Leaching of Saline Calcareous Soil under Laboratory Conditions // Eurasian Soil Sc. 2019. V. 52. P. 1214–1222. <https://doi.org/10.1134/S106422931910003X>
26. *Hu Z., Zhang Y.* Suffusion-induced deformation and microstructural change of granular soils: a coupled CFD–DEM study // Acta Geotechnica. 2019. V. 14. P. 795–814. <https://doi.org/10.1007/s11440-019-00789-8>
27. *Litvintsev V.S., Alekseev V.S., Pulyaevsky A.M.* Suffusion processes in the technology of formation of enriched zones inside gold placer mining waste dumps // J. Mining Science. 2012. V. 48(5). P. 914–919. <https://doi.org/10.1134/S1062739148050164>
28. *Marot D., Benamar A.* Suffusion, transport and filtration of fine particles in granular soil // Erosion of Geomaterials, Edited by Stéphane Boneli, Publisher: Wiley-ISTE. 2012. P. 39–79. <https://doi.org/10.1002/9781118561737.ch2>
29. *Milanovic P., Maksimovich N., Meshcheriakova O.* Dams and Reservoirs in Evaporites // Series Title: Advances in Karst Science, Springer Nature Switzerland AG. 2019. 170 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-18521-3>
30. *Mikayilov F.D.* Dissolution and Leaching of Salts from Waterlogged Soils // Articles Presented as Reports at the 6th International Symposium, Bourgas, Bulgaria. 2004. (Bourgas, 2004). V. 1. P. 20–38.

31. *Mikhailsoy F.D., Pachepsky Y.A.* Average concentration of soluble salts in leached soils inferred from the convective-dispersive equation // *Irrigation Science*. 2010. V. 28(5). P. 431–434.
<https://doi.org/10.1007/s00271-009-0203-y>
32. *Pobereznyi L.Ya., Poberezhna L.Ya., Maruschak P.O., Panin S.V.* Assessment of potential environmental risks from saline soils subsidence // *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*. 2017. V. 50. 012046.
<https://doi.org/10.1088/1755-1315/50/1/012046>
33. *Ranjbar A., Ehteshami M.* Development of an uncertainty based model to predict land subsidence caused by groundwater extraction (Case Study: Tehran Basin) // *Geotech Geol Eng*. 2019. V. 37. P. 3205–3219.
<https://doi.org/10.1007/s10706-019-00837-w>
34. *Reynolds W.D.* An analytic description of field capacity and its application in crop production // *Geoderma*. 2018. V. 326. P. 56–67.
<https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2018.04.007>
35. *Shein E.V., Umarova A.B.* Changes in physical properties of soils and soil properties as derived from the data of a long-term experiment (1961–2002) // *Eurasian Soil Science*. 2002. V. 35. Suppl. 1. P. 100–106.
36. *Ward A.G., Trimble S.W.* *Environmental hydrology*. 2nd Ed. CRC Pres, New York, NY, 2003.

Analytical Mathematical Model of Chemical Suffosion While Washing Saline Soils

F. D. Mikhailsoy¹ and E. V. Shein^{2, 3, *}

¹*Iğdır University, Agricultural Faculty, Iğdır, 76000 Turkey*

²*Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991 Russia*

³*Dokuchaev Soil Science Institute, Moscow, 119017 Russia*

*e-mail: evgeny.shein@gmail.com

The problem of quantitative assessment and prediction of suffosion-induced subsidence in saline soils and sediments is relevant for irrigated soils, washing of saline soils, and increasing domestic and industrial effluents volumes. Based on the solution of the convective diffusion equation, and taking into account the dissolution of salts of the solid phase, a presented mathematical analytical model can be used to solve both the direct problem (predicting desalinization of the soil profile, finding the soil washing rate and time for a given thickness and certain level), and the inverse one: determining the hydrodynamic dispersion parameter and the “diffusivity”. The analytical mathematical model is based on the concept of the average integral (i.e., the average concentration of the soil solution in the calculated soil profile, but not on separate discrete layers) value and the corresponding method for determining the dissolution rate parameter of the salts of the soil and sediment solids, which made it possible to quantitatively calculate and predict the suffosion compaction of soils and subsidence of soils and unconsolidated sediments. Taking into account the ongoing processes in real time, an analytical procedure was developed for finding the dissolution rate coefficient of salts. This analytically obtained solution of the convective-diffusive salt transfer can be applied to predict the redistribution of salts over time in water-saturated soil profile with surface salinization and deep ground water table.

Keywords: saline dispersed grounds and soils, reclamation washing, subsidence, convective diffusion equation, the average integral salt concentration in the layer, compaction during washing