ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 55 **2019** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2019 г. **С.Л. Фон, В.Я.Ф. Тань**

СИЛЬНЫЕ ОБРАЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КОДИРОВАНИЯ ДЛЯ СЕТЕЙ ОДНОВРЕМЕННОЙ ПЕРЕДАЧИ СООБЩЕНИЙ С ТОЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ МНОЖЕСТВА РАЗРЕЗА

Рассматривается сеть одновременной передачи сообщений, где каждый узел может посылать сообщения любому другому узлу сети. В условиях дискретной модели без памяти доказывается сильное обращение теоремы кодирования для любой сети, в которой граница множества разреза точна, т.е. достижима. Из этого результата следует, что для любого фиксированного вектора скоростей, находящегося вне области пропускной способности средняя вероятность ошибки декодирования для любой последовательности кодов длины n с данным вектором скоростей должна стремиться к 1 при n, стремящемся к бесконечности. Доказательство основано на методе типов и использует идеи работы Чисара и Кёрнера 1982 г., в которой была полностью охарактеризована функция надежности любого дискретного канала без памяти с обратной связью для скоростей выше пропускной способности. Кроме того, сильное обращение теоремы кодирования обобщается на гауссовскую модель, где каждый узел подчиняется ограничению на мощность почти наверное. Важными следствиями этих результатов являются новые результаты об обращении теоремы кодирования для гауссовского канала множественного доступа с обратной связью, а также для следующих каналов с ретрансляцией в обеих моделях: ухудшенный канал с ретрансляцией, канал с ретрансляцией с ортогональными компонентами на передающем конце и общий канал с ретрансляцией и обратной связью.

DOI: 10.1134/S0134347519010042

§ 1. Введение

Рассматривается сеть одновременной передачи сообщений общего вида, которая может состоять из кратных узлов. Каждый узел может посылать сообщения любому другому узлу сети. В условиях дискретной модели без памяти, где все входные и выходные алфавиты предполагаются конечными, такая сеть называется *дискретной сетью без памяти* (ДСБП) [1, гл. 18]. Известной внешней границей на область пропускной способности ДСБП является *граница множества разреза* (cut-set bound), полученная Эль-Гамалем в [2]. Если ДСБП можно представить в виде транспортной сети на графе, то граница множества разреза сводится к обычной границе максимального потока/минимального разреза, которую можно вычислить по алгоритму Форда – Фалкерсона [3]. Граница множества разреза утверждает, что для любого множества разреза T в сети с узлами, индексированными множеством $\mathcal{I}$, сумма скоростей передачи сообщений по одну сторону от разреза ограничена сверху условной взаимной информацией между входными переменными из T и выходными переменными из $T^c \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I} \setminus T$ относительно входных переменных из T^c. ДСБП является обобщением хорошо изученного дискретного канала с ретрансляцией без памяти (ДКРБП) [4]. Известно [5], что в общем случае граница множества разреза не является точной (достижимой), но является таковой для нескольких классов ДСБП, включая, среди прочих, ухудшенные ДКРБП [4], ухудшенные ДСБП [6, 7], полудетерминированные ДКРБП [8], ДКРБП с ортогональными компонентами на передающем конце [9] и линейные детерминированные многоадресные сети [10].

Возможным недостатком границы множества разреза является тот факт, что она дает только *слабое обращение теоремы кодирования* для сетей с точной границей множества разреза. Слабое обращение теоремы кодирования гарантирует лишь то, что для любой сети с точной границей множества разреза и любого фиксированного вектора скоростей, находящегося вне области пропускной способности, средняя вероятность ошибки декодирования для любой последовательности кодов длины n с данным вектором скоростей отделена от 0 при n, стремящемся к бесконечности. В теории информации также бывает важно установить *сильное обращение теоремы кодирования*, т.е. утверждение о том, что существует строгий фазовый переход минимальной достижимой асимптотической вероятности ошибки между векторами скоростей, лежащими внутри и снаружи области пропускной способности, в следующем смысле: для любого вектора скоростей, лежащего внутри области пропускной способности, найдется последовательность кодов длины n с этими скоростями, для которой асимптотическая вероятность ошибки равна 0, а асимптотическая вероятность ошибки любой последовательности кодов длины n с вектором скоростей, лежащим вне области пропускной способности, равна 1. Контрапозицию сильного обращения теоремы кодирования можно приблизительно сформулировать так: все коды, дающие с ростом длины блока вероятность ошибки не выше допустимого уровня $\varepsilon \in (0, 1)$, т.е. ε-надежные коды, должны иметь векторы скоростей, принадлежащие области пропускной способности. Таким образом, сильное обращение теоремы кодирования устанавливает строгий фазовый переход между достижимыми и недостижимыми скоростями, гарантируя отсутствие компромисса между вероятностью ошибки и скоростью при длине блока, стремящейся к бесконечности. Отсюда возникает задача описания сетей, для которых сильное обращение теоремы кодирования имеет место, и доказательства утверждений типа сильного обращения теоремы кодирования.

1.1. История вопроса. Впервые гипотеза о справедливости сильного обращения теоремы кодирования при наличии точной границы множества разреза была выдвинута в [11] для ДКРБП и в [12] для ДСБП (см. также [13, Приложение C]). К сожалению, как обнаружили авторы настоящей статьи, некоторые шаги доказательств, основанные на методе информационных спектров [14], неполны (см. замечание 2 ниже).

В нашей предыдущей работе [15], мотивированной работой [16], для доказательства сильного обращения теоремы кодирования для определенных классов ДСБП с точной границей множества разреза использовались свойства условного расхождения Реньи. Эти классы включали в себя линейные детерминированные многоадресные сети [10], многоадресные сети одновременной передачи сообщений, состоящие из независимых ДКБП [17] и беспроводные сети со стиранием [18], но не включали следующие сети с точной границей множества разреза: ухудшенные ДКРБП [4], ухудшенные ДСБП [6, 7], полудетерминированные ДКРБП [8] и ДКРБП с ортогональными компонентами на передающем конце [9]. Настоящая статья значительно усиливает предыдущие результаты, поскольку в ней доказывается сильное обращение теоремы кодирования для всех ДСБП с точной границей множества разреза, включая вышеупомянутые четыре сети, не охваченные предыдущей работой. Более подробное обсуждение см. в замечании 4.

Наше обобщение доказательства сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП на гауссовские сети далеко не очевидно, в основном благодаря тому, что доказательство сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП основано на методе типов [19, гл. 2]. Действительно, сильное обращение теоремы кодирования для гауссовских сетей с точной границей множества разреза не выполняется в общем случае, если вместо ограничений на мощность почти наверное используются ограничения на мощность в длительном режиме, как доказано в [20] для гауссовского ухудшенного канала с ретрансляцией и в [21] для гауссовского канала множественного доступа (КМД) с обратной связью. Поскольку в существующей литературе нет окончательных утверждений о сильном обращении теоремы кодирования для гауссовских сетей, актуальна задача получения доказательства сильного обращения теоремы кодирования для гауссовских сетей с точной границей множества разреза при ограничениях на мощность почти наверное.

1.2. Основные результаты. Первый результат настоящей статьи – независимое доказательство сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП с точной границей множества разреза. Более точно, мы доказываем, что для заданной ДСБП множество векторов скоростей, для которых существуют последовательности кодов с асимптотической вероятностью ошибки, равной ε, должно содержаться в области, задаваемой границей множества разреза, при $\varepsilon \in [0, 1)$. Доказательство основано на методе типов [19, гл. 2]. В основе техники доказательства лежат идеи работы [22], в которой была полностью охарактеризована функция надежности любого дискретного канала без памяти (ДКБП) с обратной связью для скоростей выше пропускной способности и показано, что обратная связь не улучшает функцию надежности. Важными следствиями этого результата являются новые сильные обращения теоремы кодирования для ухудшенного ДКРБП [4], общего канала с ретрансляцией (КР) с обратной связью [4], ухудшенной ДСБП [6,7], полудетерминированного ДКРБП [8] и ДКРБП с ортогональными компонентами на передающем конце [9].

Второй результат настоящей статьи – обобщение полученного доказательства сильного обращения теоремы кодирования на гауссовские сети, в которых шумом является аддитивный белый гауссовский шум и каждый узел подчиняется ограничению на мощность почти наверное. Доказательство для гауссовских сетей включает в себя аккуратное обобщение метода типов с дискретных распределений на общие. Более точно, метод типов для ДСБП основан на подсчете, поскольку входной и выходной алфавиты в ДСБП конечны. Напротив того, метод типов для гауссовских сетей основан на аккуратной аппроксимации и квантовании, поскольку входной и выходной алфавиты непрерывны. Подробнее о применяемом квантовании см. в п. 6.2. Имеется еще одно ключевое отличие между доказательствами для ДСБП в § 5 и для гауссовских сетей в § 7: в доказательстве для гауссовских сетей приходится избегать условных типов, которых не удается легко определить, когда корреляцией между входными символами и случайными величинами шума нельзя пренебречь. Вместо этого в определении 15 мы модифицируем наше определение классов совместных типов таким образом, что удается избежать использования условных типов в доказательстве. Доказательство же для ДСБП в § 5, наоборот, в значительной степени опирается на определение условных типов. Важными следствиями этого результата являются новые сильные обращения теоремы кодирования для гауссовского ухудшенного КР [4], общего гауссовского КР с обратной связью [4], гауссовского КР с разделением частот на передающем конце [9] и гауссовского КМД с обратной связью при ограничениях на мощность почти наверное [23][1].

1.3. Структура статьи. Статья организована следующим образом. Используемые в статье обозначения описаны в п. 1.4. В § 2 дается формулировка задачи для ДСБП и ее области пропускной способности при $\varepsilon \in [0, 1)$ и приводится первый основной результат настоящей статьи – сильное обращение теоремы кодирования для ДСБП

[1] Хотя схема достижимости, предложенная в [23], удовлетворяет только ограничениям на мощность в длительном режиме, ее нетрудно видоизменить так, чтобы выполнялись ограничения на мощность почти наверное.

с точной границей множества разреза. В § 3 дается формулировка задачи для гауссовской сети и ее области пропускной способности при $\varepsilon \in [0,1)$ и приводится второй главный результат статьи – сильное обращение теоремы кодирования для гауссовских сетей с точной границей множества разреза. Предварительные сведения, необходимые для доказательства первой теоремы, содержатся в § 4, в том числе хорошо известные результаты, основанные на методе типов. В § 5 дается доказательство первого основного результата. Предварительные сведения, необходимые для доказательства второго результата, содержатся в § 6, где объясняется построение и квантование гауссовских типов. В § 7 приведено доказательство второго основного результата, а в § 8 даны заключительные замечание.

1.4. Обозначения. Множества натуральных, действительных и неотрицательных действительных чисел обозначаются через $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно. Единичная матрица размерности N обозначается через I_N, нулевой вектор длины N – через 0^N, нулевая матрица размера $N_1 \times N_2$ обозначается через $0^{N_1\times N_2}$, а матрица размера $N_1 \times N_2$ из всех единиц – через $1^{N_1\times N_2}$. Для любой вещественной матрицы K через K^t обозначается транспонированная матрица. Для квадратной матрицы K через $|K|$ и $\operatorname{tr}(K)$ обозначаются ее определитель и след соответственно. Если K симметрична, то записи $K \succ 0$ и $K \succeq 0$ означают, что K положительно определена или положительно полуопределена соответственно. Через K^{-1} обозначается обратная матрица для любой обратимой матрицы K. Для двух вещественных матриц A и B одной размерности записи $A < B$, $A \leqslant B$, $A \geqslant B$ и $A = B$ обозначают соответствующие поэлементные соотношения между A и B. По всей статье все логарифмы берутся по основанию e.

Через $\mathbf{P}\{\mathcal{E}\}$ будем обозначать вероятность события $\mathcal{E}$, а через $\mathbf{1}\{\mathcal{E}\}$ – индикаторную функцию $\mathcal{E}$. Все случайные величины обозначаются заглавными буквами (например, X), а их реализации и алфавиты – соответствующими прописными (например, x) и рукописными (например, $\mathcal{X}$) буквами соответственно. Через X^n будем обозначать набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где все компоненты X_k имеют один и тот же алфавит $\mathcal{X}$. Для любых случайных величин X и Y (обе могут быть дискретными, непрерывными, или одна дискретной, а другая непрерывной) через p_X и $p_{Y|X}$ будем обозначать распределение вероятностей X и условное распределение вероятностей Y относительно X соответственно. Через $p_X p_{Y|X}$ обозначается совместное распределение пары (X,Y), т.е. $p_X p_{Y|X}(x,y) = p_X(x)p_{Y|X}(y\,|\,x)$ для любых x и y. Математическое ожидание случайной величины X обозначается через $\mathbf{E}[X]$. Для любой дискретной случайной величины (U,X,Y,Z) с распределением $p_{U,X,Y,Z}$ будем обозначать через $H_{p_{U,X,Y,Z}}(X\,|\,Z)$ или просто $H_{p_{X,Z}}(X\,|\,Z)$ энтропию X при условии Z, а через $I_{p_{U,X,Y,Z}}(X;Y\,|\,Z)$ или просто $I_{p_{X,Y,Z}}(X;Y\,|\,Z)$ – взаимную информацию между X и Y при условии Z. Для любых r_X, $p_{Y|X}$ и $q_{Y|X}$, таких что $r_X p_{Y|X}$ абсолютно непрерывно относительно $r_X q_{Y|X}$, относительная энтропия между $p_{Y|X}$ и $q_{Y|X}$ при условии r_X конечна и обозначается через $D(p_{Y|X}\,\|\,q_{Y|X}\,|\,r_X)$. $\mathcal{L}_1$-расстояние между двумя распределениями p_X и q_X на одном и том же дискретном алфавите $\mathcal{X}$, обозначаемое через $\|p_X - q_X\|_{\mathcal{L}_1}$, определяется как

$$\|p_X - q_X\|_{\mathcal{L}_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x\in\mathcal{X}} |p_X(x) - q_X(x)|.$$

Для N-мерного вещественного гауссовского вектора $\boldsymbol{Z} \stackrel{\text{def}}{=} [Z_1\ Z_2\ \ldots\ Z_N]^t$ со средним $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$ и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ через

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N|\boldsymbol{\Sigma}|}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^t\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})} \tag{1}$$

обозначается соответствующая плотность вероятности.

§ 2. Дискретная сеть без памяти и первый основной результат

Рассматривается сеть общего вида, состоящая из N узлов. Пусть

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, N\}$$

– множество индексов узлов. Эти N узлов обмениваются информацией за n интервалов времени следующим образом. Узел i выбирает сообщение $W_{i,j}$ из алфавита

$$\mathcal{W}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, \lceil e^{nR_{i,j}} \rceil\} \tag{2}$$

согласно равномерному распределению и посылает $W_{i,j}$ узлу j для всех $(i,j) \in \mathcal{I}\times\mathcal{I}$, где $R_{i,j}$ характеризует скорость передачи сообщения $W_{i,j}$ и все сообщения взаимно независимы. Для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и каждого $i \in \mathcal{I}$ в k-м интервале времени узел i передает элемент $X_{i,k} \in \mathcal{X}_i$, зависящий от $\{W_{i,\ell} : \ell \in \mathcal{I}\}$ и Y_i^{k-1}, и получает элемент $Y_{i,k} \in \mathcal{Y}_i$, где $\mathcal{X}_i$ и $\mathcal{Y}_i$ – некоторые алфавиты, возможно, зависящие от i. Получив n символов за n интервалов времени, узел j объявляет $\widehat{W}_{i,j}$ переданным сообщением $W_{i,j}$ на основе $\{W_{j,\ell} : \ell \in \mathcal{I}\}$ и Y_j^n для каждых $(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

Для упрощения обозначений будем использовать следующие соглашения для любого непустого множества $T \subseteq \mathcal{I}$. Для любого случайного вектора

$$[X_1\ X_2\ \ldots\ X_N]^t \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_N$$

пусть

$$\boldsymbol{X} \stackrel{\text{def}}{=} [X_1\ X_2\ \ldots\ X_N]^t$$

обозначает весь вектор целиком,

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{N} \mathcal{X}_i$$

– алфавит вектора $\boldsymbol{X}$,

$$X_T \stackrel{\text{def}}{=} [X_i : i \in T]^t$$

– подвектор вектора $\boldsymbol{X}$, а $\mathcal{X}_T$ – алфавит подвектора X_T. Аналогично для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и любого случайного вектора

$$[X_{1,k}\ X_{2,k}\ \ldots\ X_{N,k}]^t \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_N$$

пусть

$$\boldsymbol{X}_k \stackrel{\text{def}}{=} [X_{1,k}\ X_{2,k}\ \ldots\ X_{N,k}]^t \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$$

обозначает весь вектор целиком, а

$$X_{T,k} \stackrel{\text{def}}{=} [X_{i,k} : i \in T]^t \in \mathcal{X}_T$$

– подвектор вектора $\boldsymbol{X}_k$. Для любых непустых множеств $T_1, T_2 \subseteq \mathcal{I}$ и любого N^2-мерного случайного вектора

$$[W_{1,1}\ W_{1,2}\ \ldots\ W_{N,N}]^t \in \mathcal{W}_{1,1} \times \mathcal{W}_{1,2} \times \ldots \times \mathcal{W}_{N,N}$$

пусть

$$\boldsymbol{W} \stackrel{\text{def}}{=} [W_{1,1}\ W_{1,2}\ \ldots\ W_{N,N}]^t$$

– весь вектор целиком,

$$\boldsymbol{\mathcal{W}} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \mathcal{W}_{i,j}$$

– алфавит вектора $\boldsymbol{W}$,

$$W_{T_1 \times T_2} \stackrel{\text{def}}{=} [W_{i,j} : (i,j) \in T_1 \times T_2]$$

– подвектор вектора $\boldsymbol{W}$, а $\mathcal{W}_{T_1 \times T_2}$ – алфавит подвектора $W_{T_1 \times T_2}$. Следующие шесть определений дают формальное описание ДСБП и ее области пропускной способности.

Определение 1. Дискретная сеть состоит из N конечных входных множеств $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_N$, N конечных выходных множеств $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots, \mathcal{Y}_N$ и матрицы перехода $q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}$. Дискретная сеть обозначается через $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$. Для каждого непустого множества $T \subsetneq \mathcal{I}$ маргинальное распределение $q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}$ определяется как

$$q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c} \,|\, \boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y_T \in \mathcal{Y}_T} q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} \,|\, \boldsymbol{x})$$

для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ и всех $y_{T^c} \in \mathcal{Y}_{T^c}$.

Определение 2. $(n, \boldsymbol{R})$-код, где через $\boldsymbol{R} \stackrel{\text{def}}{=} [R_{1,1}\ R_{1,2}\ \ldots\ R_{N,N}]^t \geqslant 0^{N^2}$ обозначен N^2-мерный вектор скоростей, для n обращений к дискретной сети $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$ состоит из следующих элементов:

1. Множество сообщений $\mathcal{W}_{i,j}$ узла i для каждого $(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ в соответствии с определением в (2). Сообщение $W_{i,j}$ равномерно на $\mathcal{W}_{i,j}$;
2. Кодирующая функция

   $$f_{i,k} \colon \mathcal{W}_{\{i\} \times \mathcal{I}} \times \mathcal{Y}_i^{k-1} \to \mathcal{X}_i$$

   для каждого $i \in \mathcal{I}$ и каждого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где $f_{i,k}$ – кодирующая функция в узле i в k-м интервале времени, такая что[2]

   $$X_{i,k} = f_{i,k}(W_{\{i\} \times \mathcal{I}}, Y_i^{k-1});$$

3. Декодирующая функция

   $$\varphi_i \colon \mathcal{W}_{\{i\} \times \mathcal{I}} \times \mathcal{Y}_i^{n} \to \mathcal{W}_{\mathcal{I} \times \{i\}}$$

   для каждого $i \in \mathcal{I}$, где φ_i – декодирующая функция для $W_{\mathcal{I} \times \{i\}}$ в узле i, такая что

   $$\widehat{W}_{\mathcal{I} \times \{i\}} = \varphi_i(W_{\{i\} \times \mathcal{I}}, Y_i^{n}).$$

Определение 3. Дискретная сеть $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$ с многократным обращением к ней называется *дискретной сетью без памяти* (ДСБП), если для любого $(n, \boldsymbol{R})$-кода выполняется следующее условие:

Пусть $\boldsymbol{U}^{k-1} = (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}^{k-1}, \boldsymbol{Y}^{k-1})$ – набор случайных величин, порожденных до k-го интервала времени. Тогда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и любого множества $T \subsetneq \mathcal{I}$ равенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\boldsymbol{U}^{k-1} = \boldsymbol{u}^{k-1},\ \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k,\ Y_{T^c,k} = y_{T^c,k}\} = \\ &= \mathbf{P}\{\boldsymbol{U}^{k-1} = \boldsymbol{u}^{k-1},\ \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{x}_k\} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c,k} \,|\, \boldsymbol{x}_k) \end{aligned}$$

[2] По определению полагаем, что областью определения функции $f_{i,1}$ является $\mathcal{W}_{\{i\} \times \mathcal{I}} \times \varnothing$.

имеет место для любых $\boldsymbol{u}^{k-1} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^{k-1}$, $\boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{\mathcal{X}}$ и $y_{T^c,k} \in \mathcal{Y}_{T^c}$.

Замечание 1. Определение 3 согласуется с определением ДКБП с обратной связью, данным Мэсси в [24]. Как указано в [24], для определения ДСБП нельзя использовать $\prod\limits_{k=1}^{n} q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k)$ из-за наличия обратной связи, учитываемой кодирующими функциями в определении 2.

Определение 4. Для $(n, \boldsymbol{R})$-кода можно вычислить среднюю вероятность ошибки декодирования

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \{\varphi_i(W_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) \neq W_{\mathcal{I}\times\{i\}}\}\right\}.$$

Тогда $(n, \boldsymbol{R})$-код со средней вероятностью ошибки декодирования не выше ε_n будем называть $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодом.

Определение 5. Вектор скоростей $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}_+^{N^2}$ называется *ε-достижимым*, если существует последовательность $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодов, такая что $\limsup\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$.

Без ограничения общности всюду далее будем полагать, что $R_{i,i} = 0$ для любого $i \in \mathcal{I}$.

Определение 6. Будем называть *ε-областью пропускной способности* ДСБП и обозначать через $\mathcal{C}_\varepsilon$ замыкание множества, состоящего из всех ε-достижимых векторов скоростей $\boldsymbol{R}$ с $R_{i,i} = 0$ для всех $i \in \mathcal{I}$. *Область пропускной способности* определяется как 0-область пропускной способности $\mathcal{C}_0$.

Первым основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Пусть $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}}, q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$ – ДСБП. Определим*

$$\mathcal{R}_{\text{cut-set}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p_{\boldsymbol{X}}} \bigcap_{\substack{T\subseteq\mathcal{I}\\ T\neq\varnothing}} \left\{ \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}_+^{N^2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c} R_{i,j} \leqslant I_{p_{\boldsymbol{X}} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(X_T; Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}), \\ R_{i,i} = 0 \text{ для всех } i \in \mathcal{I} \end{array} \right\}. \qquad (3)$$

Тогда для любого $\varepsilon \in [0,1)$

$$\mathcal{C}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_{\text{cut-set}}. \qquad (4)$$

Замечание 2. Авторы работ [12, 13] выдвинули гипотезу, что сильное обращение теоремы кодирования должно выполняться для ДСБП общего вида с точной границей множества разреза, и для доказательства этого применяли технику информационных спектров. Однако четвертое равенство в цепочке равенств после формулы (C.8) в работе [13] может не выполняться, и тем самым, первый шаг доказательства в [12, раздел IV.B] не завершен. Следовательно, в представленном там доказательстве имеется пробел. Наше доказательство теоремы 1 не использует методы информационных спектров. Вместо этого мы применяем метод типов и устанавливаем сильное обращение теоремы кодирования для ДСБП с точной границей множества разреза.

Замечание 3. Из теоремы 1 видно, что граница множества разреза, указанная в (4), является универсальной внешней границей на $\mathcal{C}_\varepsilon$ для всех $0 \leqslant \varepsilon < 1$, откуда вытекает сильное обращение теоремы кодирования для класса всех ДСБП, у которых границы множества разреза достижимы. Как отмечено в первой части п. 1.2, этот класс включает в себя ухудшенный ДКРБП [4], общий КР с обратной связью [4], ухудшенная ДСБП [6, 7], полудетерминированный ДКРБП [8] и ДКРБП с ортогональными компонентами на передающем конце [9].

Замечание 4. Теорема 1 устанавливает сильное обращение теоремы кодирования для любой ДСБП с точной границей множества разреза при условии *множественной одноадресной передачи*, когда у каждого узла имеется уникальное сообщение для каждого другого узла. Это сильное обращение теоремы кодирования усиливает наш предыдущий результат [15] о сильном обращении теоремы кодирования для некоторых классов ДСБП с точной границей множества разреза при условии *многоадресной передачи*, когда каждый источник передает единственное сообщение, а каждый получатель стремится восстановить сообщения от всех источников. Более точно, наше предыдущее сильное обращение теоремы кодирования применительно к сценарию множественной одноадресной передачи утверждает, что

$$\mathcal{C}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_{\mathrm{out}}$$

для всех $\varepsilon \in [0,1)$, где

$$\mathcal{R}_{\mathrm{out}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{\substack{T \subsetneq \mathcal{I} \\ T \neq \varnothing}} \bigcup_{p_{\boldsymbol{X}}} \left\{ \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}_+^{N^2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{(i,j) \in T \times T^c} R_{i,j} \leqslant I_{p_{\boldsymbol{X}} q_{Y_{T^c} \mid \boldsymbol{X}}}(X_T; Y_{T^c} \mid X_{T^c}), \\ R_{i,i} = 0 \text{ для всех } i \in \mathcal{I} \end{array} \right\}. \qquad (5)$$

Сравнивая (3) и (5), мы видим, что операции объединения и пересечения поменялись местами, и поэтому имеет место включение $\mathcal{R}_{\text{cut-set}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathrm{out}}$, причем для многих классов сетей это включение строгое. Таким образом, теорема 1 значительно сильнее основной теоремы работы [15]. В частности, теорема 1 устанавливает сильное обращение теоремы кодирования для следующих четырех видов сетей: физически ухудшенный ДКРБП, физически ухудшенная ДСБП, полудетерминированный ДКРБП и ДКРБП с ортогональными компонентами на передающем конце. Сильные обращения теоремы кодирования для этих важных видов сетей не были доказаны в [15]. Доказательство теоремы 1 основано на методе типов [19], т.е. абсолютно иное по сравнению с подходом работы [15], основанным на расхождении Реньи. Вызывает интерес (у авторов) задача попробовать доказать теорему 1 с помощью других стандартных техник доказательства сильных обращений теоремы кодирования, таких как подход, основанный на расхождении Реньи [15, 16], метод информационных спектров [14], лемма о раздувании [19, 25] и метод обратных гиперсжимающих отображений [26]. В частности, метод обратных гиперсжимающих отображений кажется наиболее уместным в тех задачах, где области пропускной способности содержат вспомогательные случайные величины, а граница множества разреза их не содержит. Так как лемма о раздувании и метод обратных гиперсжимающих отображений основаны на анализе каналов-произведений $\prod\limits_{k=1}^{N} q_{\boldsymbol{Y} \mid \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k)$, то согласно замечанию 1 их нельзя использовать для доказательства сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП с обратной связью.

Замечание 5. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что для любого фиксированного вектора скоростей $\boldsymbol{R}$, лежащего вне границы множества разреза $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$, средние вероятности правильного декодирования для любой последовательности $(n, \boldsymbol{R})$-кодов стремятся к 0 экспоненциально быстро (о полученной верхней границе на доасимптотическую вероятность правильного декодирования см. формулу (40) в доказательстве). Другими словами, доказано *экспоненциальное сильное обращение теоремы кодирования* для сетей с точной границей множества разреза (см. работы [27, 28], в которых установлено экспоненциальное сильное обращение теоремы кодирования для широковещательных каналов). Точная характеризация экспоненты сильного обращения теоремы кодирования оставлена до последующих работ.

Замечание 6. Доказательство теоремы 1 использует идеи двух работ, основанных на методе типов [19]. Во-первых, в [29] показано, что технику доказательств, используемую для анализа функций надежности ДКБП с обратной связью, можно применить к ДКРБП. Во-вторых, в [22] были полностью описаны функции надежности любого ДКБП с обратной связью при скоростях выше пропускной способности. Эти идеи используются в доказательстве теоремы 1.

П р и м е р 1. Рассмотрим ДКРБП с тремя узлами, где источник, ретранслятор и получатель пронумерованы индексами 1, 2 и 3 соответственно. Источник передает сообщение получателю с помощью ретранслятора, и нас интересует *пропускная способность*, определяемая как

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \max\{R_{1,3} \mid \boldsymbol{R} \in \mathcal{C}_0\}. \tag{6}$$

Пропускная способность ДКРБП в общем случае неизвестна. Однако если существует бесшумный канал обратной связи, передающий Y_3^{k-1} узлу 2 в каждом интервале времени k, то пропускная способность получаемого ДКРБП с обратной связью совпадает с границей множества разреза $\max\{R_{1,3} \mid \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_{\text{cut-set}}\}$ [1, раздел 17.4], что интуитивно ясно, поскольку канал обратной связи превращает ДКРБП в физически ухудшенный ДКРБП. Поэтому из теоремы 1 следует, что ДКРБП с обратной связью к ретранслятору удовлетворяет свойству сильного обращения теоремы кодирования. При этом добавление двух бесшумных каналов обратной связи, по которым Y_2^{k-1} и Y_3^{k-1} передаются узлу 1 в каждом интервале времени k, не приводит к дальнейшему увеличению пропускной способности ДКРБП с обратной связью, и поэтому в этой постановке также выполняется сильное обращение теоремы кодирования.

§ 3. Гауссовская сеть и второй основной результат

В этом параграфе рассматривается гауссовская сеть, устроенная следующим образом. Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и каждого $i \in \mathcal{I}$ узел i передает $X_{i,k} \in \mathbb{R}$, зависящее от $\{W_{i,\ell} : \ell \in \mathcal{I}\}$ и Y_i^{k-1}, и получает

$$Y_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} X_{j,k} + Z_{i,k}$$

в k-м интервале времени, где $g_{ij} \in \mathbb{R}$ описывает постоянный коэффициент усиления канала, связанного с прохождением сигнала от узла j до узла i, а $Z_{i,k}$ – аддитивный гауссовский шум в узле i. Каждый узел $i \in \mathcal{I}$ подчиняется ограничению на мощность почти наверное [1, формула (17.4)]

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}^2 \leqslant P_i\right\} = 1, \tag{7}$$

где $P_i > 0$ – некоторая константа, описывающая допустимую мощность для узла i. Для упрощения изложения обозначим $\boldsymbol{X}_k \stackrel{\text{def}}{=} [X_{1,k}\ X_{2,k}\ \dots\ X_{N,k}]^t$ и $\boldsymbol{Y}_k \stackrel{\text{def}}{=}$ $\stackrel{\text{def}}{=} [Y_{1,k}\ Y_{2,k}\ \dots\ Y_{N,k}]^t$, и пусть $\boldsymbol{G} \stackrel{\text{def}}{=} [g_{ij}]_{(i,j)} \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ – $(N \times N)$-матрица коэффициентов усиления, не зависящая от k. Кроме того, пусть $\boldsymbol{Z}_k \stackrel{\text{def}}{=} [Z_{1,k}\ Z_{2,k}\ \dots\ Z_{N,k}]^t$ – гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma} \succ 0$, где $\boldsymbol{\Sigma}$ характеризует корреляцию между N случайными величинами гауссовского шума. Соотношение между $\boldsymbol{X}_k$ и $\boldsymbol{Y}_k$ можно записать для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{Z}_k. \tag{8}$$

Получив n символов за n интервалов времени, узел j объявляет $\widehat{W}_{i,j}$ полученным сообщением $W_{i,j}$ на основе $\{W_{j,\ell} : \ell \in \mathcal{I}\}$ и Y_j^n для всех $(i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$.

Для упрощения обозначений будем использовать следующее соглашение для любых непустых множеств $T_1, T_2 \subseteq \mathcal{I}$: для $(N\times N)$-матрицы $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]_{(i,j)} \in \mathcal{I}\times\mathcal{I}$ будем обозначать через

$$G_{T_1\times T_2} = [g_{ij}]_{(i,j)\in T_1\times T_2}$$

подматрицу матрицы $\boldsymbol{G}$.

Определение 7. $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$-кодом, где $\boldsymbol{P} \overset{\text{def}}{=} [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]^t > 0^N$ обозначает N-мерный вектор, задающий допустимую мощность, для гауссовской сети называется $(n, \boldsymbol{R})$-код в смысле определения 2 со следующими дополнительными предположениями: $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$, и ограничение на мощность (7) выполнено для любого $i \in \mathcal{I}$.

Определение 8. Гауссовская сеть, обозначаемая через $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{\Sigma})$, задается матрицей коэффициентов усиления $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, вещественной ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma} \succ 0$ размера $N \times N$ и условным распределением $q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}$, где

$$q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{N}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

такими что для любого $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$-кода выполнено следующее условие:

Пусть $\boldsymbol{U}^{k-1} = (\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}^{k-1}, \boldsymbol{Y}^{k-1})$ – набор случайных величин, порожденных до k-го интервала времени. Тогда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и любого $T \subsetneq \mathcal{I}$ имеет место равенство

$$p_{\boldsymbol{U}^{k-1}, \boldsymbol{X}_k, Y_{T^c,k}}(\boldsymbol{u}^{k-1}, \boldsymbol{x}_k, y_{T^c,k}) = p_{\boldsymbol{U}^{k-1}, \boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{u}^{k-1}, \boldsymbol{x}_k) q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k)$$

для всех $\boldsymbol{u}^{k-1}$, $\boldsymbol{x}_k$ и $y_{T^c,k}$, где $q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}$ – маргинальное распределение для $q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}$, определяемое как

$$q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^{|T|}} q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})\, dy_T, & \text{если } T \neq \varnothing, \\ q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x}) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

для всех $\boldsymbol{x}$ и всех y_{T^c}.

Средняя вероятность ошибки декодирования для $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$-кода задается аналогично определению 4. При этом вектор скоростей $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}_+^{N^2}$ называется *ε-достижимым*, если существует последовательность $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_n)$-кодов, для которой $\limsup\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, а *$\varepsilon$-область пропускной способности* гауссовской сети, обозначаемая через $\mathcal{C}_\varepsilon$, – это замыкание множества, состоящего из всех ε-достижимых векторов скоростей. *Область пропускной способности* определяется как 0-область пропускной способности $\mathcal{C}_0$.

Вторым основным результатом настоящей статьи является

Теорема 2. *Пусть $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{\Sigma})$ – гауссовская сеть. Для любой ковариационной матрицы $\boldsymbol{K}$ размера $N \times N$ и любого непустого множества $T \subsetneq \mathcal{I}$ обозначим через $K_{T|T^c}$ условную ковариацию X_T относительно X_{T^c}, когда $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}; 0^N, \boldsymbol{K})$, т.е.*

$$K_{T|T^c} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{E}\big[\mathbf{E}\big[(X_T - \mathbf{E}[X_T\,|\,X_{T^c}])(X_T - \mathbf{E}[X_T\,|\,X_{T^c}])^t\,|\,X_{T^c}\big]\big]. \tag{9}$$

Пусть

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{P}) \overset{\text{def}}{=} \left\{\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{N\times N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{K} \succeq 0, \textit{ где } i\textit{-й диагональный элемент } k_{ii} \textit{ удо-} \\ \textit{влетворяет условию } k_{ii} \leqslant P_i \textit{ для всех } i \in \mathcal{I} \end{array}\right\} \tag{10}$$

– *множество ковариационных матриц, характеризующих корреляцию между передаваемыми символами. Положим*

$$\mathcal{R}_{\text{cut-set}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\boldsymbol{K}\in\mathcal{S}(\boldsymbol{P})} \bigcap_{\substack{T\subseteq\mathcal{I}\\ T\not\equiv\varnothing}} \left\{ \boldsymbol{R}\in\mathbb{R}_+^{N^2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c} R_{i,j} \leqslant \dfrac{1}{2}\log\bigl|I_{|T^c|} + \\ \quad + G_{T^c\times T}K_{T|T^c}G^t_{T^c\times T}(\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\bigr|, \\ R_{i,i}=0 \text{ \textit{для всех} } i\in\mathcal{I} \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Тогда для любого $\varepsilon\in[0,1)$

$$\mathcal{C}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_{\text{cut-set}}. \tag{12}$$

Замечание 7. Из теоремы 2 видно, что граница множества разреза, данная в (12), является универсальной внешней границей на $\mathcal{C}_\varepsilon$ для всех $0\leqslant\varepsilon<1$, откуда вытекает утверждение сильного обращения теоремы кодирования для класса гауссовских сетей, для которых границы множества разреза являются достижимыми при ограничениях на мощность почти наверное (7). Этот класс включает в себя гауссовский ухудшенный канал с ретрансляцией [4], общий гауссовский КР с обратной связью [4], гауссовский КР с частотным разделением на передающем конце [9] и гауссовский КМД с обратной связью.

Замечание 8. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что для любого фиксированного вектора скоростей $\boldsymbol{R}$, лежащего вне границы множества разреза $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$, средние вероятности правильного декодирования для любой последовательности $(n,\boldsymbol{R},\boldsymbol{P})$-кодов стремятся к 0 экспоненциально быстро (о полученной верхней границе на доасимптотическую вероятность правильного декодирования см. формулу (101) в доказательстве). Другими словами, доказано *экспоненциальное сильное обращение теоремы кодирования* (см. [27, 28]) для гауссовских сетей с достижимой границей множества разреза. Точная характеризация экспоненты сильного обращения теоремы кодирования оставлена до последующих работ.

Пример 2. Рассмотрим гауссовский КР с тремя узлами, где источник, ретранслятор и получатель пронумерованы индексами 1, 2 и 3 соответственно. Предположим, что узлы 1 и 2 удовлетворяют условию ограничения на мощность почти наверное (7). Пропускная способность этого гауссовского КР в смысле (6) в общем виде неизвестна. Однако если существует бесшумная линия обратной связи, передающая Y_3^{k-1} узлу 2 на каждом интервале времени k, то пропускная способность полученного гауссовского КР с обратной связью совпадает с границей множества разреза $\max\{R_{1,3}\mid \boldsymbol{R}\in\mathcal{R}_{\text{cut-set}}\}$ [1, раздел 17.4], что интуитивно ясно, поскольку наличие канала обратной связи преобразует гауссовский КР в гауссовский ухудшенный КР. Поэтому из теоремы 2 следует, что гауссовский КР с обратной связью к ретранслятору удовлетворяет свойству сильного обращения теоремы кодирования. При этом добавление двух бесшумных каналов обратной связи, по которым Y_2^{k-1} и Y_3^{k-1} передаются узлу 1 на каждом интервале времени k, не приводит к дальнейшему увеличению пропускной способности ДКРБП с обратной связью, и поэтому в этой постановке также имеет место сильное обращение теоремы кодирования. Однако если ограничения на мощность почти наверное (7) заменить на ограничения на мощность в длительном режиме

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}^2\right] \leqslant P_i, \tag{13}$$

то, как доказано в [20], гауссовский КР уже не будет удовлетворять условию сильного обращения теоремы кодирования.

П р и м е р 3. Рассмотрим гауссовский КМД с обратной связью с двумя источниками, пронумерованными индексами 1 и 2 соответственно, и получателем, имеющим индекс 3. Пусть узлы 1 и 2 удовлетворяют ограничениям на мощность почти наверное (7). Кроме того, существует бесшумная линия обратной связи, по которой Y^{k-1} предается обоим узлам 1 и 2 в каждом интервале времени k. Нас интересует *область пропускной способности*, определяемая как

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{(R_{1,3}, R_{2,3}) \mid \boldsymbol{R} \in \mathcal{C}_0\}.$$

Хотя предложенная в [23] схема достижимости, позволяющая достичь границы множества разреза $\{(R_{1,3}, R_{2,3}) \mid \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_{\text{cut-set}}\}$, удовлетворяет лишь ограничению на мощность в длительном режиме (13), ее нетрудно модифицировать так, чтобы выполнялись ограничения на мощность почти наверное (7). Тем самым, область пропускной способности этого гауссовского КМД с обратной связью совпадает с границей множества разреза. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что гауссовский КМД с обратной связью удовлетворяет условию сильного обращения теоремы кодирования. Однако если ограничения на мощность почти наверное (7) заменить на ограничения на мощность в длительном режиме (13), то, как доказано в [21], гауссовский КМД с обратной связью уже не будет удовлетворять свойству сильного обращения теоремы кодирования.

§ 4. Предварительные сведения для доказательства теоремы 1: метод типов

Перечислим стандартные определения и результаты [19, гл. 2]. *Типом* последовательности $x^n \in \mathcal{X}^n$, который обозначается через $\varphi_X^{[x^n]}$, называется эмпирическое распределение выборки x^n, т.е.

$$\varphi_X^{[x^n]}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(a\,|\,x^n)}{n}$$

для всех $a \in \mathcal{X}$, где через $N(a\,|\,x^n)$ обозначено число появлений символа a в x^n. Множество всех возможных типов последовательностей из $\mathcal{X}^n$ обозначается через

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_X^{[x^n]} \mid x^n \in \mathcal{X}^n\}.$$

Аналогично, множество всех возможных типов последовательностей из $\mathcal{Y}^n$ при условии типа $r_X \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ обозначается через

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{Y}\,|\,r_X) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ s_{Y|X} \,\Big|\, \text{существует пара } (x^n, y^n), \text{ такая что } \varphi_X^{[x^n]} = r_X \text{ и } \varphi_{X,Y}^{[(x^n,y^n)]} = r_X s_{Y|X} \Big\}.$$

Для заданного типа $r_X \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$ его *классом* называется

$$\mathcal{T}_{r_X}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x^n \in \mathcal{X}^n \mid \varphi_X^{[x^n]} = r_X\}.$$

Хорошо известна граница для числа типов

$$|\mathcal{P}_n(\mathcal{X})| \leqslant (n+1)^{|\mathcal{X}|}. \tag{14}$$

Мы будем часто использовать без явного объяснения следующий факт: для любого $r_X \in \mathcal{P}_n(\mathcal{X})$, любого $s_{Y|X} \in \mathcal{P}_n(\mathcal{Y}\,|\,r_X)$ и любой матрицы перехода $q_{Y|X}$ справедливо следующее равенство для всех $(x^n, y^n) \in \mathcal{T}^{(n)}_{r_X s_{Y\,|\,X}}$:

$$\prod_{k=1}^{n} q_{Y\,|\,X}(y_k\,|\,x_k) = \prod_{x,y} q_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)^{nr_X(x)s_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)} =$$
$$= e^{-n\left(H_{r_X s_{Y\,|\,X}}(Y\,|\,X) + D(s_{Y\,|\,X}\,\|\,q_{Y\,|\,X}\,|\,r_X)\right)}.$$

§ 5. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе будет показано, что

$$\mathcal{C}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_{\text{cut-set}} \tag{15}$$

для всех $\varepsilon \in [0,1)$, где $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ определено в (3). Достаточно показать, что для любого $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ и любой последовательности $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодов выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1. \tag{16}$$

Для доказательства зафиксируем вектор скоростей $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ и последовательность $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодов.

5.1. Связь $\boldsymbol{R}$ с границей множества разреза. Так как $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$, а область $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ замкнута, всегда найдется положительное число δ, такое что для любого распределения $r_{\boldsymbol{X}}$ на $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ существует непустое множество $V_{r_{\boldsymbol{X}}} \subsetneq \mathcal{I}$, для которого

$$\sum_{(i,j)\in V_r\times V_r^c} R_{i,j} \geqslant I_{r_{\boldsymbol{X}} q_{Y_{V_r^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c}\,|\,X_{V_r^c}) + \delta, \tag{17}$$

где сокращенная запись V_r используется для обозначения $V_{r_{\boldsymbol{X}}}$.

5.2. Упрощение вероятности правильного декодирования с учетом дискретности и отсутствия памяти. Зафиксируем натуральное n, и пусть $p_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n,\widehat{\boldsymbol{W}}}$ – распределение вероятностей, индуцированное $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодом. Если не будет оговорено противное, всюду далее в этом доказательстве всегда полагаем, что вероятности вычисляются в соответствии с $p_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n,\widehat{\boldsymbol{W}}}$. Рассмотрим вероятность правильного декодирования

$$1 - \varepsilon_n = \frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|} \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\} \;\Big|\; \boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\Big\}. \tag{18}$$

Чтобы упростить правую часть равенства (18), для каждого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ запишем

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\} \;\Big|\; \boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\Big\} =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}^n\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n} p_{\boldsymbol{Y}^n\,|\,\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}^n) \times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\}\Big\} =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}^n\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{Y}^{k-1}, W_{\{i\}\times\mathcal{I}} = w_{\{i\}\times\mathcal{I}}}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{y}^{k-1}) \times$$
$$\times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\}\Big\} \overset{\text{(a)}}{=}$$

$$\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{\boldsymbol{y}^n \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^n} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k \,|\, \boldsymbol{X}_k}\big(\boldsymbol{y}_k \,|\, (f_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}) : \, i \in \mathcal{I})\big) \times$$

$$\times\, \mathbf{1}\bigg\{ \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \big\{ \varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}} \big\} \bigg\}, \tag{19}$$

где (a) вытекает из следующего равенства, справедливого для всех $\boldsymbol{y}^n \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^n$ и всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ согласно определению кода (определение 2), а также свойствам дискретности и отсутствия памяти сети, вытекающим из определения 3:

$$p_{\boldsymbol{Y}_k \,|\, \boldsymbol{Y}^{k-1}, W_{\{i\}\times\mathcal{I}} = w_{\{i\}\times\mathcal{I}}}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{y}^{k-1}) =$$
$$= p_{\boldsymbol{Y}_k \,|\, \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{Y}^{k-1}, W_{\{i\}\times\mathcal{I}} = w_{\{i\}\times\mathcal{I}}}\big(\boldsymbol{y}_k \,|\, (f_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}) : \, i \in \mathcal{I}), \boldsymbol{y}^{k-1}\big) =$$
$$= p_{\boldsymbol{Y}_k \,|\, \boldsymbol{X}_k}\big(\boldsymbol{y}_k \,|\, (f_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}) : \, i \in \mathcal{I})\big).$$

Чтобы упростить обозначения, для любого $T \subsetneq \mathcal{I}$: $\widehat{w}_{\mathcal{I}\times\{i\}} \overset{\text{def}}{=} \varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^n)$, $\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c} \overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=} (\widehat{w}_{\mathcal{I}\times\{i\}} : \, i \in T^c)$, $\widehat{\boldsymbol{w}} \overset{\text{def}}{=} \widehat{w}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$, положим

$$x_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}) \overset{\text{def}}{=} f_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}),$$
$$x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c}^{k-1}) \overset{\text{def}}{=} \big(x_{i,k}(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, y_i^{k-1}) : \, i \in T^c\big),$$
$$\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1}) \overset{\text{def}}{=} x_{\mathcal{I},k}(w_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, y_{\mathcal{I}}^{k-1}),$$
$$x_{T^c}^n(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c}^{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \big(x_{T^c,1}(w_{T^c\times\mathcal{I}}), x_{T^c,2}(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c,1}), \ldots, x_{T^c,n}(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c}^{n-1})\big)$$

и

$$\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \big(\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{x}_2(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}_1), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{n-1})\big).$$

Перепишем (19) в виде

$$\mathbf{P}\bigg\{ \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \big\{ \varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}} \big\} \;\bigg|\; \boldsymbol{W} = \boldsymbol{w} \bigg\} =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{y}^n \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^n} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k \,|\, \boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\}. \tag{20}$$

5.3. Дальнейшее упрощение вероятности правильного декодирования с помощью метода типов. Для любого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$, любого типа $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и любого условного типа $s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}})$ определим

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r_{\boldsymbol{X}}, s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}) \overset{\text{def}}{=} \big\{ \boldsymbol{y}^n \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^n \mid (\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{n-1}), \boldsymbol{y}^n) \in \mathcal{T}^{(n)}_{r_{\boldsymbol{X}} s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}} \big\}, \tag{21}$$

и для любого непустого $T \subsetneq \mathcal{I}$ и любого $w_{T^c\times\mathcal{I}} \in \mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$ положим

$$\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}}; r_{\boldsymbol{X}}, s_{Y_{T^c}|\boldsymbol{X}}) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \left\{ y_{T^c}^n \in \mathcal{Y}_{T^c}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \big(x_{T^c}^n(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c}^n), y_{T^c}^n\big) \in \mathcal{T}^{(n)}_{u_{X_{T^c}, Y_{T^c}}}, \text{ где} \\ u_{X_{T^c}, Y_{T^c}} - \text{маргинальный тип } r_{\boldsymbol{X}} s_{Y_{T^c}|\boldsymbol{X}}, \\ \text{ограниченный на } (X_{T^c}, Y_{T^c}) \end{array} \right\}. \tag{22}$$

Заметим, что множество $\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r_{\boldsymbol{X}}, s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$ в (21) играет также ключевую роль в доказательстве верхней границы на функции надежности ДКРБП в работе [29]. Продолжая равенство (20) и используя краткое обозначение $\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s)$ для множества (21), поскольку множества из набора

$$\left\{\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s) \mid r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}}),\ s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})\right\}$$

образуют разбиение на $\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n$, такое что

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}^n = \bigcup_{r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \ \bigcup_{s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})} \mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r_{\boldsymbol{X}}, s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$$

и

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r_{\boldsymbol{X}}, s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}) \cap \mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r'_{\boldsymbol{X}}, s'_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}) = \varnothing$$

для любого $(r_{\boldsymbol{X}}, s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}) \neq (r'_{\boldsymbol{X}}, s'_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}})$, получаем

$$\sum_{\boldsymbol{y}^n \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^n} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\} =$$

$$= \sum_{r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \ \sum_{s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})} \ \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n \in \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s)}} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\}. \quad (23)$$

5.4. Оценка вероятности правильного декодирования через $\mathcal{F}_T(w_{T^c \times \mathcal{I}}; r, s)$. Зафиксируем произвольное непустое $T \subsetneq \mathcal{I}$. Для упрощения обозначений положим

$$a_T(r, s) \stackrel{\text{def}}{=} H_{r_{\boldsymbol{X}} s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}) + D(s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}}). \quad (24)$$

Чтобы упростить правую часть равенства (23), рассмотрим самую внутреннюю сумму в этом равенстве. В частности, рассмотрим следующую цепочку для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ и $\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s)$:

$$\prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k, Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1}), y_{T^c,k}) \stackrel{\text{(b)}}{=}$$

$$\stackrel{\text{(b)}}{=} \left(\prod_{\boldsymbol{x}, y_{T^c}} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{x})^{n r(\boldsymbol{x}) s(y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{x})}\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k, Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1}), y_{T^c,k})\right) \stackrel{(24)}{=}$$

$$\stackrel{(24)}{=} e^{-n a_T(r, s)} \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k, Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1}), y_{T^c,k}) \quad (25)$$

где равенство (b) вытекает из определения 3 и того факта, что $\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s)$ (см. определение множества $\mathcal{A}(\boldsymbol{w}; r, s)$ в (21)). Продолжая (23) и вводя обозначение $\mathcal{F}_T(w_{T^c \times \mathcal{I}}; r, s)$ для множества, определенного в (22), рассмотрим следующую цепочку неравенств для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}\} \overset{(25)}{=} e^{-na_T(r,s)} \times\\
&\times \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}} \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k,Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}),y_{T^c,k}) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}\} \overset{\text{(c)}}{\leqslant}\\
&\overset{\text{(c)}}{\leqslant} e^{-na_T(r,s)} \times\\
&\times \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{\substack{y_{T^c}^n\in\\ \mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)}} \sum_{y_T^n\in\mathcal{Y}_T^n} \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k,Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}),y_{T^c,k}) \times\\
&\times \mathbf{1}\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}=w_{\mathcal{I}\times T^c}\} \overset{\text{(d)}}{=}\\
&\overset{\text{(d)}}{=} e^{-na_T(r,s)} \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{y_{T^c}^n\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)} \mathbf{1}\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}=w_{\mathcal{I}\times T^c}\} = e^{-na_T(r,s)} \times\\
&\times \sum_{w_{(T\times T^c)^c}\in\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}} \sum_{y_{T^c}^n\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)} \sum_{w_{T\times T^c}\in\mathcal{W}_{T\times T^c}} \mathbf{1}\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}=w_{\mathcal{I}\times T^c}\} \overset{\text{(e)}}{\leqslant}\\
&\overset{\text{(e)}}{\leqslant} e^{-na_T(r,s)} \sum_{w_{(T\times T^c)^c}\in\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}} \sum_{y_{T^c}^n\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)} 1 =\\
&= e^{-na_T(r,s)} \sum_{w_{(T\times T^c)^c}\in\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}} |\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)|,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где

(c) следует из определений множеств $\mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)$ и $\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)$ в (21) и (22) соответственно;

(d) следует из того, что $\mathbf{1}\left\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}=w_{\mathcal{I}\times T^c}\right\}$ является функцией от $(\boldsymbol{w},y_{T^c}^n)$;

(e) вытекает из следующего неравенства, справедливого благодаря тому, что $\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}$ является функцией $(w_{(T\times T^c)^c},y_{T^c}^n)$:

$$
\sum_{w_{T\times T^c}\in\mathcal{W}_{T\times T^c}} \mathbf{1}\left\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times T^c}=w_{\mathcal{I}\times T^c}\right\} \leqslant 1
$$

для любого $(w_{(T\times T^c)^c},y_{T^c}^n)\in\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}\times\mathcal{Y}_{T^c}^n$.

5.5. Оценка мощности множества $\boldsymbol{\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)}$. Для любых $r_{\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$, обозначим через $u_{X_{T^c},Y_{T^c}}$ маргинальный тип, индуцированный распределением $r_{\boldsymbol{X}}s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}$, и выведем следующую верхнюю границу на величину $|\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)|$. Для любых $r_{\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ и $w_{T^c\times\mathcal{I}}\in\mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$, поскольку

$$
\sum_{y_{T^c}^n\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)} \prod_{k=1}^{n} u_{Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}}(y_{T^c,k}\,|\,x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1})) \leqslant 1,
$$

то получаем

$$\sum_{y^n_{T^c}\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)}\prod_{x_{T^c},y_{T^c}} u_{Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}}(y_{T^c}\,|\,x_{T^c})^{nu_{X_{T^c},Y_{T^c}}(x_{T^c},y_{T^c})}\leqslant 1$$

(см. определение множества $\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)$ в (22)), откуда следует, что

$$\sum_{y^n_{T^c}\in\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)} e^{-nH_{u_{X_{T^c},Y_{T^c}}}(Y_{T^c}\,|\,X_{T^c})}\leqslant 1,$$

из чего, в свою очередь, вытекает, что

$$|\mathcal{F}_T(w_{T^c\times\mathcal{I}};r,s)|\leqslant e^{nH_{u_{X_{T^c},Y_{T^c}}}(Y_{T^c}\,|\,X_{T^c})}=e^{nH_{r_{\boldsymbol{X}}s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(Y_{T^c}\,|\,X_{T^c})}. \tag{27}$$

Объединяя (26), (24) и (27) и используя тот факт, что в силу (24) справедлива оценка

$$\frac{|\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}|}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}=\frac{1}{\prod\limits_{(i,j)\in T\times T^c}\lceil e^{nR_{i,j}}\rceil}\leqslant e^{-n\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c}R_{i,j}},$$

для любых $r_{\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}}\prod_{k=1}^{n}p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\times\mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}\}\leqslant\\ &\leqslant e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c}R_{i,j}-I_{r_{\boldsymbol{X}}s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(X_T;Y_{T^c}\,|\,X_{T^c})+D(s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}\,\|\,q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})\right)}.\end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, что неравенство (28) напоминает формулу (5) в [22], полученную при доказательстве оценки для функций надежности ДКБП с обратной связью.

5.6. Оценка вероятности правильного декодирования через $\boldsymbol{\mathcal{A}(w;r,s)}$. Теперь оценим другим способом левую часть неравенства (28) для любых $r_{\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}}\prod_{k=1}^{n}p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\times\mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{w}\}\leqslant\\ &\leqslant\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}}\prod_{k=1}^{n}p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\overset{\text{(f)}}{=}\\ &\overset{\text{(f)}}{=}\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n\in\\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}}\prod_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})^{nr(\boldsymbol{x})s(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})}=\\ &=\frac{e^{-n\left(H_{r_{\boldsymbol{X}}s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X})+D(s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,\|\,q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})\right)}}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}|\mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)|\end{aligned} \tag{29}$$

где равенство (f) следует из определения множества $\mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)$, данного в (21), и определения 3.

5.7. Оценка мощности множества $\boldsymbol{\mathcal{A}(w;r,s)}$. Для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$, $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in$ $\in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ и $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$, поскольку

$$\sum_{\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)} \prod_{k=1}^{n} s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \leqslant 1,$$

то

$$\sum_{\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)} \prod_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})^{nr(\boldsymbol{x})s(\boldsymbol{y}\,|\,\boldsymbol{x})} \leqslant 1$$

(см. определение множества $\mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)$ в (21)), откуда получаем

$$\sum_{\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)} e^{-nH_{r_{\boldsymbol{X}}s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X})} \leqslant 1,$$

из чего, в свою очередь, следует, что

$$|\mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)| \leqslant e^{nH_{r_{\boldsymbol{X}}s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}}(\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X})}. \tag{30}$$

Объединяя (29) и (30), получаем, что для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|} \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n \in \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\} \leqslant \\ &\leqslant e^{-nD(s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,\|\,q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})}. \end{aligned} \tag{31}$$

5.8. Связь оценок вероятности правильного декодирования с границей множества разреза. Вводя обозначения

$$\alpha_T(r,s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c} R_{i,j} - I_{r_{\boldsymbol{X}}s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}}(X_T;Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}) + D(s_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}\,\|\,q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})\right)} \tag{32}$$

и

$$\beta(r,s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-nD(s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,\|\,q_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})}, \tag{33}$$

из (28) и (31) получаем, что для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|} \sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \sum_{\substack{\boldsymbol{y}^n \in \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{w};r,s)}} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\{\widehat{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}\} \leqslant \\ &\leqslant \min\{\alpha_T(r,s), \beta(r,s)\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Объединяя(18), (20), (23) и используя тот факт, что оценка (34) справедлива для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})$ и произвольного непустого $T \subsetneq \mathcal{I}$, заключаем, что

$$1 - \varepsilon_n \leqslant \sum_{r_{\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \sum_{s_{\boldsymbol{Y}\,|\,\boldsymbol{X}}\in\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}\,|\,r_{\boldsymbol{X}})} \min\{\alpha_{V_r}(r,s), \beta(r,s)\}, \tag{35}$$

где множество $V_r \subseteq \mathcal{I}$ следует аккуратно выбрать в зависимости от $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ таким образом, чтобы выполнялось условие (17). Отметим, что неравенство (35) напоминает формулу (7) в [22]. Пусть $\xi > 0$ – положительная константа, значение который будет выбрано позже. Тогда из (35) вытекает, что

$$1 - \varepsilon_n \leqslant \sum_{r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})} \sum_{s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}} | r_{\boldsymbol{X}})} \min\{\alpha_{V_r}(r,s), \beta(r,s)\} \times$$
$$\times \left(\mathbf{1}\left\{D(s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}}) \geqslant \xi\right\} + \mathbf{1}\left\{D(s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}}) < \xi\right\}\right). \tag{36}$$

5.9. Оценивание вероятности правильного декодирования двумя способами. Учитывая, что $\delta > 0$ было выбрано таким образом, чтобы выполнялось условие (17), выберем теперь значение константы $\xi > 0$ таким образом, чтобы для всех непустых $T \subsetneq \mathcal{I}$ было выполнено следующее условие:

$$|I_{g_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}}(X_T; Y_{T^c} \,|\, X_{T^c}) - I_{h_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}}(X_T; Y_{T^c} \,|\, X_{T^c})| \leqslant \delta/2 \tag{37}$$

для всех распределений $g_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}$ и $h_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}$ на $(\boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\mathcal{Y}})$, таких что

$$\|g_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} - h_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}\|_{\mathcal{L}_1} \leqslant \sqrt{2\xi}.$$

Существование такой константы $\xi > 0$ вытекает из того факта, что отображение $p_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} \mapsto I_{p_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}}(X_T; Y_{T^c} \,|\, X_{T^c})$ непрерывно относительно $\mathcal{L}_1$-метрики для всех непустых $T \subsetneq \mathcal{I}$. Продолжая неравенство (36), рассмотрим следующие две цепочки неравенств для любых $r_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ и $s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \in \mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}})$:

$$\min\{\alpha_{V_r}(r,s), \beta(r,s)\} \times \mathbf{1}\left\{D(s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}}) \geqslant \xi\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \beta(r,s) \times \mathbf{1}\left\{D(s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}}) \geqslant \xi\right\} \overset{(33)}{\leqslant} e^{-n\xi} \tag{38}$$

и

$$\min\{\alpha_{V_r}(r,s), \beta(r,s)\} \times \mathbf{1}\{D(s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,\|\, q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} \,|\, r_{\boldsymbol{X}}) < \xi\} \overset{(g)}{\leqslant}$$
$$\overset{(g)}{\leqslant} \alpha_{V_r}(r,s) \times \mathbf{1}\left\{\|r_{\boldsymbol{X}} s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}} - r_{\boldsymbol{X}} q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}\|_{\mathcal{L}_1} < \sqrt{2\xi}\right\} \overset{(37)}{\leqslant}$$
$$\overset{(37)}{\leqslant} \alpha_{V_r}(r,s) \times \mathbf{1}\left\{|I_{r_{\boldsymbol{X}} s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} \,|\, X_{V_r^c}) -\right.$$
$$\left. - I_{r_{\boldsymbol{X}} q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} \,|\, X_{V_r^c})| \leqslant \delta/2\right\} \overset{(32)}{\leqslant}$$
$$\overset{(32)}{\leqslant} e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j) \in V_r \times V_r^c} R_{i,j} - I_{r_{\boldsymbol{X}} s_{Y_{V_r^c}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} | X_{V_r^c})\right)} \times$$
$$\times \mathbf{1}\left\{|I_{r_{\boldsymbol{X}} s_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} \,|\, X_{V_r^c}) - I_{r_{\boldsymbol{X}} q_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} \,|\, X_{V_r^c})| \leqslant \delta/2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j) \in V_r \times V_r^c} R_{i,j} - I_{r_{\boldsymbol{X}} q_{Y_{V_r^c}|\boldsymbol{X}}}(X_{V_r}; Y_{V_r^c} | X_{V_r^c}) - \delta/2\right)} \overset{(17)}{\leqslant} e^{-n\delta/2}, \tag{39}$$

где (g) следует из неравенства Пинскера. Объединяя (36), (38), (39) и пользуясь тем, что в силу (14) справедлива оценка

$$|\mathcal{P}_n(\boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}})| \leqslant (n+1)^{|\boldsymbol{\mathcal{X}}||\boldsymbol{\mathcal{Y}}|},$$

получаем

$$1 - \varepsilon_n \leqslant (n+1)^{|\boldsymbol{\mathcal{X}}||\boldsymbol{\mathcal{Y}}|} e^{-n \min\{\xi, \delta/2\}} \tag{40}$$

(аналогично последнему неравенству в [22]), откуда следует (16), поскольку $|\boldsymbol{\mathcal{X}}||\boldsymbol{\mathcal{Y}}|$, ξ и δ – положительные константы, не зависящие от n. Так как равенство (16) выполнено для любой последовательности $(n, \boldsymbol{R}, \varepsilon_n)$-кодов, таких что $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$, то включение (15) справедливо для всех $\varepsilon \in [0,1)$.

§ 6. Предварительные сведения для доказательства теоремы 2: гауссовские типы

В этом параграфе мы обобщаем определения и результаты метода типов [19, гл. 2] на гауссовский случай, опираясь на идеи предшествующих обобщений на гауссовский случай для двух переменных в задаче угадывания [30, раздел VI] и трех переменных в задаче кодирования источников [31, Приложение D]. Более точно, мы обобщаем метод типов на случай многих переменных, что позволит исследовать задачу кодирования каналов для любой гауссовской сети. Всюду далее в этом параграфе через n обозначается произвольное натуральное число, а через T, T_1 и T_2 – произвольные непустые подмножества множества $\mathcal{I}$.

6.1. Гауссовские типы.

Определение 9. *Эмпирической корреляцией* между двумя последовательностями векторов-столбцов $x_T^n \in \mathbb{R}^{n|T|}$ и $y_T^n \in \mathbb{R}^{n|T|}$ называется следующая матрица размера $|T| \times |T|$:

$$\Upsilon^{[x_T^n, y_T^n]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{T,k}\, y_{T,k}^t. \tag{41}$$

Автокорреляция вектора-столбца $x_T \in \mathbb{R}^{|T|}$ определяется как

$$\boldsymbol{R}[x_T] \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon^{[x_T, x_T]} = x_T x_T^t. \tag{42}$$

Эмпирическая автокорреляция последовательности векторов-столбцов $x_T^n \in \mathbb{R}^{n|T|}$ определяется как

$$\boldsymbol{R}[x_T^n] \stackrel{\text{def}}{=} \Upsilon^{[x_T^n, x_T^n]} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{R}[x_{T,k}].$$

Определение 10. *Гауссовским типом* пары $(x_{T_1}^n, y_{T_2}^n) \in \mathbb{R}^{n|T_1|} \times \mathbb{R}^{n|T_2|}$ называется матрица размера $(|T_1| + |T_2|) \times (|T_1| + |T_2|)$

$$K^{[x_{T_1}^n, y_{T_2}^n]} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Upsilon^{[x_{T_1}^n, x_{T_1}^n]} & \Upsilon^{[x_{T_1}^n, y_{T_2}^n]} \\ \Upsilon^{[y_{T_2}^n, x_{T_1}^n]} & \Upsilon^{[y_{T_2}^n, y_{T_2}^n]} \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Для любого заданного $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$-кода, порождающего распределение вероятностей $p_{\boldsymbol{X}}^n$, из ограничений на мощность почти наверное (7) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} p_{X_i^n}(x_i^n) \times \mathbf{1}\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{i,k}^2 \leqslant P_i \right\} dx_i^n = 1 \tag{44}$$

для всех $i \in \mathcal{I}$, откуда согласно определению множества $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$ в (10) вытекает, что вероятность того, что эмпирическая автокорреляция $\boldsymbol{X}^n$ принадлежит $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$, равна 1, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n}(\boldsymbol{x}^n) \times \mathbf{1}\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n] \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P})\}\, d\boldsymbol{x}^n = 1. \tag{45}$$

Для любого $\delta > 0$ и любой $(N \times N)$-матрицы $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ определим δ-окрестность матрицы A как

$$\Gamma_\delta(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{B \in \mathbb{R}^{N\times N} \mid -\delta \cdot 1^{N\times N} \leqslant B - A \leqslant \delta \cdot 1^{N\times N}\right\}. \tag{46}$$

Пусть

$$\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N\times 2N} \;\middle|\; \begin{array}{l} K^{11} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}), \\ K^{12} - K^{11}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_\delta(0^{N\times N}), \\ K^{21} - \boldsymbol{G}K^{11} \in \Gamma_\delta(0^{N\times N}), \\ K^{22} + \boldsymbol{G}K^{11}\boldsymbol{G}^t - \boldsymbol{G}K^{12} - K^{21}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_\delta(\boldsymbol{\Sigma}) \end{array} \right\} \tag{47}$$

– множество типичных гауссовских типов пар $(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n)$, где эмпирическая автокорреляция $\boldsymbol{x}^n$ принадлежит $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$, а эмпирическая автокорреляция $\boldsymbol{z}^n$ попадает в некоторую окрестность ковариационной матрицы шума $\boldsymbol{\Sigma}$. Следующая лемма показывает, что вероятность того, что гауссовский тип пары $(\boldsymbol{X}^n, \boldsymbol{Y}^n)$ не принадлежит множеству $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}$, экспоненциально мала. Доказательство леммы 1 довольно громоздко, поэтому оно вынесено в Приложение.

Лемма 1. *Для любого $\delta > 0$ существует константа $\tau > 0$, зависящая от $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Sigma})$, такая что для всех достаточно больших n неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} \int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n) \times \mathbf{1}\left\{K^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}\right\} d\boldsymbol{y}^n \, d\boldsymbol{x}^n > 1 - e^{-\tau n}$$

справедливо для любого $(n, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$-кода, где $p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}$ – распределение, индуцированное кодом.

6.2. Квантователи, типы и классы типов. В определении 10 были введены гауссовские типы для заданной последовательности. Однако гауссовские типы образуют несчетное множество. Поэтому мы хотим ввести равномерное квантование евклидова пространства так, чтобы ошибка квантования по каждому измерению была меньше Δ. Для этого в определении 11 вводятся Δ-квантователи, с помощью которых любая ковариационная матрица будет квантоваться с точностью Δ вдоль каждого измерения.

Определение 11. Зафиксируем положительное число Δ. Вещественная матрица Λ размера $N \times N$ называется *Δ-квантователем*, если существует целочисленная матрица Π размера $N \times N$, такая что

$$\Lambda = \Delta\Pi.$$

Множество Δ-квантователей обозначается через $\mathcal{L}^\Delta$, что можно рассматривать как масштабированную версию N^2-мерной целочисленной решетки.

Определение 12. Для любого Δ-квантователя $\Lambda \in \mathcal{L}^\Delta$ определим *Δ-прямоугольник, представленный квантователем* Λ, как

$$\mathcal{V}_\Lambda^\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left\{B \in \mathbb{R}^{N\times N} \mid \Lambda \leqslant B < \Lambda + \Delta \cdot 1^{N\times N}\right\}.$$

Множество $\mathcal{V}$ будем называть *Δ-прямоугольником*, если оно является Δ-прямоугольником, представленным некоторым Λ из $\mathcal{L}^\Delta$.

Из определения 12 видно, что множество $\mathcal{L}^\Delta$ счетно, а множество $\{\mathcal{V}_\Lambda^\Delta : \Lambda \in \mathcal{L}^\Delta\}$ образует разбиение пространства $\mathbb{R}^{N\times N}$. С учетом определения множества $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$

в (10) определим для каждого $\gamma > 0$ множество положительно определенных ковариационных матриц

$$\mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{K} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{для всех непустых } T \subseteq \mathcal{I} \text{ все собственные} \\ \text{значения } K_{T\times T} \text{ не меньше } \gamma \end{array} \right\}. \tag{48}$$

Теперь определим подмножество множества $\mathcal{L}^\Delta$, называемое множеством входных $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$-квантователей и обозначаемое через $\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$, такое что его мощность конечна.

Определение 13. *Множеством входных* $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$*-квантователей* называется множество

$$\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Lambda \in \mathcal{L}^\Delta \mid \mathcal{V}_\Lambda^\Delta \cap \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}) \neq \varnothing\}. \tag{49}$$

Из определения 13 следует, что

$$\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}} \mathcal{V}_\Lambda^\Delta \supseteq \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}). \tag{50}$$

Следующее предложение, показывающее, что мощность $|\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}|$ конечна, имеет простое доказательство, приведенное в Приложении для полноты изложения.

Предложение 1. *Для любых* $\Delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *справедливо неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}| \leqslant \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \left(2\left\lceil \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\Delta} \right\rceil + 1\right).$$

Теперь мы готовы приступить к построению $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$-типов.

Определение 14. Для каждого $\Lambda \in \mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$ выберем и зафиксируем одну ковариационную матрицу $K_\Lambda \in \mathcal{V}_\Lambda^\Delta \cap \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P})$ и назовем ее $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$*-типом, представленным квантователем* Λ. Ковариационную матрицу $J \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P})$ будем называть $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$*-типом*, если она является $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$-типом, представленным Λ, для некоторого $\Lambda \in \mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$, и пусть

$$\mathcal{V}^\Delta(J) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V}_\Lambda^\Delta$$

– Δ-прямоугольник, содержащий J. Множество $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$-типов обозначим через $\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$.

Следующий результат непосредственно вытекает из определения 14, соотношения (50) и предложения 1, поэтому его доказательство опускается.

Следствие. *Для любых* $\Delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *имеет место включение*

$$\bigcup_{J \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}} \mathcal{V}^\Delta(J) \supseteq \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}). \tag{51}$$

Кроме того,

$$|\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}| \leqslant \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \left(2\left\lceil \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\Delta} \right\rceil + 1\right).$$

Определение 15. Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P})$-типа $J \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$ его *входной класс* Δ*-типов* определяется как

$$\mathcal{T}_J^{(n,\Delta)}(\boldsymbol{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \boldsymbol{x}^n \in \mathbb{R}^{nN} \mid \boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n] \in \mathcal{V}^\Delta(J) \right\}.$$

Кроме того, для каждого J определим его *класс совместных* $(\Delta,\delta,\boldsymbol{P})$*-типов*

$$\mathcal{T}_J^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\in\mathbb{R}^{nN}\times\mathbb{R}^{nN} \mid \boldsymbol{x}^n\in\mathcal{T}_J^{(n,\Delta)}(\boldsymbol{X}),\ K^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}\right\} \tag{52}$$

и *класс совместных* $(\Delta,\delta,\boldsymbol{P})$*-типов при ограничении на* (X_{T^c},Y_{T^c})

$$\mathcal{T}_J^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(X_{T^c},Y_{T^c}) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x^n_{T^c},y^n_{T^c})\in\mathbb{R}^{n|T^c|}\times\mathbb{R}^{n|T^c|} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{существует пара}\\ (\bar{x}^n_{\mathcal{I}},\bar{y}^n_{\mathcal{I}})\in\mathcal{T}_J^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\\ \text{такая что } (\bar{x}^n_{T^c},\bar{y}^n_{T^c})=(x^n_{T^c},y^n_{T^c})\end{array}\right\}. \tag{53}$$

В доказательстве теоремы 2 используются следующие две простые, но полезные границы.

Предложение 2. *Пусть $K\succ 0$ – вещественная матрица размера $N\times N$. Пусть $k_{\min}>0$ – наименьшее собственное значение матрицы K. Тогда*

$$K^{-1}\in\Gamma_{\frac{N}{k_{\min}}}(0^{N\times N}),$$

где множество $\Gamma_\delta(0^{N\times N})$ определено в (46).

Доказательство. Требуемый результат можно получить приведением матрицы K к диагональному виду. Более точно, пусть

$$K = UDU^t \tag{54}$$

– разложение K по собственным значениям, где U – унитарная матрица, строки которой составляют ортонормированный базис из собственных векторов матрицы K, а D – диагональная матрица с положительными диагональными элементами $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$, такими что $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_N$. Пусть $k_{\min}\stackrel{\text{def}}{=}\lambda_1>0$. Обращая обе стороны равенства (54) и применяя стандартные умножения, получаем $K^{-1}=UD^{-1}U^t$. Поскольку наибольший элемент диагональной матрицы D^{-1} равен $1/k_{\min}$, а абсолютные величины элементов матрицы U не больше 1 (строки U ортогональны), из равенства $K^{-1}=UD^{-1}U^t$ следует, что абсолютные величины элементов матрицы K^{-1} не превышают $\dfrac{N}{k_{\min}}$. ▲

Предложение 3. *Пусть Π_1 и Π_2 – вещественные матрицы размера $N_1\times N_2$ и $N_2\times N_3$ соответственно. Пусть*

$$\pi_i^{\max}=\max\{|r| : r \text{ – элемент матрицы } \Pi_i\},\quad i\in\{1,2\}.$$

Тогда

$$\Pi_1\Pi_2\in\Gamma_{N_2\pi_1^{\max}\pi_2^{\max}}(0^{N_1\times N_3}).$$

Доказательство. Требуемый результат легко вытекает из того, что $\Pi_1\in\in\Gamma_{\pi_1^{\max}}(0^{N_1\times N_2})$ и $\Pi_2\in\Gamma_{\pi_2^{\max}}(0^{N_2\times N_3})$. ▲

Ключевым шагом в доказательстве теоремы 2 является применение следующей леммы, ограничивающей произведения вероятностей $\prod\limits_{k=1}^{n} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k)$ для любых $(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})$-типов $J\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$ и любых $(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\in\mathcal{T}_J^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$. Так как доказательство леммы 2 довольно громоздко, оно вынесено в Приложение.

Лемма 2. *Пусть $\sigma_{\min}$ – наименьшее собственное значение матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$. Зафиксируем произвольное $T\subsetneq\mathcal{I}$ и произвольный $(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})$-тип $J\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$. Тогда* *для любой пары* $(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n) \in \mathcal{T}_J^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k) \leqslant e^{-n\left(\frac{1}{2}\log\left((2\pi e)^{|T^c|}|\Sigma_{T^c\times T^c}|\right)-\frac{\delta N^3}{2\sigma_{\min}}\right)}. \tag{55}$$

§ 7. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе будет показано, что

$$\mathcal{C}_\varepsilon \subseteq \mathcal{R}_{\text{cut-set}} \tag{56}$$

для всех $\varepsilon \in [0,1)$, где область $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ определена в (11). Достаточно показать, что для любого $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ и любой последовательности $(\bar{n}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-кодов предел вероятностей ошибки удовлетворяет равенству

$$\lim_{\bar{n}\to\infty} \varepsilon_{\bar{n}} = 1. \tag{57}$$

Чтобы показать это, зафиксируем вектор скоростей $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ и последовательность $(\bar{n}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-кодов.

7.1. Связь $\boldsymbol{R}$ с границей множества разреза. Так как $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{R}_{\text{cut-set}}$, а область $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ замкнута, то из определения области $\mathcal{R}_{\text{cut-set}}$ в (11) следует, что всегда найдется положительное число η, такое что для любой ковариационной матрицы $\boldsymbol{K} \in \mathcal{S}(\boldsymbol{P})$ существует непустое множество $V_{\boldsymbol{K}} \subsetneq \mathcal{I}$, для которого

$$\sum_{(i,j)\in V\times V^c} R_{i,j} \geqslant \frac{1}{2}\log\left|I_{|V^c|} + G_{V^c\times V}K_{V|V^c}G^t_{V^c\times V}(\Sigma_{V^c\times V^c})^{-1}\right| + \eta,$$

где через V для краткости обозначено множество $V_{\boldsymbol{K}}$, а величина $K_{V|V^c}$ определена в (9). Положим

$$\eta(\delta) \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta N^2}{2\sigma_{\min}}\left(\delta N + (2Ng_{\max}+1)\delta + \frac{2N^4 g_{\max}(1+\delta)P_{\max}}{P_{\min}} + 1\right), \tag{58}$$

где $P_{\min} \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{i\in\mathcal{I}} P_i > 0$, $P_{\max} \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{i\in\mathcal{I}} P_i > 0$, а $\sigma_{\min} > 0$ определяется как наименьшее собственное значение матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$. Далее, всегда найдется достаточно малое $\delta > 0$, такое что для любой ковариационной матрицы $\boldsymbol{K} \in \mathcal{S}((1+\delta)\boldsymbol{P})$ выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,j)\in V\times V^c}(1-\delta)R_{i,j} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{2}\log\left|I_{|V^c|} + G_{V^c\times V}K_{V|V^c}G^t_{V^c\times V}(\Sigma_{V^c\times V^c})^{-1}\right| + 2\eta(\delta).\end{aligned} \tag{59}$$

В частности, для любой $\boldsymbol{K} \succ 0$ величина $K_{V|V^c}$ в (59) допускает выражение в замкнутом виде

$$K_{V|V^c} = K_{V\times V} - K_{V\times V^c}(K_{V^c\times V^c})^{-1}K_{V^c\times V} \tag{60}$$

согласно формуле условной дисперсии для многомерного нормального распределения (см. [32, п. 8.1.3]).

7.2. Добавление N избыточных передач. В данном доказательстве величина $K_{V|V^c}$ в (59) тесно связана с $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n]$, т.е. с эмпирической автокорреляцией $\boldsymbol{X}^n$. Поскольку для $K_{V|V^c}$ имеется простое выражение в замкнутом виде (60), если $\boldsymbol{K} \succ 0$, то мы собираемся к каждому $(\bar{n}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-коду аккуратно добавить N избыточных передач таким образом, чтобы для полученного таким образом кода длины $\bar{n} + N$ с вероятностью 1 выполнялось соотношение $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n] \succ 0$. Для этого рассмотрим каждое достаточно большое $\bar{n}$, такое что неравенство

$$\bar{n} R_{i,j} \geqslant (\bar{n} + N)(1 - \delta) R_{i,j} \tag{61}$$

выполняется для всех $(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, и соответствующий $(\bar{n}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-код, зафиксированный выше, и построим $(\bar{n} + N, (1-\delta)\boldsymbol{R}, (1+\delta)\boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-код следующим образом. На первых $\bar{n}$ интервалах времени этот $(\bar{n} + N, (1-\delta)\boldsymbol{R}, (1+\delta)\boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-код совпадает с $(\bar{n}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \varepsilon_{\bar{n}})$-кодом. На последних N интервалах времени N узлов последовательно передают избыточную информацию следующим образом: для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ на i-м из последних интервалов времени только узел i передает ненулевой символ $\sqrt{\delta(\bar{n} + N) P_{\min}}$. Так как эмпирическая автокорреляция каждого передаваемого $\boldsymbol{x}^{\bar{n}}$ имеет минимальное собственное значение, равное нулю, то за счет N избыточных передач эмпирическая автокорреляция каждого передаваемого $\boldsymbol{x}^{\bar{n}+N}$ будет иметь минимальное собственное значение $\delta P_{\min}$.

Для упрощения обозначений положим $n \stackrel{\text{def}}{=} \bar{n} + N$, $\varepsilon_n \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\bar{n}}$ и $\boldsymbol{P}^{(\delta)} \stackrel{\text{def}}{=} (1+\delta)\boldsymbol{P}$. Для каждого построенного выше $(n, (1-\delta)\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}^{(\delta)}, \varepsilon_n)$-кода пусть $p_{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}^n, \boldsymbol{Y}^n, \widehat{\boldsymbol{W}}}$ – индуцированное распределение вероятностей. В силу (48) и согласно вышеописанной конструкции для любого $i \in \mathcal{I}$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n}(\boldsymbol{x}^n) \times \mathbf{1}\big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n] \in \mathcal{S}_{\delta P_{\min}}(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\big\}\, d\boldsymbol{x}^n = 1,$$

откуда следует, что для этого $(n, (1-\delta)\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}^{(\delta)}, \varepsilon_n)$-кода с вероятностью 1 справедливо $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n] \succ 0$.

7.3. Упрощение вероятности правильного декодирования с учетом отсутствия памяти. Зафиксируем достаточно большое n, для которого выполняются неравенство (61), неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} \int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n, \boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n) \times \mathbf{1}\Big\{K^{[\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}}^{(\delta^2, \boldsymbol{P}^{(\delta)})}\Big\}\, d\boldsymbol{y}^n\, d\boldsymbol{x}^n > 1 - e^{-\tau n}$$

для некоторого $\tau > 0$ как следствие леммы 1 (где специально выбрано δ^2) и неравенство

$$\frac{1}{n}\left(N^2 g_{\max}^2 + 2N^5\left(\frac{g_{\max}(1+\delta)P_{\max}}{\delta P_{\min}}\right) + N^8\left(\frac{g_{\max}(1+\delta)P_{\max}}{\delta P_{\min}}\right)^2\right) \leqslant \delta, \tag{62}$$

где

$$g_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|g| :\ g - \text{элемент матрицы } \boldsymbol{G}\}.$$

Если не будет указано обратное, в дальнейшей части доказательства все вероятности вычисляются согласно распределению $p_{\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X}^n, \boldsymbol{Y}^n, \widehat{\boldsymbol{W}}}$. Согласно лемме 1 и неравенству для вероятности объединения событий вероятность правильного декодирования можно оценить сверху следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&1-\varepsilon_n = \mathbf{P}\Bigg\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\big\{\varphi_i(W_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = W_{\mathcal{I}\times\{i\}}\big\}\Bigg\} \leqslant \\
&\leqslant \mathbf{P}\Bigg\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\big\{\varphi_i(W_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = W_{\mathcal{I}\times\{i\}}\big\} \cap \Big\{K^{[\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}\Big\} \cap \\
&\cap \big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n] \in \mathcal{S}_{\delta P_{\min}}(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\big\}\Bigg\} + e^{-\tau n} = \\
&= \frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}} \mathbf{P}\left\{\begin{matrix}\bigcap\limits_{i\in\mathcal{I}}\big\{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\big\} \cap \\ \cap\big\{K^{[\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}\big\} \cap \\ \cap\big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n] \in \mathcal{S}_{\delta P_{\min}}(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\big\}\end{matrix} \;\middle|\; \boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\right\} + e^{-\tau n}.
\end{aligned} \tag{63}
$$

Для упрощения дальнейшего изложения будем использовать обозначения $\widehat{w}_{\mathcal{I}\times\{i\}}$, $x_{\mathcal{T}^c,k}(w_{\mathcal{T}^c\times\mathcal{I}}, y_{\mathcal{T}^c}^{k-1})$, $\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})$, $x_{\mathcal{T}^c}^n(w_{\mathcal{T}^c\times\mathcal{I}}, y_{\mathcal{T}^c}^{n-1})$ и $\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{n-1})$, введенные перед формулой (20). Кроме того, определим события

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\widehat{w}_{\mathcal{I}\times\{i\}} = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\big\}, \\
&\mathcal{G}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{K^{[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}),\boldsymbol{y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}\Big\}, \\
&\mathcal{H}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{n-1})] \in \mathcal{S}_{\delta P_{\min}}(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\big\}.
\end{aligned}
$$

Чтобы упростить правую часть равенства (63), для каждого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ запишем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Bigg\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\big\{\varphi_i(w_{\{i\}\times\mathcal{I}}, Y_i^n) = w_{\mathcal{I}\times\{i\}}\big\} \cap \Big\{K^{[\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}\Big\} \cap \\
&\cap \big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{X}^n] \in \mathcal{S}_{\delta P_{\min}}(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\big\} \;\Big|\; \boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\Bigg\} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{Y}^n|\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}^n) \times \mathbf{1}\Bigg\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Bigg\}\mathbf{1}\{\mathcal{G}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^n}\}\mathbf{1}\{\mathcal{H}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}}\}\,d\boldsymbol{y}^n \stackrel{\text{(a)}}{=} \\
&\stackrel{\text{(a)}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1})) \times \\
&\times \mathbf{1}\Bigg\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Bigg\}\mathbf{1}\{\mathcal{G}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^n}\}\mathbf{1}\{\mathcal{H}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}}\}\,d\boldsymbol{y}^n
\end{aligned} \tag{64}
$$

где равенство (a) следует из того, что согласно определениям 7 и 8

$$
p_{\boldsymbol{Y}^n|\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{y}^n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}^{k-1}))
$$

для всех $\boldsymbol{y}^n \in \mathbb{R}^{nN}$.

7.4. Дальнейшее упрощение вероятности правильного декодирования с помощью метода гауссовских типов. Положим

$$
\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \delta P_{\min} \tag{65}
$$

и

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1/n. \tag{66}$$

Для любого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$ и любого $(\Delta, \gamma, \boldsymbol{P}^{(\delta)})$-типа $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ положим

$$\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\boldsymbol{y}^n \in \mathbb{R}^{nN} \mid (\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}),\boldsymbol{y}^n) \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right\}, \tag{67}$$

а для любого непустого множества $T \subsetneq \mathcal{I}$ и любого $w_{T^c\times\mathcal{I}} \in \mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$ определим

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J}) \stackrel{\text{def}}{=}\\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{y_{T^c}^n \in \mathbb{R}^{n|T^c|} \;\Big|\; (x_{T^c}^n(w_{T^c\times\mathcal{I}}, y_{T^c}^n), y_{T^c}^n) \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(X_{T^c}, Y_{T^c})\right\}.\end{aligned} \tag{68}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}&\bigcup_{\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}} \mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \supseteq \Big\{(\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}),\boldsymbol{y}^n) \in\\ &\in \boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}} \mid K^{[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}),\boldsymbol{y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})},\ \boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1})] \in \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\Big\}\end{aligned}$$

согласно соотношению (51) и определениям $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$, $\mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}^{(\delta)})$, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ и $\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$, данным в (47), (48) и определениях 15 и 14 соответственно, с учетом определения множества $\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})$ в (67) получаем отсюда, что объединение $\bigcup\limits_{\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}} \mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})$ покрывает множество

$$\left\{\boldsymbol{y}^n \in \mathbb{R}^{nN} \;\Big|\; K^{[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}),\boldsymbol{y}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})},\ \boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1})] \in \mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P}^{(\delta)})\right\},$$

откуда следует, что правую часть (64) можно оценить сверху как

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} \prod_{k=1}^n p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\} \mathbf{1}\{\mathcal{G}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^n}\}\mathbf{1}\{\mathcal{H}_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{n-1}}\}\,d\boldsymbol{y}^n \leqslant\\ &\leqslant \sum_{\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}} \int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})} \prod_{k=1}^n p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\}\,d\boldsymbol{y}^n.\end{aligned} \tag{69}$$

Объединяя (63), (64) и (69), заключаем, что вероятность правильного декодирования удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}&1-\varepsilon_n \leqslant e^{-\tau n} +\\ &+ \frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\ \sum_{\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}} \int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})} \prod_{k=1}^n p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k \,|\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) \times\\ &\times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\}\,d\boldsymbol{y}^n.\end{aligned} \tag{70}$$

7.5. Оценка вероятности правильного декодирования через $\boldsymbol{\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};J)}$. Зафиксируем произвольное непустое множество $T \subsetneq \mathcal{I}$. Для упрощения обозначений положим

$$a_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\log\left((2\pi e)^{|T^c|}|\Sigma_{T^c\times T^c}|\right) - \frac{\delta^2 N^3}{2\sigma_{\min}}, \tag{71}$$

где $\sigma_{\min} > 0$ – наименьшее собственное значение матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$. Чтобы упростить правую часть неравенства (70), рассмотрим в ней самое внутреннее произведение. В частности, для любых $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{W}}$, $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ и $\boldsymbol{y}^n \in \mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})$ рассмотрим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})) = \\
&= \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k,Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}),y_{T^c,k}) \stackrel{\text{(b)}}{\leqslant} \\
&\stackrel{\text{(b)}}{\leqslant} e^{-na_T}\prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k,Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}),y_{T^c,k}),
\end{aligned} \tag{72}$$

где неравенство (b) вытекает из леммы 2. Повторяя действия, аналогичные сделанным при выводе цепочки неравенств, приводящих к соотношению (26), получаем следующее неравенство, справедливое для любого $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\ \int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})} \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Y}_k\,|\,\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\}\,d\boldsymbol{y}^n \stackrel{(72)}{\leqslant} \\
&\stackrel{(72)}{\leqslant} e^{-na_T}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\ \int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})} \prod_{k=1}^{n} p_{Y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{X}_k,Y_{T^c,k}}(y_{T,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}),y_{T^c,k})\times \\
&\times \mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in T^c}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\}\,d\boldsymbol{y}^n \leqslant e^{-na_T}\sum_{w_{(T\times T^c)^c}\in\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}}\ \int\limits_{\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})} 1\,dy_{T^c}^n.
\end{aligned} \tag{73}$$

7.6. Оценка мощности множества $\boldsymbol{\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};J)}$. Для вывода верхней границы на мощность множества $\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$ для каждого $\boldsymbol{J} = J_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ обозначим через

$$\begin{aligned}
&\varphi_{X_{T^c},Y_{T^c}}(x_{T^c},y_{T^c}) \equiv \\
&\equiv \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} x_{T^c}\\ y_{T^c}\end{bmatrix}; 0^{2|T^c|}, \begin{bmatrix} J_{T^c\times T^c} & J_{T^c\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}}\\ G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c} & G_{T^c\times\mathcal{I}}\boldsymbol{J}G^t_{T^c\times\mathcal{I}}+\Sigma_{T^c\times T^c}\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

соответствующее многомерное нормальное распределение. Для любых $w_{T^c\times\mathcal{I}} \in \mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$ и $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$, поскольку наименьшее собственное значение матрицы $\boldsymbol{J}$ не меньше $\gamma > 0$ по определению множества $\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ (см. определение 14 и (48)), из предложения 2 следует, что

$$(J_{T^c\times T^c})^{-1} \in \Gamma_{\frac{N}{\gamma}}(0^{N\times N}); \tag{74}$$

кроме того, хорошо известно [32, п. 8.1.3], что

$$\varphi_{Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}}(y_{T^c}\,|\,x_{T^c}) \equiv \mathcal{N}(y_{T^c};\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c};\boldsymbol{J}),\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})), \tag{75}$$

где

$$\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c};\boldsymbol{J}) \stackrel{\text{def}}{=} G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}\left(J_{T^c\times T^c}\right)^{-1}x_{T^c} \tag{76}$$

и

$$\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J}) \stackrel{\text{def}}{=} G_{T^c\times\mathcal{I}}\boldsymbol{J}G^t_{T^c\times\mathcal{I}} + \Sigma_{T^c\times T^c} - G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}\left(J_{T^c\times T^c}\right)^{-1}J_{T^c\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}}. \tag{77}$$

Далее в этом пункте мы собираемся показать, что экспонента мощности множества $\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$ близка к $\dfrac{1}{2}\log\bigl((2\pi e)^{|T^c|}|\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})|\bigr)$. С этой целью для любых $w_{T^c\times\mathcal{I}}\in\mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$ и $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ рассмотрим неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})}\prod_{k=1}^{n}\varphi_{Y_{T^c}\,|\,X_{T^c}}(y_{T^c,k}\,|\,x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1}))\,dy^n_{T^c}\leqslant 1$$

(см. определение $\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$ в (68)), из которого с учетом (75)–(77) вытекает, что

$$\int e^{-n\left(\frac{1}{2}\log\left((2\pi)^{|T^c|}|\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})|\right)+\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tr}\left((\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J}))^{-1}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1});\boldsymbol{J})]\right)\right)}\times$$
$$\times\,dy^n_{T^c}\leqslant 1, \tag{78}$$

где интеграл берется по множеству $\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$. Зафиксируем произвольные $w_{T^c\times\mathcal{I}}\in\mathcal{W}_{T^c\times\mathcal{I}}$ и $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$. Чтобы получить оценку снизу на левую часть неравенства (78), для каждого $y^n_{T^c}\in\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$ рассмотрим

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1});\boldsymbol{J})]=\\&=\boldsymbol{R}[y^n_{T^c}]-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\Upsilon^{\left[y_{T^c,k},G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1})\right]}+\\&+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1})].\end{aligned} \tag{79}$$

С учетом данных в (68), (53), (52) и (47) определений множеств $\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(X_{T^c},Y_{T^c})$, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ и $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ заключаем, что для любого $y^n_{T^c}\in\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})$ существует пара $(\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n)\in\mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, такая что

$$(\bar{x}^n_{T^c},\bar{y}^n_{T^c})=(x^n_{T^c}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y^n_{T^c}),y^n_{T^c}), \tag{80}$$
$$\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\in\mathcal{V}^{\Delta}(\boldsymbol{J}) \tag{81}$$

и

$$K^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n]}\in\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}. \tag{82}$$

Теперь из (82), определения множества $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ в (47) и предложения 3 следует, что

$$\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{y}}^n,\bar{\boldsymbol{x}}^n]}\in\Gamma_{\delta^2}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]) \tag{83}$$

и

$$\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{y}}^n] \in \Gamma_{(2Ng_{\max}+1)\delta^2}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\boldsymbol{G}^t + \boldsymbol{\Sigma}) \tag{84}$$

(вывод этих соотношений приведен в Приложении для полноты изложения). Объединяя (81), (83) и (84), заключаем, что существует матрица $Q^{\Delta}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \in \Gamma_{\Delta}(0^{N\times N})$, такая что

$$\boldsymbol{R}[\bar{x}^n_{T^c}] = J_{T^c\times T^c} + Q^{\Delta}_{T^c\times T^c}, \tag{85}$$

$$\boldsymbol{R}[\bar{y}^n_{T^c}] \in \Gamma_{(2Ng_{\max}+1)\delta^2}(G_{T^c\times\mathcal{I}}(\boldsymbol{J} + Q^{\Delta}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}})G^t_{T^c\times\mathcal{I}} + \Sigma_{T^c\times T^c}) \tag{86}$$

и

$$\Upsilon^{[\bar{y}^n_{T^c},\bar{x}^n_{T^c}]} \in \Gamma_{\delta^2}(G_{T^c\times\mathcal{I}}(J_{\mathcal{I}\times T^c} + Q^{\Delta}_{\mathcal{I}\times T^c})). \tag{87}$$

Так как

$$G_{T^c\times\mathcal{I}}Q^{\Delta}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \in \Gamma_{Ng_{\max}\Delta}(0^{T^c\times\mathcal{I}}) \quad \text{и} \quad G_{T^c\times\mathcal{I}}Q^{\Delta}_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}} \in \Gamma_{N^2g^2_{\max}\Delta}(0^{T^c\times T^c})$$

согласно предложению 3, то из из (86) и (87) следует, что

$$\Upsilon^{[\bar{y}^n_{T^c},\bar{x}^n_{T^c}]} \in \Gamma_{\delta^2+Ng_{\max}\Delta}(G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}) \tag{88}$$

и

$$\boldsymbol{R}[\bar{y}^n_{T^c}] \in \Gamma_{(2Ng_{\max}+1)\delta^2+N^2g^2_{\max}\Delta}(G_{T^c\times\mathcal{I}}\boldsymbol{J}G^t_{T^c\times\mathcal{I}} + \Sigma_{T^c\times T^c}). \tag{89}$$

Продолжая равенство (79), с учетом (74), (80), (85), (88), (89), того факта, что $\boldsymbol{J} \in \Gamma_{(1+\delta)P_{\max}}(0^{N\times N})$, и предложения 3 получаем

$$\boldsymbol{R}[y^n_{T^c}] \in \Gamma_{(2Ng_{\max}+1)\delta^2+N^2g^2_{\max}\Delta}(G_{T^c\times\mathcal{I}}\boldsymbol{J}G^t_{T^c\times\mathcal{I}} + \Sigma_{T^c\times T^c}), \tag{90}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Upsilon^{\left[y_{T^c,k},G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y^{k-1}_{T^c})\right]} \in \\ &\in \Gamma_{N^4g_{\max}(\delta^2+Ng_{\max}\Delta)(1+\delta)P_{\max}/\gamma}(G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}J_{T^c\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}})\end{aligned} \tag{91}$$

и

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y^{k-1}_{T^c})] \in \\ &\in \Gamma_{\Delta(N^4g_{\max}(1+\delta)P_{\max}/\gamma)^2}(G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}J_{T^c\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}}).\end{aligned} \tag{92}$$

Для упрощения обозначений положим

$$\begin{aligned}&\varkappa(\delta,\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} (2Ng_{\max}+1)\delta^2 + N^2g^2_{\max}\Delta + \\ &+ 2N^4g_{\max}(\delta^2+Ng_{\max}\Delta)(1+\delta)P_{\max}/\gamma + \Delta\left(N^4g_{\max}(1+\delta)P_{\max}/\gamma\right)^2.\end{aligned} \tag{93}$$

Объединяя (79) и (90)–(93), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k} - \widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y^{k-1}_{T^c});\boldsymbol{J})] \in \\ &\in \Gamma_{\varkappa(\delta,\Delta)}\big(G_{T^c\times\mathcal{I}}\boldsymbol{J}G^t_{T^c\times\mathcal{I}} + \Sigma_{T^c\times T^c} - G_{T^c\times\mathcal{I}}J_{\mathcal{I}\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}J_{T^c\times\mathcal{I}}G^t_{T^c\times\mathcal{I}}\big),\end{aligned}$$

откуда с учетом (77) вытекает, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1});\boldsymbol{J})]\in\Gamma_{\varkappa(\delta,\Delta)}\big(\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})\big). \tag{94}$$

Так как упрощение (77) приводит к

$$\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})=G_{T^c\times T}\big(J_{T\times T}-J_{T\times T^c}(J_{T^c\times T^c})^{-1}J_{T^c\times T}\big)G^t_{T^c\times T}+\Sigma_{T^c\times T^c}, \tag{95}$$

то отсюда следует, что все собственные значения матрицы $\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})$ не меньше $\sigma_{\min}$, и тогда по предложению 2 получаем

$$(\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J}))^{-1}\in\Gamma_{\frac{N}{\sigma_{\min}}}(0^{T^c\times T^c}). \tag{96}$$

Таким образом, из (94), (96) и предложения 2 вытекает неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tr}\left((\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J}))^{-1}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-\widehat{\mu}_{T^c}(x_{T^c,k}(w_{T^c\times\mathcal{I}},y_{T^c}^{k-1});\boldsymbol{J})]\right)\right|\leqslant\frac{N^2\varkappa(\delta,\Delta)}{\sigma_{\min}},$$

откуда с учетом (78) получаем

$$\int\limits_{\mathcal{F}_T^{(\Delta,\delta^2)}(w_{T^c\times\mathcal{I}};\boldsymbol{J})}1\,dy^n_{T^c}\leqslant e^{n\left(\frac{1}{2}\log\left((2\pi e)^{|T^c|}|\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})|\right)+\frac{N^2\varkappa(\delta,\Delta)}{2\sigma_{\min}}\right)}. \tag{97}$$

7.7. Экспоненциальное убывание вероятности правильного декодирования. Объединяя (73), (71) и (97) и пользуясь тем, что в соответствии с (2) справедливо

$$\frac{|\mathcal{W}_{(T\times T^c)^c}|}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}=\frac{1}{\prod\limits_{(i,j)\in T\times T^c}\lceil e^{n(1-\delta)R_{i,j}}\rceil}\leqslant e^{-n\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c}(1-\delta)R_{i,j}},$$

получаем для любого $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})}\prod_{k=1}^{n}p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\times\mathbf{1}\Big\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\Big\}\,d\boldsymbol{y}^n\leqslant$$

$$\leqslant e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c}(1-\delta)R_{i,j}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{|\widehat{\Sigma}_{T^c}(\boldsymbol{J})|}{|\Sigma_{T^c\times T^c}|}\right)-\frac{\delta^2N^3+N^2\varkappa(\delta,\Delta)}{2\sigma_{\min}}\right)}. \tag{98}$$

Используя (58), (62), (65), (66) и (93), приходим к

$$\frac{\delta^2N^3+N^2\varkappa(\delta,\Delta)}{2\sigma_{\min}}\leqslant\eta(\delta). \tag{99}$$

Объединяя (95), (98) и (99), для любого $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ получаем

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\mathcal{W}}|}\sum_{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{\mathcal{W}}}\int\limits_{\mathcal{A}^{(\Delta,\delta^2)}(\boldsymbol{w};\boldsymbol{J})}\prod_{k=1}^{n}p_{\boldsymbol{Y}_k|\boldsymbol{X}_k}(\boldsymbol{y}_k\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\times\mathbf{1}\left\{\bigcap_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{E}_{\boldsymbol{w},y_i^n}\right\}\,d\boldsymbol{y}^n\leqslant$$

$$\leqslant e^{-n\left(\sum\limits_{(i,j)\in T\times T^c}(1-\delta)R_{i,j}-\frac{1}{2}\log\left|I_{|T^c|}+G_{T^c\times T}J_{T|T^c}G^t_{T^c\times T}(\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\right|-\eta(\delta)\right)} \tag{100}$$

для любого непустого множества $T \subsetneq \mathcal{I}$, где $J_{T|T^c} \stackrel{\text{def}}{=} J_{T\times T} - J_{T\times T^c}\left(J_{T^c\times T^c}\right)^{-1} J_{T^c\times T}$. Используя (70), (100), (59), (60), следствие из предложения 1 и равенство (66), получаем

$$1-\varepsilon_n \leqslant e^{-\tau n} + \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \left(2\left\lceil n\sqrt{P_iP_j}\right\rceil + 1\right) e^{-n\eta(\delta)} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-\tau n} + (2nP_{\max}+3)^{N^2} e^{-n\eta(\delta)}. \tag{101}$$

Следовательно, равенство (57) справедливо в силу (101), поскольку $\eta(\delta)$ положительно согласно (58), и значит, включение (56) имеет место для всех $\varepsilon \in [0,1)$.

§ 8. Заключительные замечания

В статье предложено первое полное доказательство сильного обращения теоремы кодирования для любой ДСБП с точной границей множества разреза. Доказательство основано на методе типов. Кроме того, сильное обращение теоремы кодирования обобщено на любую гауссовскую сеть с точной границей множества разреза в условиях ограничений на мощность почти наверное. Наше обобщение доказательства сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП на гауссовские сети далеко не очевидно, в основном благодаря тому, что доказательство сильного обращения теоремы кодирования для ДСБП основано на методе типов [19, гл. 2]. Более точно, метод типов для ДСБП основан на соображениях подсчета, поскольку входной и выходной алфавиты в ДСБП конечны. Напротив того, метод типов для гауссовских сетей основан на аккуратной аппроксимации и квантовании, поскольку входной и выходной алфавиты непрерывны. Имеется еще одно ключевое отличие между доказательствами для ДСБП в § 5 и для гауссовских сетей в § 7: в доказательстве для гауссовских сетей приходится избегать условные типы, которые не удается легко определить, когда корреляцией между входными символами и случайными величинами шума нельзя пренебречь. Вместо этого мы даем новое определение классов совместных типов (определение 15) таким образом, что удается избежать использования условных типов в доказательстве. Доказательство же для ДСБП в § 5, наоборот, в значительной степени опирается на определение условных типов.

Важными следствиями этих двух сильных обращений теоремы кодирования являются новые сильные обращения теоремы кодирования для гауссовских КМД с обратной связью и следующих каналов с ретрансляцией как в дискретной модели без памяти, так и гауссовской модели: ухудшенный канал с ретрансляцией, канал с ретрансляцией с ортогональными компонентами на передающем конце и общий канал с ретрансляцией и обратной связью. Сильное обращение теоремы кодирования в гауссовском случае служит дополнением к следующим недавно полученным результатам: если вместо ограничений на мощность почти наверное использовать ограничения на мощность в длительном режиме, то сильное обращение теоремы кодирования не выполняется для гауссовского ухудшенного канала с ретрансляцией [20] и гауссовского канала множественного доступа (КМД) с обратной связью [21].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Перед тем как доказывать лемму 1, докажем два необходимых нам предварительных результата. Следующее предложение утверждает, что вероятность того, что эмпирическая автокорреляция $\boldsymbol{Z}^n$ не принадлежит множеству $\Gamma_\delta(\boldsymbol{\Sigma})$, экспоненциально мала. Доказательство предложения 4 основано на теории больших уклонений [33] и приведено здесь для полноты изложения.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* $p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{z}; 0^N, \boldsymbol{\Sigma})$ *для всех* $\boldsymbol{z}$, *пусть* $\boldsymbol{Z}^n$ *представляет собой* n *независимых копий случайной величины* $\boldsymbol{Z} \sim p_{\boldsymbol{Z}}$, *и пусть* $p_{\boldsymbol{Z}^n}$ – *распределение* $\boldsymbol{Z}^n$, *т.е.*

$$p_{\boldsymbol{Z}^n}(\boldsymbol{z}^n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z}_k)$$

для всех $\boldsymbol{z}^n$. *Для любого* $\delta > 0$ *существует константа* $\tau > 0$, *зависящая от* $\boldsymbol{\Sigma}$, *такая что для всех достаточно больших* n *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{Z}^n}(\boldsymbol{z}^n) \times \mathbf{1}\left\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{z}^n] \in \Gamma_\delta(\boldsymbol{\Sigma})\right\} d\boldsymbol{z}^n > 1 - e^{-\tau n}. \tag{102}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t > 0$ – произвольное действительное число. Рассмотрим следующую цепочку неравенств для любых $(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, где все вероятности и математические ожидания вычисляются согласно распределению $p_{\boldsymbol{Z}^n}$:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_{i,k}Z_{j,k} - \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}]\right| > \delta\right\} = \tag{103}$$

$$= 2\ \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_{i,k}Z_{j,k} > \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}] + \delta\right\} \overset{\text{(a)}}{\leqslant} \frac{2\left(\mathbf{E}[e^{tZ_{i,k}Z_{j,k}}]\right)^n}{e^{tn(\mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}]+\delta)}} =$$

$$= 2e^{tn\left(\frac{1}{t}\log \mathbf{E}[e^{tZ_{i,k}Z_{j,k}}] - \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}] - \delta\right)}, \tag{104}$$

где неравенство (a) следует из границы Чернова. Так как

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log \mathbf{E}[e^{tZ_{i,k}Z_{j,k}}] = \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}],$$

то существует достаточно малое $t_{ij} > 0$, зависящее от $\boldsymbol{\Sigma}$, такое что

$$\frac{1}{t_{ij}}\log \mathbf{E}[e^{t_{ij}Z_{i,k}Z_{j,k}}] - \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}] \leqslant \delta/2,$$

откуда с учетом (104) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_{i,k}Z_{j,k} - \mathbf{E}[Z_{i,k}Z_{j,k}]\right| > \delta\right\} \leqslant 2e^{-t_{ij}\delta n/2}. \tag{105}$$

Поскольку существует конечное множество положительных чисел $\{t_{ij} > 0 \mid (i,j) \in \in \mathcal{I}\times\mathcal{I}\}$, такое что неравенство (105) выполняется для всех $(i,j) \in \mathcal{I}$, то выбирая $\tau \overset{\text{def}}{=} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\delta}{4}\min\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}}\{t_{ij}\}$, заключаем, что неравенство (102) справедливо для всех достаточно больших n. ▲

Следующее предложение утверждает, что вероятность того, что эмпирическая корреляция между $\boldsymbol{X}^n$ и $\boldsymbol{Z}^n$ не принадлежит множеству $\Gamma_\delta(0^{N\times N})$, экспоненциально мала. Доказательство предложения 5 основано на границе Чернова и ограничениях на мощность почти наверное (7).

П р е д л о ж е н и е 5. *Для любого* $\delta > 0$ *существует константа* $\tau > 0$, *зависящая от* $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Sigma})$, *такая что для всех достаточно больших* n *неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Z}^n}(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{z}^n) \times \mathbf{1}\left\{\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{z}^n]} \in \Gamma_\delta(0^{N\times N})\right\} d\boldsymbol{z}^n\, d\boldsymbol{x}^n > 1 - e^{-\tau n} \tag{106}$$

справедливо для любого $(n,\boldsymbol{R},\boldsymbol{P})$-кода, где $p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Z}^n}$ – распределение, индуцированное этим кодом.

Доказательство. Пусть $t>0$ – произвольное действительное число. Пусть $\sigma_j^2>0$ – дисперсия $Z_{j,k}$ для любых $j\in\mathcal{I}$ и $k\in\{1,2,\ldots,n\}$. Зафиксируем $\delta>0$ и произвольный $(n,\boldsymbol{R},\boldsymbol{P})$-код. Рассмотрим следующую цепочку неравенств для любых $(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}$, где все вероятности и математические ожидания вычисляются согласно распределению, индуцированному этим $(n,\boldsymbol{R},\boldsymbol{P})$-кодом (см. (8)):

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}\right|>\delta\right\}=2\ \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}>\delta\right\}\overset{\text{(a)}}{\leqslant}$$

$$\overset{\text{(a)}}{\leqslant}\frac{2\,\mathbf{E}\left[e^{t\sum\limits_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}}\right]}{e^{\delta tn}}\overset{\text{(b)}}{\leqslant}\frac{2}{e^{\delta tn}}\ \mathbf{E}\left[e^{t\sum\limits_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}+\frac{t^2\sigma_j^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(P_i-X_{i,k}^2)}\right],\tag{107}$$

где

(a) следует из границы Чернова;

(b) следует из ограничения на мощность почти наверное (7) для узла i.

Поскольку $Z_{j,k}$ не зависит от (X_i^k,Z_j^{k-1}) для каждого $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathbf{E}\left[e^{t\sum\limits_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}-\frac{t^2\sigma_j^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}X_{i,k}^2}\right]=1.\tag{108}$$

Объединяя (107) и (108), для любых $(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}$ получаем

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}\right|>\delta\right\}\leqslant\frac{2e^{\sigma_j^2t_{ij}^2nP_i/2}}{e^{\delta t_{ij}n}}$$

для любого $t_{ij}>0$, и выбирая $t_{ij}\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\delta}{\sigma_j^2P_i}$, получаем отсюда, что

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_{i,k}Z_{j,k}\right|>\delta\right\}\leqslant 2e^{-\frac{\delta^2n}{2\sigma_j^2P_i}}$$

для всех $(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}$. Таким образом, выбирая $\tau\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\delta^2}{4\max\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}}\sigma_j^2P_i}$, заключаем, что неравенство (106) справедливо для всех достаточно больших n. ▲

Теперь мы готовы привести доказательство леммы 1. Зафиксируем $\delta>0$ и произвольный $(n,\boldsymbol{R},\boldsymbol{P})$-код. Пусть $p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Z}^n,\boldsymbol{Y}^n}$ – распределение, индуцированное этим кодом (см. (8)). Используя неравенство для вероятности объединения событий, равенство (45), определение $K^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}$ в (43) и определение $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}$ в (47), для всех достаточно больших n имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\times\mathbf{1}\left\{K^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}\notin\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}\right\}d\boldsymbol{y}^n\,d\boldsymbol{x}^n\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\times\mathbf{1}\left\{\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}-\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\boldsymbol{G}^t\notin\Gamma_\delta(0^{N\times N})\right\}d\boldsymbol{y}^n\,d\boldsymbol{x}^n+$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\times \mathbf{1}\big\{\Upsilon^{[\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{x}^n]}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\notin\Gamma_\delta(0^{N\times N})\big\}\,d\boldsymbol{y}^n\,d\boldsymbol{x}^n+\\
&+\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\times \mathbf{1}\big\{\boldsymbol{R}[\boldsymbol{y}^n]+\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\boldsymbol{G}^t-\boldsymbol{G}\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}-\\
&-\Upsilon^{[\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{x}^n]}\boldsymbol{G}^t\notin\Gamma_\delta(\Sigma)\big\}\,d\boldsymbol{y}^n\,d\boldsymbol{x}^n. \qquad (109)
\end{aligned}
$$

Используя определение 9 и полагая $\boldsymbol{z}^n \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{y}^n-\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}^n$, получаем

$$\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}-\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\boldsymbol{G}^t=\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{z}^n]}, \qquad (110)$$

$$\Upsilon^{[\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{x}^n]}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]=\Upsilon^{[\boldsymbol{z}^n,\boldsymbol{x}^n]} \qquad (111)$$

и

$$\boldsymbol{R}[\boldsymbol{y}^n]+\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\boldsymbol{G}^t-\boldsymbol{G}\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}-\Upsilon^{[\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{x}^n]}\boldsymbol{G}^t=\boldsymbol{R}[\boldsymbol{z}^n]. \qquad (112)$$

Объединяя закон канала (8), соотношения (109)–(112) и применяя предложения 4 и 5, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}}\int\limits_{\mathbb{R}^{nN}} p_{\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n}(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\times \mathbf{1}\left\{K^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]}\notin\mathcal{U}^{(\delta,\boldsymbol{P})}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}\right\}d\boldsymbol{y}^n\,d\boldsymbol{x}^n\leqslant e^{-\lambda n}$$

для некоторого $\lambda>0$, зависящего от $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{\Sigma}$, что завершает доказательство. ▲

Доказательство предложения 1. Зафиксируем $\Delta>0$ и $\gamma>0$. Поскольку множество $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$, определенное в (10), является множеством ковариационных матриц, то $\mathcal{S}(\boldsymbol{P})$ – ограниченное множество, содержащееся в

$$\bar{\mathcal{S}}(\boldsymbol{P})=\left\{\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{N\times N}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{K}\succeq 0,\ \text{где для } ij\text{-го элемента } k_{ij} \text{ верно}\\ |k_{ij}|\leqslant\sqrt{P_iP_j}\ \text{для всех } (i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}\end{array}\right\}.$$

Определим

$$\bar{\mathcal{S}}^{\Delta}(\boldsymbol{P})\overset{\text{def}}{=}\left\{\boldsymbol{K}\in\mathbb{R}^{N\times N}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{K}\succeq 0,\ \text{где для } ij\text{-го элемента } k_{ij} \text{ верно}\\ |k_{ij}|\leqslant\left\lceil\dfrac{\sqrt{P_iP_j}}{\Delta}\right\rceil\Delta\ \text{для всех } (i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}\end{array}\right\}.$$

Так как $\mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P})\subseteq\mathcal{S}(\boldsymbol{P})\subseteq\bar{\mathcal{S}}(\boldsymbol{P})\subseteq\bar{\mathcal{S}}^{\Delta}(\boldsymbol{P})$, а множество $\bar{\mathcal{S}}^{\Delta}(\boldsymbol{P})$ содержит не более $\prod\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}}\left(2\left\lceil\dfrac{\sqrt{P_iP_j}}{\Delta}\right\rceil+1\right)$ Δ-квантователей (см. определение 11), получаем, что множество $\mathcal{S}_\gamma(\boldsymbol{P})$ содержит не более $\prod\limits_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}}\left(2\left\lceil\dfrac{\sqrt{P_iP_j}}{\Delta}\right\rceil+1\right)$ Δ-квантователей, откуда с учетом определения множества $\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}$ в (49) следует, что

$$|\mathcal{L}^{(\Delta,\gamma,\boldsymbol{P})}|\leqslant\prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}}\left(2\left\lceil\frac{\sqrt{P_iP_j}}{\Delta}\right\rceil+1\right). \quad ▲$$

Доказательство леммы 2. Для любых $(\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n)\in\mathcal{T}^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ рассмотрим

$$\prod_{k=1}^{n} q_{Y_{T^c}\,|\,\boldsymbol{X}}(y_{T^c,k}\,|\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}))\overset{\text{(a)}}{=}$$

$$\overset{(a)}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathcal{N}(y_{T^c,k}; G_{T^c\times\mathcal{I}}\, \boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1}), \Sigma_{T^c\times T^c}) \overset{(1)}{=}$$

$$\overset{(1)}{=} e^{-n\left(\frac{1}{2}\log\left((2\pi)^{|T^c|}|\Sigma_{T^c\times T^c}|\right)+\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tr}\left((\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-G_{T^c\times\mathcal{I}}\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})]\right)\right)} =$$

$$= e^{-n\left(\frac{1}{2}\log\left((2\pi)^{|T^c|}|\Sigma_{T^c\times T^c}|\right)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left((\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[y_{T^c,k}-G_{T^c\times\mathcal{I}}\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})]\right)\right)} \tag{113}$$

где равенство (a) выполнено согласно определению 8. Согласно определениям множеств $\mathcal{T}_{\boldsymbol{J}}^{(n,\Delta,\delta,\boldsymbol{P})}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ и $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta,\boldsymbol{P})}$ в (52) и (47), соответственно, имеем

$$\boldsymbol{R}[\boldsymbol{y}^n] + \boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x}^n]\boldsymbol{G}^t - \boldsymbol{G}\Upsilon^{[\boldsymbol{x}^n,\boldsymbol{y}^n]} - \Upsilon^{[\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{x}^n]}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_\delta(\boldsymbol{\Sigma}),$$

откуда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})] \in \Gamma_\delta(\boldsymbol{\Sigma}),$$

что в свою очередь дает

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}\big[y_{T^c,k} - G_{T^c\times\mathcal{I}}\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})\big] \in \Gamma_\delta(\Sigma_{T^c\times T^c}). \tag{114}$$

Используя (114) и предложения 3 и 2, получаем

$$(\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}\big[y_{T^c,k} - G_{T^c\times\mathcal{I}}\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})\big] \in \Gamma_{\frac{\delta N^2}{\sigma_{\min}}}(I_{T^c}). \tag{115}$$

Поскольку

$$\left|\operatorname{tr}\left((\Sigma_{T^c\times T^c})^{-1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{R}\big[y_{T^c,k} - G_{T^c\times\mathcal{I}}\,\boldsymbol{x}_k(\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{k-1})\big]\right) - |T^c|\right| \leqslant \frac{\delta N^3}{\sigma_{\min}}$$

согласно (115), из (113) следует справедливость неравенства (55). ▲

Вывод формул (83) и (84). Пусть $(\bar{\boldsymbol{x}}^n, \bar{\boldsymbol{y}}^n)$ удовлетворяет условию (82), т.е.

$$K^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n]} \in \mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}.$$

По определению множества $\mathcal{U}_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}}^{(\delta^2,\boldsymbol{P}^{(\delta)})}$ в (47) имеем

$$\begin{aligned}&\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n]} - \Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{x}}^n]}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_{\delta^2}(0^{N\times N}),\\ &\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{y}}^n,\bar{\boldsymbol{x}}^n]} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n] \in \Gamma_{\delta^2}(0^{N\times N})\end{aligned} \tag{116}$$

и

$$\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{y}}^n] + \boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\boldsymbol{G}^t - \boldsymbol{G}\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n]} - \Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{y}}^n,\bar{\boldsymbol{x}}^n]}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_{\delta^2}(\boldsymbol{\Sigma}),$$

откуда по предложению 3 следует, что

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{x}}^n,\bar{\boldsymbol{y}}^n]} \in \Gamma_{Ng_{\max}\delta^2}\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\boldsymbol{G}^t\right),\\ &\Upsilon^{[\bar{\boldsymbol{y}}^n,\bar{\boldsymbol{x}}^n]}\boldsymbol{G}^t \in \Gamma_{Ng_{\max}\delta^2}\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\boldsymbol{G}^t\right)\end{aligned}$$

и

$$\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{y}}^n] \in \Gamma_{(2Ng_{\max}+1)\delta^2}\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{R}[\bar{\boldsymbol{x}}^n]\boldsymbol{G}^t + \boldsymbol{\Sigma}\right). \tag{117}$$

Поэтому соотношения (83) и (84) вытекают из (116) и (117) соответственно. ▲

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение текста и ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *El Gamal A., Kim Y.-H.* Network Information Theory. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.
2. *El Gamal A.* On Information Flow in Relay Networks // Proc. 1981 IEEE National Telecommunications Conf. (NTC'81). New Orleans, LA. November 29 – December 3, 1981. New York: IEEE, 1981. V. 2. P. D4.1.1–D4.1.4.
3. *Ford L.R., Jr., Fulkerson D.R.* Maximal Flow through a Network // Canad. J. Math. 1956. V. 8. P. 399–404.
4. *Cover T., El Gamal A.* Capacity Theorems for the Relay Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. № 5. P. 572–584.
5. *Aleksic M., Razaghi P., Yu W.* Capacity of a Class of Modulo-Sum Relay Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. V. 55. № 3. P. 921–930.
6. *Kramer G., Gastpar M., Gupta P.* Cooperative Strategies and Capacity Theorems for Relay Networks // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 9. P. 3037–3063.
7. *Aref M.R.* Information Flow in Relay Networks. PhD Thesis. Dept. of Statistics, Stanford Univ., CA, 1980.
8. *El Gamal A., Aref M.R.* The Capacity of the Semideterministic Relay Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 1982. V. 28. № 3. P. 536.
9. *El Gamal A., Zahedi S.* Capacity of a Class of Relay Channels with Orthogonal Components // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 5. P. 1815–1817.
10. *Avestimehr A.S., Diggavi S.N., Tse D.N.C.* Wireless Network Information Flow: A Deterministic Approach // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 4. P. 1872–1905.
11. *Behboodi A., Piantanida P.* On the Asymptotic Error Probability of Composite Relay Channels // Proc. 2011 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2011). St. Petersburg, Russia. July 31 – August 5, 2011. P. 1524–1528.
12. *Behboodi A., Piantanida P.* On the Asymptotic Spectrum of the Error Probability of Composite Networks // Proc. 2012 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2012). Lausanne, Switzerland. September 3–7, 2012. P. 148–152.
13. *Behboodi A.* Réseaux coopératifs avec incertitude du canal (Cooperative Networks with Channel Uncertainty). PhD Thesis. Dept. of Telecommunications, Supélec (École Supérieure d'Électricité), Gif-sur-Yvette, France, 2012. Available at `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00765429`.
14. *Han T.S.* Information-Spectrum Methods in Information Theory. Berlin: Springer, 2003.
15. *Fong S.L., Tan V.Y.F.* Strong Converse Theorems for Classes of Multimessage Multicast Networks: A Rényi Divergence Approach // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 9. P. 4953–4967.
16. *Polyanskiy Y., Verdú S.* Arimoto Channel Coding Converse and Rényi Divergence // Proc. 48th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computation. September 29 – October 1, 2010. Allerton, IL, USA. P. 1327–1333.
17. *Kötter R., Effros M., Médard M.* A Theory of Network Equivalence—Part I: Point-to-Point Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 2. P. 972–995.
18. *Dana A.F., Gowaikar R., Palanki R., Hassibi B., Effros M.* Capacity of Wireless Erasure Networks // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 3. P. 789–804.
19. *Csiszár I., Körner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.

20. *Fong S.L., Tan V.Y.F.* Achievable Rates for Gaussian Degraded Relay Channels with Non-vanishing Error Probabilities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2017. V. 63. № 7. P. 4183–4201.
21. *Truong L.V., Fong S.L., Tan V.Y.F.* On Gaussian Channels with Feedback under Expected Power Constraints and with Non-vanishing Error Probabilities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2017. V. 63. № 3. P. 1746–1765.
22. *Csiszár I., Körner J.* Feedback Does Not Affect the Reliability Function of a DMC at Rates above Capacity // IEEE Trans. Inform. Theory. 1982. V. 28. № 1. P. 92–93.
23. *Ozarow L.H.* The Capacity of the White Gaussian Multiple Access Channel with Feedback // IEEE Trans. Inform. Theory. 1984. V. 30. № 4. P. 623–629.
24. *Massey J.L.* Causality, Feedback and Directed Information // Proc. 1990 IEEE Int. Sympos. on Information Theory and Its Applications (ISITA'90). Waikiki, Hawaii. November 27–30, 1990. P. 303–305.
25. *Marton K.* A Simple Proof of the Blowing-Up Lemma // IEEE Trans. Inform. Theory. 1986. V. 32. № 3. P. 445–446.
26. *Liu J., van Hendel R., Verdú S.* Beyond the Blowing-Up Lemma: Sharp Converses via Reverse Hypercontractivity // Proc. 2017 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2017). Aachen, Germany. June 25–30, 2017. P. 943–947.
27. *Oohama Y.* Strong Converse Exponent for Degraded Broadcast Channels at Rates Outside the Capacity Region // Proc. 2015 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2015). Hong Kong, China. June 14–19, 2015. P. 939–943.
28. *Oohama Y.* Exponent Function for Asymmetric Broadcast Channels at Rates Outside the Capacity Region // Proc. 2016 IEE Int. Sympos. on Information Theory and Its Applications (ISITA'2016). Monterey, CA, USA. October 30 – November 2, 2016. P. 537–541.
29. *Tan V.Y.F.* On the Reliability Function of the Discrete Memoryless Relay Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. № 4. P. 1550–1573.
30. *Arıkan E., Merhav N.* Guessing Subject to Distortion // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 3. P. 1041–1056.
31. *Kelly B.G., Wagner A.B.* Reliability in Source Coding with Side Information. `arXiv:1109.0923 [cs.IT]`, 2011.
32. *Petersen K.B., Pedersen M.S.* The Matrix Cookbook. Technical Univ. of Denmark, 2012. Available at `http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/p.php?3274`.
33. *Санов И.Н.* О вероятности больших отклонений случайных величин // Матем. сб. 1957. Т. 42 (84). № 1. С. 11–44.

Фон Сайлас Лик Хан
Факультет электротехники и компьютерной техники,
Университет Торонто, Торонто, Онтарио, Канада
`silas.fong@utoronto.ca`
Тань Винсент Янь Фу
Факультет электротехники и компьютерной техники,
факультет математики,
Национальный университет Сингапура, Сингапур
`vtan@nus.edu.sg`

Поступила в редакцию
24.07.2018
После доработки
16.01.2019
Принята к публикации
18.01.2019