ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 55 **2019** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2019 г. **В.В. Прелов**

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ЭНТРОПИИ РЕНЬИ ПРИ СКЛЕИВАНИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ[1]

Рассматривается задача о нахождении экстремальных значений энтропии Реньи дискретной случайной величины при условии, что фиксировано значение α-склеивания этой величины с другой случайной величиной, имеющей заданное распределение вероятностей.

DOI: 10.1134/S0134347519010029

Энтропия Реньи $H_\lambda(P)$ положительного порядка $\lambda \neq 1$ дискретного распределения вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ определяется равенством (см. [1, 2])

$$H_\lambda(P) = \frac{1}{1-\lambda} \ln \sum_{i=1}^{n} p_i^\lambda, \quad \lambda > 0, \quad \lambda \neq 1. \tag{1}$$

Величину $H_\lambda(P)$ называют также энтропией Реньи дискретной случайной величины X с распределением вероятностей P. В случае, когда $P = \{p, 1-p\}$, вместо $H_\lambda(P)$ будем использовать обозначение $h_\lambda(p)$, т.е.

$$h_\lambda(p) = \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[p^\lambda + (1-p)^\lambda \right]. \tag{2}$$

Заметим, что для любого $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и любого $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, справедливы неравенства

$$0 \leqslant H_\lambda(P) \leqslant \ln n \quad \text{и} \quad H_\lambda(P) \to H(P) \quad \text{при} \quad \lambda \to 1,$$

где $H(P) = -\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$ – энтропия Шеннона.

Напомним также, что *α-склеиванием* двух дискретных распределений вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ называется совместное распределение вероятностей P_{XY} случайных величин X и Y со значениями в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, такое что $\Pr\{X = Y\} = \alpha$, а маргинальные распределения, соответствующие этому P_{XY}, равны, соответственно, $P_X = P$ и $P_Y = Q$.

Для фиксированных распределения вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и действительных чисел λ и α, где $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, введем величины

$$H_{\min}(P, \lambda, \alpha) = \inf_Q H_\lambda(Q), \tag{3}$$

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) = \sup_Q H_\lambda(Q), \tag{4}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 19-01-00364).

где нижние и верхние грани в (3), (4) берутся по всевозможным распределениям вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, для которых существует их α-склеивание с распределением P.

Заметим, что аналогичная задача для энтропии Шеннона рассматривалась в [3], а подобная задача для энтропии Шеннона в случае, когда вместо условия существования α-склеивания P и Q вводилось условие на их вариационное расстояние, рассматривалась в [4]. В настоящей статье получены явные формулы для $H_{\min}(P, \lambda, \alpha)$ для всех возможных значений параметров P, λ и α. Для $H_{\max}(P, \lambda, \alpha)$ явные формулы получены лишь для некоторого интервала значений параметра α, а для других интервалов значений α получены лишь некоторые верхние и нижние границы. Сразу заметим, что полученные здесь формулы для $H_{\min}(P, \lambda, \alpha)$ и $H_{\max}(P, \lambda, \alpha)$ вполне аналогичны соответствующим формулам для подобных величин в случае энтропии Шеннона, приведенных в [3], однако доказательство явных формул для $H_{\min}(P, \lambda, \alpha)$ в данной статье существенно отличается (и много проще) доказательств соответствующих формул в [3].

Переходя к формулировке результатов статьи, будем всегда считать, что распределение вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \geqslant 2$, задано, причем вероятности p_i упорядочены по убыванию, так что $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n > 0$.

Предложение 1. *Пусть распределение вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и действительные числа λ, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, и α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, заданы. Тогда*

- *Если $0 \leqslant \alpha \leqslant p_n$, то*

$$H_{\min}(P, \lambda, \alpha) = h_\lambda(p_n - \alpha); \tag{5}$$

- *Если $p_{k+1} < \alpha \leqslant p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то*

$$H_{\min}(P, \lambda, \alpha) = \begin{cases} h_\lambda(\alpha - p_{k+1}), & \text{если } p_{k+1} < \alpha \leqslant \dfrac{p_k + p_{k+1}}{2}, \\ h_\lambda(p_k - \alpha), & \text{если } \dfrac{p_k + p_{k+1}}{2} < \alpha \leqslant p_k; \end{cases} \tag{6}$$

- *Если $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i < \alpha \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k+1} p_i$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то*

$$H_{\min}(P, \lambda, \alpha) = \frac{1}{1-\lambda} \ln\left[(1 + p_1 - \alpha)^\lambda + \sum_{i=2}^{k} p_i^\lambda + (\alpha - \sum_{i=1}^{k} p_i)^\lambda\right]. \tag{7}$$

Доказательство этого предложения основано на использовании понятия выпуклости функций по Шуру. Напомним основные нужные нам определения и факты (см. [5]). Если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, то через $\boldsymbol{x}^\downarrow = (x_1^\downarrow, \ldots, x_n^\downarrow)$ обозначается вектор из $\mathbb{R}^n$, содержащий те же компоненты, что и $\boldsymbol{x}$, но записанные в порядке убывания, так что $x_1^\downarrow \geqslant x_2^\downarrow \geqslant \ldots \geqslant x_n^\downarrow$. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ – два вектора из $\mathbb{R}^n$. Говорят, что вектор $\boldsymbol{x}$ *мажорируется* вектором $\boldsymbol{y}$ (или что $\boldsymbol{y}$ *мажорирует* $\boldsymbol{x}$), и записывают $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$, если выполняются два условия:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^\downarrow \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^\downarrow, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^\downarrow = \sum_{i=1}^{n} y_i^\downarrow. \tag{9}$$

Действительнозначная функция $\varphi(\cdot)$, заданная на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, называется *выпуклой по Шуру*, если из условия $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ на A следует неравенство $\varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi(\boldsymbol{y})$. Если же из условия $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ на A следует $\varphi(\boldsymbol{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{y})$, то функция $\varphi(\cdot)$ называется *вогнутой по Шуру*. Если функция $\varphi(\cdot)$ выпукла по Шуру, то очевидно, что функция $-\varphi(\cdot)$ вогнута по Шуру.

Справедливо также следующее утверждение (см. [5]): если $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, а $g\colon I \to \mathbb{R}$ – выпуклая (в обычном смысле) функция, то $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$ является выпуклой по Шуру функцией на I^n, т.е. $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant \varphi(\boldsymbol{y})$. Из этого утверждения немедленно следует, что энтропия Реньи $H_\lambda(Q)$ при любом $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, является вогнутой по Шуру функцией от распределения вероятностей Q. Поэтому для нахождения $H_{\min}(P, \lambda, \alpha)$ достаточно найти *допустимое* распределение вероятностей $Q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\}$ (т.е. распределение вероятностей, для которого существует α-склеивание с заданным распределением $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$), такое что Q^* мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей Q. Любое допустимое распределение вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ является маргинальным для некоторой *допустимой* матрицы совместного распределения (т.е. матрицы $M = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ с неотрицательными элементами p_{ij}, такими что

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = \alpha,$$

где $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – заданное распределение вероятностей).

Докажем теперь формулы (5)–(7).

1. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant p_n$. Покажем, что в этом случае распределение вероятностей $Q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\}$, задаваемое допустимой матрицей $M^* = \|p_{ij}^*\|_{i,j=1}^n$, где

$$p_{ij}^* = \begin{cases} \alpha & \text{для } i = j = n, \\ p_i & \text{для всех } i \neq n \text{ и } j = n, \\ p_n - \alpha & \text{для } i = n \text{ и } j = j_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{10}$$

где j_0 – любое натуральное число, меньшее n, мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, откуда сразу будет следовать справедливость формулы (5). Для этого, очевидно, достаточно доказать, что для любого допустимого распределения вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ справедливо неравенство

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i \leqslant 1 - p_n + \alpha. \tag{11}$$

Действительно, для любой допустимой матрицы $M = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$ и любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$, имеем

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i\colon i \neq j} p_{ij} + p_{jj} \leqslant 1 - p_j + \alpha \leqslant 1 - p_n + \alpha,$$

откуда и следует (11).

2. Пусть теперь $p_{k+1} < \alpha \leqslant \dfrac{p_k + p_{k+1}}{2}$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае распределение вероятностей $Q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\}$, задаваемое допустимой матрицей $M^* = \|p^*_{ij}\|^n_{i,j=1}$ с элементами

$$p^*_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{для всех } i \neq k+1 \text{ и } j = k+1, \\ p_k + p_{k+1} - \alpha & \text{для } i = k \text{ и } j = k+1, \\ \alpha - p_{k+1} & \text{для } i = j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{12}$$

мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей. Для доказательства этого утверждения заметим вначале, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q^*_i = 1 - \alpha + p_{k+1},$$

поскольку из условия

$$p_{k+1} < \alpha \leqslant \frac{p_k + p_{k+1}}{2}$$

следует, что

$$1 - \alpha + p_{k+1} \geqslant \alpha - p_{k+1}.$$

Поэтому для доказательства того, что указанное выше распределение вероятностей Q^* мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, в рассматриваемом случае (а значит, и для доказательства первой из формул в правой части (6)) достаточно показать, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i \leqslant 1 - \alpha + p_{k+1}. \tag{13}$$

Действительно, для любого допустимого $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, очевидно, имеем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i = \max_{i, x \leqslant \min\{p_i, \alpha\}} (1 - (p_i - x) - (\alpha - x)), \tag{14}$$

если в матрице совместного распределения $M = \|p_{ij}\|^n_{i,j=1}$, задающего это распределение Q, элемент p_{ii} равен x. Оптимизируя правую часть (14) по i и x при заданных ограничениях, легко устанавливаем, что

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i \leqslant 1 - \alpha + p_{k+1},$$

что и доказывает (13).

3. Пусть $\frac{p_k + p_{k+1}}{2} < \alpha \leqslant p_k$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае распределение вероятностей $Q^* = \{q^*_1, q^*_2, \ldots, q^*_n\}$, задаваемое допустимой матрицей $M^* = \|p^*_{ij}\|^n_{i,j=1}$ с элементами

$$p^*_{ij} = \begin{cases} p_i & \text{для всех } i \neq k \text{ и } j = k, \\ p_k - \alpha & \text{для } i = k \text{ и некоторого } j \neq k, \\ \alpha & \text{для } i = j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{15}$$

мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Доказательство этого утверждения вполне аналогично рассмотренному выше случаю 2. Отсюда сразу следует справедливость второй формулы в правой части (6).

4. Пусть, наконец, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i < \alpha \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k+1} p_i$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае снова легко проверить,что распределение вероятностей $Q^* = \{q^*_1, q^*_2, \ldots, q^*_n\}$, где

$$q_i^* = \begin{cases} 1 + p_1 - \alpha & \text{для } i = 1, \\ p_i & \text{для } i = 2, 3, \ldots, k, \\ \alpha - \sum\limits_{s=1}^{k} p_s & \text{для } i = k+1, \\ 0 & \text{для } i = k+2, \ldots, n, \end{cases} \tag{16}$$

задаваемое допустимой матрицей $M^* = \|p_{ij}^*\|_{i,j=1}^n$ с элементами

$$p_{ij}^* = \begin{cases} p_i & \text{для } i = j = 1, 2, \ldots, k, \\ \alpha - \sum\limits_{s=1}^{k} p_s & \text{для } i = j = k+1, \\ \sum\limits_{s=1}^{k+1} p_s - \alpha & \text{для } i = k+1 \text{ и } j = 1, \\ p_i & \text{для } i = k+2, \ldots, n \text{ и } j = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{17}$$

мажорирует любое другое допустимое распределение вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$. Отсюда следует справедливость формулы (7). ▲

С л е д с т в и е. *Пусть $F(P) = F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – любая неотрицательная ограниченная и вогнутая по Шуру функция от распределения вероятностей $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, и пусть*

$$F_{\min}(P, \alpha) = \min_{Q} F(Q), \tag{18}$$

где минимум берется по всевозможным распределениям вероятностей $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, для которых существует их α-склеивание с P. Тогда из доказательства предложения 1 *следует, что оптимальные распределения вероятностей $Q^* = \{q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\}$ (на которых достигается минимум в правой части* (18)*) являются маргинальными для совместных распределений вероятностей* (10), (12), (15) *и* (17) *для соответствующих интервалов значений параметра α. В частности, это утверждение справедливо как для рассмотренного выше случая энтропии Реньи, так и для энтропии Шеннона и "энтропии степени λ"*

$$H^\lambda(P) = (2^{1-\lambda})^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\lambda - 1 \right), \quad \lambda > 0, \quad \lambda \neq 1.$$

Замечание 1. Отметим, что $H_{\min}(P, \lambda, \alpha) \leqslant H_\lambda(P)$ для всех возможных значений $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и α за исключением лишь случая, когда $p_1 > 1/2$ и $p_2 < \alpha < p_1$. В этом последнем случае для некоторых значений p_1, p_2 и α может быть справедливо противоположное неравенство $H_{\min}(P, \lambda, \alpha) > H_\lambda(P)$, например, оно верно, если p_1 достаточно велико, а α близко к $1/2$. Действительно, легко проверить, что во всех случаях (кроме указанного выше, когда $p_1 > 1/2$ и $p_2 < \alpha < p_1$) маргинальные распределения Q^*, задаваемые матрицами совместного распределения (10), (12), (15) и (17) для соответствующих значений параметра α, мажорируют распределение P, откуда и следует, что $H_{\min}(P, \lambda, \alpha) \leqslant H_\lambda(P)$.

В общем случае найти точное значение для $H_{\max}(P, \lambda, \alpha)$ не удается, но в следующем предложении приводятся достаточные условия на параметры P и α, при которых $H_{\max}(P, \lambda, \alpha)$ принимает свое максимальное значение $\log n$, а также приводятся верхние и нижние границы для $H_{\max}(P, \lambda, \alpha)$ при других значениях параметров P и α. В формулировке этого предложения используется функция $f_n(x, \lambda)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, задаваемая равенством

$$f_n(x, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda} \ln \left[x^\lambda + (n-1)^{1-\lambda}(1-x)^\lambda \right]. \tag{19}$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть заданы распределение вероятностей* $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n > 0$, *и величины* λ, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, *и* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

- *Если* $\frac{1}{n} - p_n \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n} + (n-1)p_n$, *то*

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) = \ln n; \tag{20}$$

- *Если* $p_1 > 1 - \frac{1}{n}$ *и* $0 \leqslant \alpha < p_1 + \frac{1}{n} - 1$, *то*

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) \leqslant f_n(a_1, \lambda), \quad \text{где} \quad a_1 = \frac{p_1 - \alpha}{n-1}; \tag{21}$$

- *Если* $1 - \frac{1}{n} + p_n < \alpha \leqslant 1$, *то*

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) \leqslant f_n(a_2, \lambda), \quad \text{где} \quad a_2 = \frac{\alpha - p_n}{n-1}; \tag{22}$$

- *Если* $\frac{1 - p_1 - (n-1)p_n}{n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n} - p_n$, *то*

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) \geqslant f_n(b_1, \lambda), \quad \text{где} \quad b_1 = \alpha + p_n; \tag{23}$$

- *Если* $\frac{1}{n} + (n-1)p_n \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}p_1 + \frac{(n-1)^2}{n}p_n$, *то*

$$H_{\max}(P, \lambda, \alpha) \geqslant f_n(b_2, \lambda), \quad \text{где} \quad b_2 = \alpha - (n-1)p_n. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение этого предложения следует из того, что допустимое совместное распределение, задаваемое матрицей $M = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^n$, где

$$p_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{для } i = j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{p_i - \alpha_i}{n-1} & \text{для } i = 1, \ldots, n \text{ и } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, \end{cases}$$

а параметры α_i, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям $0 \leqslant \alpha_i \leqslant p_i$ и $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = \alpha$, имеет равномерное маргинальное распределение, так как

$$q_i = \sum_{i=1}^n p_{ij} = \frac{1 - p_j - \alpha_i}{n-1} + \frac{n\alpha_j}{n-1} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

если

$$\frac{1}{n} - p_n \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{n} + (n-1)p_n.$$

Доказательство остальных утверждений этого предложения (неравенств (21)–(24)) вполне аналогично доказательству соответствующих неравенств предложения 3 в [3] и поэтому здесь не приводится. ▲

Замечание 2. Нетрудно показать, что при всех возможных значениях P и α справедливо неравенство $H_{\max}(P, \lambda, \alpha) \geqslant H_\lambda(P)$. Действительно, если $\alpha < \frac{1}{n} - p_n$, то допустимое совместное распределение, задаваемое матрицей $\|p_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, где

$$p_{ij}=\begin{cases}\alpha & \text{при } i=j=1,\\ p_1-\alpha & \text{при } i=1 \text{ и } j=n,\\ p_2 & \text{при } i=2 \text{ и } j=n-1,\\ p_i & \text{при } i=k \text{ и } j=k-1 \text{ для } k=3,4,\ldots,n-1,\\ p_n & \text{при } i=n \text{ и } j=1,\\ 0 & \text{при остальных значениях } i \text{ и } j,\end{cases}$$

имеет маргинальное распределение $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ с $q_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$, которое, как легко убедиться, мажорируется распределением P, а значит,

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)\geqslant H_\lambda(Q)\geqslant H_\lambda(P).$$

Если же $\alpha>\frac{1}{n}+(n-1)p_n$, то допустимое совместное распределение, задаваемое матрицей $\|p'_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, где

$$p'_{ij}=\begin{cases}\alpha p_i & \text{при } i=j=1,\ldots,n,\\ \dfrac{(1-\alpha)p_i}{n-1} & \text{при } i=1,\ldots,n \text{ и } j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\},\end{cases}$$

также имеет маргинальное распределение $Q'=\{q'_1,q'_2,\ldots,q'_n\}$ с $q'_j=\sum_{i=1}^{n}p'_{ij}$, которое тоже, как нетрудно убедиться, мажорируется распределением P, и поэтому снова имеем

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)\geqslant H_\lambda(Q')\geqslant H_\lambda(P).$$

Наконец, если $\frac{1}{n}-p_n\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{n}+(n-1)p_n$, то согласно предложению 2 имеем

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)=\ln n\geqslant H_\lambda(P)$$

при любом P.

Пример. Пусть $n=2$ и $P=\{p,1-p\}$, где $p\geqslant 1/2$. В этом случае для $H_{\max}(P,\lambda,\alpha)$ нетрудно получить явные выражения при всех возможных значениях α, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. А именно:

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)=\ln 2,\quad \text{если } p-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}-p, \tag{25}$$

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)=f_{2,}(p-\alpha,\lambda),\quad \text{если } 0\leqslant\alpha<p-\frac{1}{2}, \tag{26}$$

$$H_{\max}(P,\lambda,\alpha)=f_2(\alpha+p-1,\lambda),\quad \text{если } \frac{3}{2}-p<\alpha\leqslant 1, \tag{27}$$

где $f_n(x,\lambda)$ определено в (19). Действительно, формула (25) немедленно следует из (20), а формула (26) – из того, что при $0\leqslant\alpha<p-\frac{1}{2}$ распределение вероятностей $Q=\{1-p+\alpha,p-\alpha\}$, как легко проверить, является допустимым и мажорируется любым другим допустимым распределением. Наконец, формула (27) следует из того, что при $\frac{3}{2}-p<\alpha\leqslant 1$ распределение вероятностей $Q=\{\alpha+p-1,2-\alpha-p\}$ также является допустимым и тоже мажорируется любым другим допустимым распределением вероятностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rényi A.* On Measures of Entropy and Information // Proc. 4th Berkeley Sympos. on Mathematical Statistics and Probability. Berkely, CA, USA. June 20 – July 30, 1960. Berkely: Univ. of California Press, 1961. V. 1. P. 547–561.
2. *Aczél J., Daróczy Z.* On Measures of Information and Their Characterizations. New York: Academic Press, 1975.
3. *Прелов В.В.* Об одной экстремальной задаче для энтропии и вероятности ошибки // Пробл. передачи информ. 2014. Т. 50. № 3. С. 3–18.
4. *Ho S.W., Yeung R.W.* The Interplay between Entropy and Variational Distance // IEEE Trans. Inform. Theory. 2010. V. 56. № 12. P. 5906–5929.
5. *Marshall A.W., Olkin I., Arnold B.C.* Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. New York: Springer, 2011.

Прелов Вячеслав Валерьевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
prelov@iitp.ru

Поступила в редакцию
14.11.2018
После доработки
13.12.2018
Принята к публикации
09.01.2019