

УДК 631.43+004.65

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОДОУДЕРЖИВАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ ПОЧВЫ С УЧЕТОМ ГИСТЕРЕЗИСА¹

© 2021 г. В. В. Терлеев^а, *, Р. С. Гиневский^а, В. А. Лазарев^а, А. Г. Топаж^б, Е. А. Дунаева^с^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251 Россия^бООО “Бюро Гиперборея”, ул. Подвойского, 40-2, Санкт-Петербург, 193312 Россия^сНаучно-исследовательский институт сельского хозяйства Крыма, ул. Киевская, 150, Симферополь, 295543 Россия

*e-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.

После доработки 03.11.2020 г.

Принята к публикации 20.11.2020 г.

Целью исследования является моделирование водоудерживающей способности и относительной гидравлической проводимости почвы как капиллярно-пористой среды, а также верификация предлагаемых моделей в сравнении с наиболее известными мировыми аналогами. Указанная цель достигается решением следующих задач: 1) описанием гидрофизических свойств почвы в виде трех систем функций с соответствующими наборами общих параметров; 2) верификацией этих систем путем оценивания относительной гидравлической проводимости, а также сканирующих ветвей водоудерживающей способности с использованием параметров, идентифицированных по данным из литературного источника о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности опесчаненного суглинка; 3) применением равенства значений экспоненциального параметра в вычислениях ветвей иссушения и увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности почвы для устранения нежелательного искусственного “эффекта помпы”; 4) исследованием влияния аддитивного параметра на погрешности точечной аппроксимации данных о главных ветвях водоудерживающей способности, а также на погрешности оценок относительной гидравлической проводимости и сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности почвы, а также 5) выявлением достоверных различий между погрешностями этих оценок по критерию Вильямса–Клута для выбора лучшей системы функций. В поисках решения проблем точного ирригационного земледелия, таких как прогнозирование влагообеспеченности сельскохозяйственных культур и расчет прецизионных норм орошения, применение предлагаемых авторами моделей представляется наиболее предпочтительным.

Ключевые слова: математическая модель, точечная аппроксимация, “эффект помпы”, гидрофизические свойства почвы

DOI: 10.31857/S0032180X21060149

ВВЕДЕНИЕ

Насыщенность почвы водой, имеющей свойства жидкости, оценивается эффективным влагонасыщением $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$, где θ ($\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$) – объемная влажность; θ_s ($\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$) – объемная влажность насыщения; θ_r ($\text{см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$) – остаточная влажность, соответствующая минимальному удельному объему воды как жидкости в почве. К гидрофизическим свойствам почвы относятся ее водоудерживающая способность и гидравлическая проводимость. Водоудерживающая способность описывается в виде зависимости S_e или θ от капиллярного давления (капиллярно-сорбцион-

ного потенциала) почвенной влаги ψ (см вод. ст.) ($\psi < 0$ в почвах, не насыщенных водой). Для описания гидравлической проводимости используется зависимость коэффициента влагопроводности почвы k ($\text{см} \cdot \text{сут}^{-1}$) от величин S_e , θ или ψ . Максимальное значение k равно коэффициенту фильтрации влаги в почве k_s ($\text{см} \cdot \text{сут}^{-1}$). Отношение k/k_s называется относительной гидравлической проводимостью почвы. Неоднозначный характер зависимостей, описывающих гидрофизические свойства почвы в виде функций, аргументами которых является ψ , обусловлен феноменом гистерезиса [22, 25, 27, 28].

В литературе приведены примеры описания зависимости $\theta(\psi)$ для различных интервалов зна-

¹ К статье имеются дополнительные материалы.

чений ψ на основе физических представлений, например – экспоненциальная модель [5, 6, 8]. Кривая, которая графически представляет экспоненциальную модель, не имеет S -образной формы в общем диапазоне пленочной и капиллярной влаги; для этого диапазона почвенной влаги к настоящему времени не предложено исчерпывающего обоснованного математического описания гидрофизических свойств почвы в виде обобщенной системы функций [10]. Поэтому при формулировании зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(S_e)$ обычно используют регрессионные и другие эмпирические функции [2, 3, 7]. В большинстве случаев данные функции применяются для точечной аппроксимации данных прямых измерений, например – с применением алгоритма Левенберга–Марквардта для минимизации квадратичных отклонений расчетных значений от опытных данных [21, 23]. Как известно, эти измерения являются весьма трудоемкими. Их трудоемкость особенно возрастает при измерении сканирующих ветвей гистерезиса. Вместе с тем для решения ряда задач гидрофизики почвы требуются не только данные прямых измерений, но и функциональное представление зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(S_e)$. К числу таких задач относятся, например, прогнозирование влагообеспеченности сельскохозяйственных культур и расчет прецизионных норм орошения.

Для решения первой задачи применяется дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа (уравнение Ричардса) [32], одним из коэффициентов которого является функция приведенной дифференциальной влагоемкости почвы $dS_e/d\psi$. Использование регрессионных зависимостей (в том числе степенных полиномов) и других эмпирических функций [2, 8], которые аппроксимируют опытные данные, нередко приводит к физически абсурдным результатам, например, при вычислении производной $dS_e/d\psi$, поскольку дифференцирование не является устойчивой операцией по отношению к аппроксимациям. Эта проблема особенно обостряется, если для решения уравнения Ричардса применяются численные методы с итерационными процедурами [30].

Для решения второй задачи требуются данные о сканирующих ветвях увлажнения гистерезиса $S_e(\psi)$. Как известно, сканирующая ветвь увлажнения начинается в точке поворота от предыдущей ветви иссушения: эта точка описывается определенной парой значений S_e и ψ , которые соответствуют запасу воды в почве непосредственно перед поливом. Сканирующая ветвь увлажнения заканчивается в точке поворота к последующей ветви иссушения: эта точка описывается другой парой значений S_e и ψ , которые соответствуют влагозапасу почвы, аккумулируемому при поливе.

По причине высокой трудоемкости измерения сканирующих ветвей в ирригационном земледелии

нередко применяется методика расчета норм орошения, основанная на разности между наименьшей влагоемкостью и предполивной влажностью почвы: при этом наименьшая влагоемкость обычно определяется главной ветвью иссушения $S_e(\psi)$. На этой ветви при критическом значении ψ , которому соответствует наибольший запас влаги, удерживаемый почвой, величина S_e достигает максимального значения в сравнении с любой другой ветвью гистерезиса. Однако смене состояний почвенной влаги при увлажнении почвы соответствует не главная ветвь иссушения, а определенная сканирующая ветвь увлажнения [35]. Поэтому при расчете нормы орошения по данной методике результат может оказаться завышенным. Для получения более точного результата следует использовать определенное (более низкое) значение S_e на соответствующей сканирующей ветви увлажнения. Попутно отметим, что для определения этого (более низкого) значения S_e может быть использована эмпирическая зависимость Воронина [1].

Наряду с трудоемкостью измерения сканирующих ветвей $S_e(\psi)$, существует проблема непредсказуемости выпадения атмосферных осадков в предстоящем вегетационном периоде (в условиях сельскохозяйственного поля): невозможно предугадать, какие именно сканирующие ветви увлажнения потребуются для вычисления прецизионных норм орошения. В данном случае применение математической модели гистерезиса $S_e(\psi)$ не имеет альтернативы. Поэтому в значительной мере актуальными являются исследования, направленные на разработку методов, которые позволяют уменьшить объем прямых измерений гидрофизических свойств почвы [40], а также на построение физически обоснованных математических моделей, которые необходимы для прогнозирования влагообеспеченности сельскохозяйственных культур и расчета прецизионных норм орошения.

Цель исследования – функциональное описание гидрофизических свойств почвы как капиллярно-пористой среды в форме математических моделей, его верификация и сравнение с аналогами на примере данных из авторитетного литературного источника [24]. Указанная цель достигается решением следующих задач:

- описанием зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(S_e)/k_s$ в виде трех систем функций с соответствующими наборами общих параметров (применение общих параметров позволяет оценивать значения функции $k(S_e)/k_s$ по опытным данным $S_e(\psi)$ и уменьшить объем прямых измерений);
- учетом гистерезиса и представлением зависимости $S_e(\psi)$ в виде функции, которая имеет два набора параметров: один набор – для ветвей иссушения, другой – для ветвей увлажнения (при-

менение таких наборов параметров позволяет оценивать сканирующие ветви по данным о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$ и уменьшить объем прямых измерений);

- идентификацией параметров трех систем функций путем точечной аппроксимации данных из литературы о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$;
- верификацией трех систем функций путем оценивания значений $k(S_e)/k_s$ и сканирующих ветвей $S_e(\psi)$ с использованием параметров, идентифицированных по данным о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$;
- выявлением достоверных различий между погрешностями оценок по критерию Вильямса–Клута [4] для выбора лучшей модели.

ОБЪЕКТЫ И МЕТОДЫ

В настоящее время для описания гидрофизических свойств почвы широко применяются функции водоудерживающей способности и относительной гидравлической проводимости почвы, предложенные Ван Генухтенем [39]:

$$S_e(\psi) = \begin{cases} (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-(1-1/n)}, & \psi < 0; \\ 1, & \psi \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$k(S_e)/k_s = \begin{cases} \sqrt{S_e}(1 - (1 - S_e^{1/(1-1/n)})^{(1-1/n)})^2, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta = \theta_s, \end{cases} \quad (2)$$

где $n > 1$ и α (см вод. ст.⁻¹) – формальные параметры.

Метод оценивания значений функции относительной гидравлической проводимости по данным о водоудерживающей способности почвы с использованием соотношений (1) и (2) называется методом Муалема–Ван Генухтена [26, 39]. Для функций, которые описываются соотношениями (1) и (2), воспользуемся обозначениями соответственно: WRC-VG (WRC – water retention capacity) и RHC-MVG (RHC – relative hydraulic conductivity). Важным достоинством функций WRC-VG и RHC-MVG является то, что они имеют общие параметры. Но формальный характер параметров n и α является причиной ряда недостатков этих функций. Первым недостатком является возможность возникновения упомянутой выше проблемы дифференцирования аппроксимации. Второй недостаток состоит в проблематичности оценки RHC-VG за пределами интервала ψ , на котором измерена зависимость $\theta(\psi)$. Третий недостаток заключается в ограничительном условии $n > 1$, которое приводит к тому, что при малых значениях параметра n имеет место значительное возрастание погрешности оценок значений функции относительной гидравлической проводимости по данным о водоудерживающей способности почвы с использованием формул (1) и

(2), отмеченное Ван Генухтенем в отношении аллювиальной глинистой почвы 1006 Beit Netofa clay из каталога Муалема ($k_s = 9.5 \times 10^{-7}$ см · с⁻¹) [24, 31].

Следует подчеркнуть, Ван Генухтен не связывал сомнительный результат для этой почвы с использованием условия $n > 1$. Однако, как показано в статье [9], именно оно является одной из причин достаточно высокой погрешности метода Муалема–Ван Генухтена для почвы 1006 Beit Netofa clay.

В работах [29, 36, 37] на основе представлений о почве как капиллярно-пористой среде сформулированы гидрофизические функции почвы, которые здесь перепишем в виде следующих соотношений:

$$S_e(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{n\sqrt{\pi}}{4} \ln(-\alpha(\psi - \psi_e))\right), & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (3)$$

$$k(S_e)/k_s = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{S_e}}{4} \left(\operatorname{erfc}\left(\operatorname{inverfc}(2S_e) + \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\right)\right)\right]^2, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta \geq \theta_s, \end{cases} \quad (4)$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ – дополнительная функция ошибок; $\operatorname{inverfc}(\operatorname{erfc}(x)) = x$; ψ_e (см вод. ст.) – аддитивный параметр: с учетом гистерезиса ψ_e – капиллярное давление входа воздуха (давление барботирования) для ветвей иссушения ($\psi_e \leq 0$) и ψ_e – капиллярное давление входа воды для ветвей увлажнения ($\psi_e \geq 0$); α (см вод. ст.⁻¹) – мультипликативный параметр: $\alpha = -1/(\psi_0 - \psi_e)$, ψ_0 (см вод. ст.) – капиллярное давление влаги, при котором плотность распределения вероятностей по значениям нормально-распределенной случайной величины $\ln((\psi - \psi_e)/(\psi_0 - \psi_e))$ с нулевым генеральным средним и стандартным отклонением σ достигает максимального значения, $\psi_0 < \psi_e$; n – экспоненциальный параметр: $n = 4/(\sigma\sqrt{2\pi})$.

Для функций, которые описываются соотношениями (3) и (4), воспользуемся обозначениями соответственно: WRC-КТ и RHC-МКТ. В частном случае при $\psi_e = 0$ функции WRC-КТ и RHC-МКТ сводятся к моделям, предложенным Косуги [17–20], которые обозначим соответственно WRC-КТ₀ и RHC-МКТ₀.

В статье [9] представлена непрерывная аппроксимация соотношений (3) и (4) в классе элементарных функций:

$$S_e(\psi) = \begin{cases} (1 + (-\alpha(\psi - \psi_e))^n)^{-1}, & \psi < \psi_e; \\ 1, & \psi \geq \psi_e, \end{cases} \quad (5)$$

$$k(S_e)/k_s = \begin{cases} \sqrt{S_e} \left(1 - (1 - S_e^{-1}) \exp\left(\frac{8}{n\pi}\right) \right)^{-2}, & \theta < \theta_s; \\ 1, & \theta \geq \theta_s, \end{cases} \quad (6)$$

где ψ_e , α и n – те же параметры, что и в соотношениях (3) и (4).

Для функций, которые описываются соотношениями (5) и (6), воспользуемся обозначениями соответственно: WRC-НТ и RHC-МТ. В частном случае при $\psi_e = 0$ функция WRC-НТ сводится к модели, предложенной Хаверкампом и соавторами [14], которую обозначим WRC-НТ₀. Для функции RHC-МТ при $\psi_e = 0$ воспользуемся обозначением RHC-МТ₀. Стоит отметить, что пара функций WRC-НТ₀ и RHC-МТ₀ представляет собой математически корректное решение задачи Ван Генухтена в ее исходной постановке.

В статье [11] отмечается, что вопрос интерпретации мультипликативного параметра функции (1) требует дальнейших исследований. Действительно, для этого параметра в литературе нередко встречается весьма сомнительная интерпретация, в соответствии с которой он представляет собой величину, обратную давлению барботирования. Как известно, под давлением барботирования понимается такое капиллярное давление влаги, с которого начинается вход воздуха при иссушении изначально влагонасыщенной почвы, когда еще выполняется равенство $S_e = 1$. Нетрудно убедиться, что для функции (1) при $\psi = -1/\alpha$ это равенство не выполняется, поскольку: $S_e = 2^{-(1-1/n)}$ и применяется условие $n > 1$. Поэтому степень обоснованности такой интерпретации представляется более чем проблематичной. Проблему интерпретации мультипликативного параметра α функции (1) как величины, обратной давлению барботирования, иллюстрируют и опытные данные, приведенные в статье [11]. Отметим, что при точечной аппроксимации этих данных с использованием функций (3) и (5) величину давления барботирования может адекватно учитывать аддитивный параметр ψ_e .

Значительная часть исследований по моделированию гистерезиса $S_e(\psi)$ является развитием двух известных разработок: (i) модели Скотта и соавторов [33], а также (ii) модели Кула и Паркера [16]. В первой модели используется функция WRC-НТ₀; в основу второй модели положена функция WRC-VG. Воспользуемся следующими обозначениями: Hys-SHT₀ – для модели Скотта и соавторов; Hys-KPVG – для модели Кула и Паркера.

Функция WRC-VG, применяемая в модели Hys-KPVG, определена только на интервале $\psi \leq 0$. Но поскольку главные ветви иссушения и увлажнения гистерезиса могут смыкаться при $\psi > 0$ (в области вытеснения воздуха, защемленного в тупиковых порах) [12, 13, 15], постольку функция

WRC-VG принципиально не может в полной мере описать феномен гистерезиса.

Наряду с моделями Hys-SHT₀ и Hys-KPVG в данном исследовании рассматриваются еще три математические модели гистерезиса. Для этих моделей введем следующие обозначения: Hys-SKT, которая основана на функции WRC-КТ, описываемой соотношением (3); Hys-SKT₀, которая базируется на функции WRC-КТ₀, описываемой соотношением (3) при $\psi_e = 0$; Hys-SHT, в основу которой положена функция WRC-НТ, описываемая соотношением (5).

Во всех пяти обозначенных моделях расчет сканирующих ветвей осуществляется по алгоритму, разработанному Скоттом и соавт. [33]. Для отмеченных пяти моделей гистерезиса существует возможность возникновения нежелательного искусственного (методического) “эффекта помпы”. Эффект заключается в том, что при осцилляции ψ в фиксированном интервале возможно пересечение сканирующей и главной ветвей гистерезиса, а также достижение величины S_e физически абсурдных значений. По мнению авторов данной статьи: во-первых, пересекаться могут только сканирующие ветви; во-вторых, от главных ветвей начинаются сканирующие (первичные) ветви, но на главных ветвях не могут заканчиваться сканирующие ветви; в-третьих, между двумя точками пересечения двух соседних в последовательной очередности сканирующих ветвей может образовываться замкнутая петля; в-четвертых, в каждой точке на любой ветви производная $dS_e/d\psi$ принимает только два значения, которые соответствуют ветвям иссушения и увлажнения. Можно предположить, что наиболее предпочтительным способом предотвращения возникновения “эффекта помпы” является применение условия равенства значений экспоненциального параметра n для ветвей иссушения и увлажнения: $n_d = n_w$ (здесь и далее индекс d используется для ветвей иссушения, а индекс w – для ветвей увлажнения).

Приведенные выше функции $S_e(\psi)$ и $k(S_e)/k_s$, а также модели гистерезиса $S_e(\psi)$ сгруппируем в три системы:

- система 1 (WRC-VG, RHC-MVG, Hys-KPVG);
- система 2 (WRC-КТ, RHC-MKT, Hys-SKT или WRC-КТ₀, RHC-MKT₀, Hys-SKT₀ для случая $\psi_e = 0$);
- система 3 (WRC-НТ, RHC-МТ, Hys-SHT или WRC-НТ₀, RHC-МТ₀, Hys-SHT₀ для случая $\psi_e = 0$).

В статье [9] на примере глинистой почвы 1006 Beit Netofa clay выявлено преимущество систем 2 и 3 перед системой 1 в отношении погрешностей оценок функции $k(S_e)/k_s$, когда значения экспоненциального параметра n для систем 2 и 3 оказались меньше единицы (напомним, что для си-

Таблица 1. Параметры трех систем гидрофизических функций почвы

Система функций	$n_d \neq n_w$									
	θ_r см ³ · см ⁻³	θ_s см ³ · см ⁻³	$\Psi_{e, d}$ см вод. ст.	$\Psi_{0, d}$ см вод. ст.	α_d см вод. ст. ⁻¹	$\Psi_{e, w}$ см вод. ст.	$\Psi_{0, w}$ см вод. ст.	α_w см вод. ст. ⁻¹	n_d б/р	n_w б/р
1	0.1804	0.3810	—	-86.65	0.0115	—	-25.78	0.0388	6.266	3.311
2	0.1750	0.3810	-34.38	-90.50	0.0178	26.40	-34.86	0.0163	3.676	3.105
3	0.1728	0.3810	-36.37	-90.91	0.0183	24.19	-35.05	0.0169	3.668	3.117
2, $\Psi_{e=0}$	0.1840	0.3810	—	-89.53	0.0112	—	-30.77	0.0325	6.566	2.711
3, $\Psi_{e=0}$	0.1820	0.3810	—	-89.66	0.0112	—	-30.75	0.0325	6.794	2.731
$n_d = n_w$										
1	0.1700	0.3810	—	-73.53	0.0136	—	-26.46	0.0378	3.301	3.301
2	0.1730	0.3810	-29.17	-93.03	0.0157	29.99	-35.58	0.0153	3.421	3.421
3	0.1750	0.3810	-18.05	-89.49	0.0140	26.99	-32.39	0.0168	3.679	3.679
2, $\Psi_{e=0}$	0.1886	0.3810	—	-89.33	0.0119	—	-26.95	0.0371	4.733	4.733
3, $\Psi_{e=0}$	0.1869	0.3810	—	-89.45	0.0112	—	-27.66	0.0361	4.724	4.724

стемы 1 используется ограничительное условие $n > 1$). Но остается открытым вопрос: имеют ли преимущество системы 2 и 3 перед системой 1, когда значения экспоненциального параметра n для систем 2 и 3 оказываются больше единицы? Кроме того, предстоит ответить на следующие вопросы:

- какая из сравниваемых систем имеет наименьшую погрешность точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы;
- устраняется ли нежелательный искусственный (методический) “эффект помпы” при выполнении условия $n_d = n_w$, влияет ли это условие на погрешности оценок функции $k(S_e)/k_s$;
- какая из сравниваемых систем имеет наименьшую погрешность оценок функции $k(S_e)/k_s$;
- какая из сравниваемых систем имеет наименьшую погрешность оценок сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$;
- влияет ли использование аддитивного параметра Ψ_e на погрешности точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы, а также на погрешности оценок функции $k(S_e)/k_s$ и сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$?

Для получения ответов на эти вопросы далее приведены результаты вычислительного эксперимента с использованием данных из авторитетного литературного источника об опесчанном суглинке 3501 Rubicon sandy loam из каталога Муалема [24, 38]. Данная почва характеризуется следующим распределением частиц по размерам: песок (0.05–2.00 мм) – 65.2%; глина (0.002–0.05 мм) – 25.9%; ил (<0.002 мм) – 8.9%. Исследуемая почва имеет плотность сложения, равную 1.35 г · см⁻³; $\theta_s = 0.381 \text{ см}^3 \cdot \text{см}^{-3}$; $k_s = 3.0 \times 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Табл. 1 содержит параметры трех систем гидрофизических функций, идентифицированные путем точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях иссушения и увлажнения водоудерживающей способности почвы. Для варианта $n_d \neq n_w$ приведены параметры, рассчитанные с применением разработанных авторами компьютерных программ SoilHydrophysics-v.1.0 и SoilHysteresis-v.1.0. Для варианта $n_d = n_w$ приведены: параметры системы 1 из статьи [16], а также параметры систем 2 и 3 из статьи [34].

С применением параметров из табл. 1 проведено исследование условия $n_d = n_w$ для предотвращения “эффекта помпы”. В качестве примера на рис. 1 приведены результаты такого исследования с использованием модели Hys-SHT. Стрелками на рис. 1 изображены сценарии варьирования величины ψ . В зоне насыщения почвы влагой видно, что при осцилляции ψ в фиксированном диапазоне происходит последовательное асимптотическое приближение замкнутых петель, образованных сканирующими ветвями. Однако в зоне иссушения на рис. 1, А видно, что сканирующая ветвь иссушения пересекает главную ветвь увлажнения. Выполнение условия $n_d = n_w$ при идентификации параметров приводит к устранению отмеченного пересечения, что подтверждает рис. 1, Б.

Условие $n_d = n_w$, устраняющее нежелательный “эффект помпы”, можно признать обоснованным при отсутствии существенных различий между оценками $k(S_e)/k_s$, которые получены с применением параметров, идентифицированных тремя способами: во-первых, при использовании данных только об одной главной ветви иссушения; во-вторых, при использовании данных только об одной главной ветви увлажнения; в-третьих, при использовании данных об обеих главных

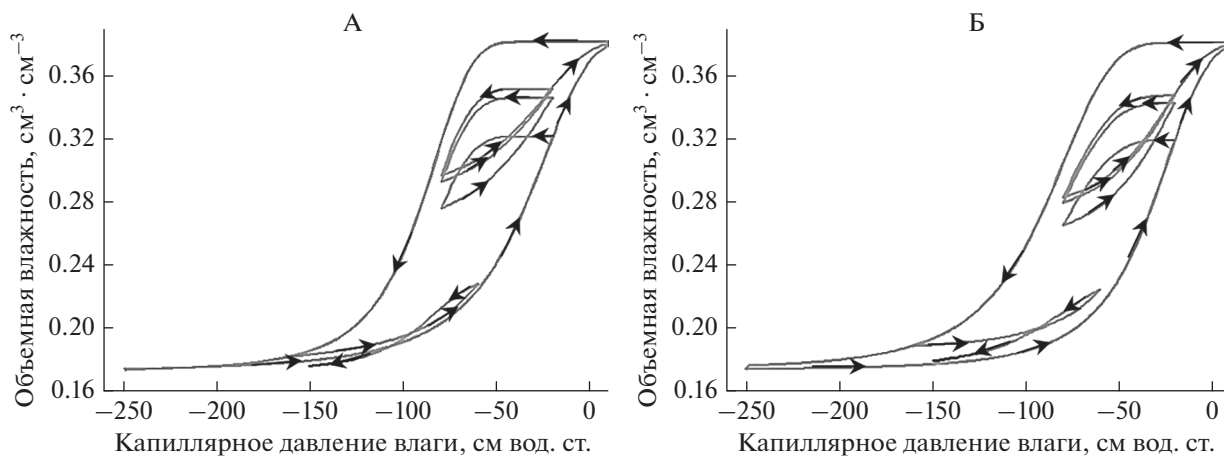


Рис. 1. Осцилляция капиллярного давления влаги в фиксированных диапазонах с использованием Нус-SHT при $n_d \neq n_w$ (А) и $n_d = n_w$ (Б).

ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$. На рис. 2 приведены результаты вычислительного эксперимента по точечной аппроксимации главных ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$ и оцениванию значений $k(S_e)/k_s$, выполненного тремя способами, для каждой из сравниваемых систем гидрофизических функций (при $\psi_e \neq 0$ для систем 2 и 3).

Табл. 2 содержит погрешности точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$, а также погрешности оценок $k(S_e)/k_s$ и сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$.

В дополнительных материалах на рис. S1 в качестве примера представлены результаты вычис-

лительного эксперимента с моделью Нус-SKT по точечной аппроксимации главных ветвей и оцениванию сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$ (сплошные кривые – результаты расчета, круглые точки – данные о водоудерживающей способности почвы). Кроме того, дополнительные материалы содержат результаты выявления достоверных различий между погрешностями сравниваемых систем в отношении: (i) точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$ (табл. 3); (ii) оценок $k(S_e)/k_s$ (табл. 4); (iii) оценок сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$ (табл. 5).

Таблица 2. Корень квадратный из среднего арифметического квадратов отклонений результатов моделирования от опытных данных (RMSE – root mean square error)

Вариант вычислительного эксперимента	$n_d \neq n_w$					$n_d = n_w$				
	системы гидрофизических функций почвы									
	1	2	3	$\Psi_e = 0$		1	2	3	$\Psi_e = 0$	
2				3	2				3	
Идентификация параметров по 74 точкам главных ветвей	0.0117	0.0080	0.0081	0.118	0.0111	0.0204	0.0090	0.0113	0.0185	0.0182
Оценка относительной гидравлической проводимости для 15 точек	0.0262	0.0167	n_d	0.0203	0.0347	0.0396	0.0184	0.0205	0.0200	0.0242
			n_w	0.0245	0.0496					
Оценка сканирующих ветвей увлажнения для 33 точек	0.0154	0.0094	0.0101	0.0164	0.0166	0.0148	0.0057	0.0100	0.0212	0.0194
Оценка сканирующих ветвей иссушения: для 26 точек	0.0255	0.0182	0.0183	0.0267	0.0250	0.0177	0.0181	0.0135	0.0301	0.0284
Оценка всех сканирующих: для 129 точек	0.0205	0.0140	0.0143	0.0216	0.0208	0.0161	0.0127	0.0117	0.0255	0.0238

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено описание зависимостей $S_e(\psi)$ и $k(S_e)/k_s$ в виде трех систем функций. В каждой системе используется соответствующий набор общих параметров. Идентифицированы параметры этих систем путем точечной аппроксимации данных о главных ветвях иссушения и увлажнения гистерезиса водоудерживающей способности почвы. Использованы литературные данные об опесчанном суглинке 3501 Rubicon sandy loam [24, 38]. Выполнено построение петель гистерезиса при осцилляции ψ в заданном диапазоне значений для вариантов $n_d \neq n_w$ и $n_d = n_w$. Осуществлено оценивание значений функции $k(S_e)/k_s$ и сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$ с использованием трех систем функций. Для выявления различий между погрешностями оценок применен критерий Вильямса–Клута.

Из анализа результатов исследования вытекают следующие выводы:

1. В отношении погрешностей точечной аппроксимации данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы:

- в варианте $n_d \neq n_w$ система 1 достоверно уступает системам 2 и 3 в случае использования параметра ψ_e , при этом между системами 2 и 3 нет существенных различий; система 3 достоверно превосходит системы 1 и 2, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$), при этом между системами 1 и 2 нет существенных различий; использование параметра ψ_e достоверно уменьшает погрешности;

- в варианте $n_d = n_w$ система 1 достоверно уступает системам 2 и 3 в случае использования параметра ψ_e , при этом система 2 превосходит систему 3; сравниваемые системы являются неразличимыми, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$); использование параметра ψ_e существенно уменьшает погрешность.

2. В отношении погрешностей оценок относительной гидравлической проводимости почвы:

- между погрешностями оценок, полученных с использованием параметров, идентифицированных по данным только о главной ветви иссушения, и погрешностями оценок, полученных с использованием параметров, идентифицированных по данным только о главной ветви увлажнения, не выявлены достоверные различия ни для одной из систем;

- между погрешностями оценок, полученных с использованием параметров, идентифицированных по данным только о главной ветви иссушения, и погрешностями оценок, полученных с использованием параметров, идентифицированных по данным об обеих главных ветвях, не выявлены достоверные различия ни для одной из систем;

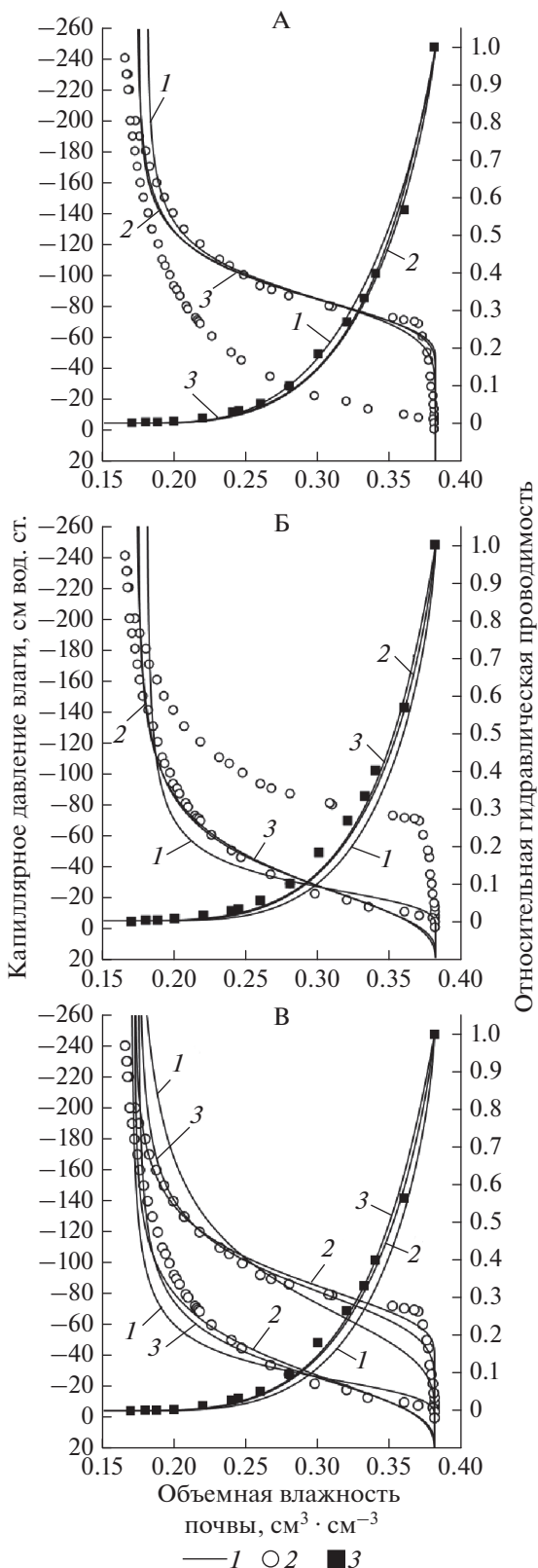


Рис. 2. Точечная аппроксимация данных о главных ветвях $S_e(\psi)$ и оценка значений $k(S_e)/k_s$ с использованием трех систем функций и параметров n_d (А), n_w (Б) и при $n_d = n_w$ (В): 1 – результаты расчета; 2 – данные о водоудерживающей способности, 3 – данные об относительной гидравлической проводимости почвы.

- для систем 1 и 2 оценки, полученные с применением параметров, идентифицированных по данным об обеих главных ветвях, являются более точными по сравнению с оценками, полученными с применением параметров, идентифицированных по данным только о главной ветви увлажнения, если используется параметр ψ_e ; однако между погрешностями полученных таким образом оценок нет достоверных различий, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$);

- в варианте $n_d = n_w$ система 1 достоверно уступает системе 2 в случае использования параметра ψ_e , при этом между системами 1 и 3, а также между системами 2 и 3 нет существенных различий; система 2 достоверно превосходит систему 3, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$), при этом между системами 1 и 2 и между системами 1 и 3 нет существенных различий; использование параметра ψ_e существенно уменьшает погрешности системы 3;

- отсутствие достоверных различий между погрешностями оценок, полученных с использованием параметров, которые идентифицированы тремя способами, свидетельствует о том, что зависимость $k(S_e)/k_s$ не является гистерезисной в отличие от сложной функции $k(S_e(\psi))/k_s$, в которой зависимость $S_e(\psi)$ является гистерезисной;

- погрешности оценок при значениях экспоненциального параметра n систем 2 и 3, превышающих единицу, наряду с погрешностями ранее полученных оценок при значениях этого параметра n систем 2 и 3, которые оказались меньше единицы [9], позволяют утверждать о достоверном преимуществе систем 2 и 3 над системой 1.

3. В отношении погрешностей оценок сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$:

- в варианте $n_d \neq n_w$ система 1 достоверно уступает системам 2 и 3 в случае использования параметра ψ_e , при этом система 2 превосходит систему 3; между системами 1 и 3 нет существенных различий, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$), при этом системы 1 и 3 точнее системы 2; использование параметра ψ_e достоверно уменьшает погрешности;

- в варианте $n_d = n_w$ система 1 достоверно уступает системам 2 и 3 в случае использования параметра ψ_e , при этом система 3 превосходит систему 2; система 1 точнее систем 2 и 3, если параметр ψ_e не применяется (при $\psi_e = 0$), при этом система 3 превосходит систему 2; использование параметра ψ_e достоверно уменьшает погрешности;

- нежелательный искусственный (методический) “эффект помпы” устраняется при выполнении условия $n_d = n_w$, при этом увеличения погрешностей оценок значений функции $k(S_e)/k_s$ не отмечается.

4. Мультипликативный параметр α системы 1 не является величиной, обратной давлению барботирования. Это давление описывается аддитивным параметром ψ_e систем 2 и 3. Использование параметра ψ_e : во-первых, достоверно уменьшает погрешности точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса $S_e(\psi)$, а также погрешности оценок значений функции $k(S_e)/k_s$ и сканирующих ветвей гистерезиса $S_e(\psi)$; во-вторых, позволяет описать феномен гистерезиса во всем диапазоне значений ψ , включая положительную область, в которой, как правило, происходит вытеснение воздуха, защемленного в тупиковых порах, на завершающем этапе насыщения почвы водой и смыкаются главные ветви гистерезиса $S_e(\psi)$.

5. Оценивание значений функции $k(S_e)/k_s$ системы 3 при $\psi_e = 0$ с применением параметров модели, которая предложена в статье [14], идентифицируемых путем точечной аппроксимации данных $\theta(\psi)$, представляет собой математически корректное решение задачи Ван Генухтена в ее исходной постановке [39]. Достоинства систем 2 и 3 позволяют рекомендовать эти системы к применению для моделирования гидрофизических свойств почвы и решения задач ирригационного земледелия. В системе 3 зависимости $S_e(\psi)$ и $k(S_e)/k_s$ сформулированы в достаточно простом виде с использованием элементарных математических функций; при этом во многих случаях погрешности оценок, полученных с применением систем 2 и 3, являются неразличимыми. Поэтому авторы данной статьи отдают предпочтение системе 3 (WRC-НТ, RHC-МТ, Hys-SHT при $n_d = n_w$) с физически интерпретированным аддитивным параметром ψ_e .

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-04-00939-а, 19-016-00148-а.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Рис. S1. Точечная аппроксимация данных о главных ветвях, оценка сканирующих ветвей увлажнения с использованием модели Hys-SKT:

- пяти ветвей увлажнения при $n_d \neq n_w$ (a);
- четырёх ветвей иссушения при $n_d \neq n_w$ (b);
- пяти ветвей увлажнения при $n_d = n_w$ (c);
- четырёх ветвей иссушения при $n_d = n_w$ (d).

Таблица S1. Сравнение погрешностей точечной аппроксимации опытных данных о главных ветвях гистерезиса водоудерживающей способности почвы по критерию Вильямса–Клута для доверительных вероятностей 0.95 и 0.975.

Таблица S2. Сравнение погрешностей оценок носительной гидравлической проводимости почвы по критерию Вильямса—Клута для доверительных вероятностей 0.95 и 0.975.

Таблица S3. Сравнение погрешностей оценок сканирующих ветвей гистерезиса водоудерживающей способности почвы по критерию Вильямса—Клута для доверительных вероятностей 0.95 и 0.975.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронин А.Д.* Основы физики почв. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 244 с.
2. *Глобус А.М.* Почвенно-гидрофизическое обеспечение агроэкологических математических моделей. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 427 с.
3. *Глобус А.М.* Экспериментальная гидрофизика почв. Л.: Гидрометеиздат, 1969. 356 с.
4. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
5. *Нерпин С.В., Чудновский А.Ф.* Физика почв. М.: Наука, 1967. 584 с.
6. *Семенова Н.Н., Терлеев В.В., Сухорученко Г.И., Орлова Е.Е., Орлова Н.Е.* Об одном методе численного решения системы параболических уравнений // Вестник Санкт-Петербургского гос. ун-та. Сер. 1. Математика. 2016. Т. 3(61). Вып. 2. С. 230–240. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.207>
7. *Смагин А.В.* К термодинамической теории водоудерживающей способности и дисперсности почв // Почвоведение. 2018. № 7. С. 836–851. <https://doi.org/10.1134/S0032180X18070092>
8. *Судницын И.И.* Новые методы оценки водно-физических свойств почв и влагообеспеченности леса. М.: Наука, 1966. 95 с.
9. *Терлеев В.В., Мишель В., Баденко В.Л., Гусева И.Ю.* Усовершенствованный метод Муалема-Ван Генухтена и его верификация на примере глинистой почвы Бейт Нетофа // Почвоведение. 2017. № 4. С. 457–467. <https://doi.org/10.7868/S0032180X1704013X>
10. *Шеин Е.В.* Математические физически обоснованные модели в почвоведении: история развития, современное состояние, проблемы и перспективы (аналитический обзор) // Почвоведение. 2015. № 7. С. 816–823. <https://doi.org/10.7868/S0032180X15070096>
11. *Шеин Е.В., Позднякова А.Д., Шваров А.П., Ильин Л.И., Сорокина Н.В.* Гидрофизические свойства высокозольных низинных торфяных почв // Почвоведение. 2018. № 10. С. 1259–1264. <https://doi.org/10.1134/S0032180X18100118>
12. *Faybishenko В.А.* Hydraulic behavior of quasi-saturated soils in the presence of entrapped air: Laboratory experiments // Water Resources Research. 1995. V. 31(10). P. 2421–2435. <https://doi.org/10.1029/95WR01654>
13. *Gonc’alves Roger D., Teramoto Elias H., Engelbrecht Bruno Z., Alfaro Soto Miguel A., Chang Hung K., Van Genuchten Martinus Th.* Quasi-Saturated Layer: Implica-

- tions for Estimating Recharge and Groundwater Modeling // Ground Water. 2020. V. 58(3). P. 432–440. <https://doi.org/10.1111/gwat.12916>
14. *Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J., Vachaud G.* A comparison of numerical simulation model for one-dimensional infiltration // Soil Sci. Soc. Am. J. 1977. V. 41. P. 285–294.
15. *Konyai S., Sriboonlue V., Trelo-Ges V.* The Effect of Air Entry Values on Hysteresis of Water Retention Curve in Saline Soil // Am. J. Environmental Sci. 2009. V. 5(3). P. 341–345. <https://doi.org/10.3844/ajessp.2009.341.345>
16. *Kool J.B., Parker J.C.* Development and evaluation of closed-form expressions for hysteretic soil hydraulic properties // Water Resources Research. 1987. V. 23(1). P. 105–114.
17. *Kosugi K.* General model for unsaturated hydraulic conductivity for soil with lognormal pore-size distribution // Soil Sci. Soc. Am. J. 1999. V. 63. P. 270–277.
18. *Kosugi K.* Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties // Water Resour. Res. 1996. V. 32. P. 2697–2703.
19. *Kosugi K.* Three-parameter lognormal distribution model for soil water retention // Water Resour. Res. 1994. V. 30. P. 891–901.
20. *Kosugi K., Hopmans J.W.* Scaling water retention curves for soils with lognormal pore-size distribution // Soil Sci. Soc. Am. J. 1998. V. 62. P. 1496–1505.
21. *Levenberg K.* A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // Quarterly Appl. Math. 1944. V. 2. P. 164–168.
22. *Mady A.Y., Shein E.* Modelling and validation hysteresis in soil water retention curve using tomography of pore structure // International J. Water. 2018. V. 12(4). P. 370–381. <https://doi.org/10.1504/IJW.2018.095403>
23. *Marquardt D.W.* An algorithm for least-square estimation on non-linear parameters // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1963. V. 11. P. 431–441.
24. *Mualem Y.* A catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils. Research Project 442. Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 1976. 100 p.
25. *Mualem Y.* A conceptual model of hysteresis // Water Resour. Res. 1974. V. 10(3). P. 514–520.
26. *Mualem Y.* A new model for predicting hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res. 1976. V. 12. P. 513–522.
27. *Mualem Y.* Modified approach to capillary hysteresis based on a similarity hypothesis // Water Resour. Res. 1973. V. 9(5). P. 1324–1331.
28. *Mualem Y., Morel-Seytoux H.J.* Analysis of a capillary hysteresis model based on a one-variable distribution function // Water Resour. Res. 1978. V. 4(4). P. 605–610.
29. *Nikonorov A., Terleev V., Pavlov S., Togo I., Volkova Yu., Makarova T., Garmanov V., Shishov D., Mirschel W.* Applying the model of soil hydrophysical properties for arrangements of temporary enclosing structures // Procedia Engineering. 2016. V. 165. P. 1741–1747. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.917>
30. *Poluektov R.A., Terleev V.V.* Crop simulation model of the second and the third productivity levels // Model-

- ling water and nutrient dynamics in soil-crop systems, Springer, Dordrecht, The Netherlands. 2007. P. 75–89. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4479-3_7
31. Rawitz E. The influence of a number of environmental factors on the availability of soil moisture to plants (in Hebrew). Ph. D. thesis, Hebrew Univ., Rehovot, Israel. 1965.
 32. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // J. Appl. Physics. 1931. V. 1(5). P. 318–333.
 33. Scott P.S., Farquhar G.J., Kouwen N. Hysteretic effects on net infiltration. Proceeding of National Conference on Advances in Infiltration, Publication 11–83, American Society of Agricultural Engineers, St. Joseph, Michigan, 1983. P. 163–170.
 34. Terleev V., Nikonorov A., Ginevsky R., Lazarev V., Topaj A., Dunaieva I., Terleeva A. Estimation of precise irrigation rates taking into account the hysteresis of soil water-retention capacity // IOP Conf. Series: Earth Environ. Sci. 2019. V. 403. Article Number 012239. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/403/1/012239>
 35. Terleev V., Nikonorov A., Togo I., Volkova Yu., Garmanov V., Shishov D., Pavlova V., Semenova N., Mirschel W. Modelling the hysteretic water retention capacity of soil for reclamation research as a part of underground development // Procedia Engineering. 2016. V. 165. P. 1776–1783. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.11.922>
 36. Terleev V., Petrovskaia E., Nikonorov A., Badenko V., Volkova Yu., Pavlov S., Semenova N., Moiseev K., Topaj A., Mirschel W. Mathematical modeling the hydrological properties of soil for practical use in the land ecological management // MATEC Web of Conf. 2016. V. 73. Article Number 03001. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20167303001>
 37. Terleev V., Petrovskaia E., Sokolova N., Dashkina A., Guseva I., Badenko V., Volkova Yu., Skvortsova O., Nikonova O., Pavlov S., Nikonorov A., Garmanov V., Mirschel W. Mathematical modeling of hydrophysical properties of soils in engineering and reclamation surveys // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 53. Article Number 01013. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20165301013>
 38. Topp G.C. Soil-water hysteresis measured in a sandy loam and compared with the hysteretic domain model // Soil Sci. Soc. Am. J. 1969. V. 33(5). P. 645–651. <https://doi.org/10.2136/sssaj1969.03615995003300050011x>
 39. Van Genuchten M.Th. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil Sci. Soc. Am. J. 1980. V. 44. P. 892–989.
 40. Vereecken H., Weynants M., Javaux M., Pachepsky Y., Schaap M.G., Van Genuchten M.Th. Using pedotransfer functions to estimate the Van Genuchten-Mualem soil hydraulic properties: A review // Vadose Zone J. 2010. V. 9. P. 795–820.

Functional Description of Water-Retention Capacity and Relative Hydraulic Conductivity of the Soil Taking into Account Hysteresis

V. V. Terleev^{1,*}, R. S. Ginevsky¹, V. A. Lazarev¹, A. G. Topaj², and E. A. Dunaieva³

¹Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia

²LLC “Bureau Hyperborea”, St. Petersburg, 193312 Russia

³Federal State Budget Scientific Institution “Research Institute of Agriculture of Crimea”, Simferopol, 295543 Russia

*e-mail: Vitaly_Terleev@mail.ru

The aim of the study is to model the water-retention capacity and the relative hydraulic conductivity of the soil as a capillary-porous medium, as well as to verify the proposed models in comparison with the most famous world analogues. This aim is achieved by solving the following tasks: 1) describing the hydrophysical properties of the soil in the form of three systems of functions with corresponding sets of common parameters, 2) verification of these systems by evaluating the relative hydraulic conductivity and scanning branches of the water-retention using parameters identified from the literature data on the main branches of the water-retention hysteresis for 3501 Rubicon sandy loam; 3) applying the equality of exponential parameter values in the calculations of the drying and wetting branches of the water-retention hysteresis to eliminate the undesirable artificial “pump effect”; 4) studying the influence of the additive parameter on the errors of the point approximation of the data on the main branches of the water-retention, as well as on the errors of estimating the relative hydraulic conductivity and scanning branches of the water-retention hysteresis; and 5) revealing significant differences between the errors of these estimates according to the Williams-Kloot criterion for choosing the best system of functions. In search of a solution to the problems of precision irrigated farming, such as forecasting the moisture supply of crops and calculating precision irrigation rates, the use of the models proposed by the authors seems to be preferable.

Keywords: mathematical model, point approximation, “pump effect”