

УДК 621.391.1:519.2

© 2019 г. К. Арендт, Я. Нётцель¹, Х. Бохе²**НАДЕЖНАЯ СВЯЗЬ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ
ПО СОСТОЯНИЯМ: ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ВЗГЛЯД
НА РАЗНЕСЕННЫЙ ПРИЕМ**

Исследуется влияние антенного разнесения на надежность связи по произвольно меняющимся каналам (ПМК). Во-первых, вводится и мотивируется понятие помех с одинаковыми ограничениями по состояниям. Во-вторых, доказывается, что симметризуемости двоичных симметричных ПМК (ПМДСК), вызываемой помехами с одинаковыми ограничениями по состояниям, можно избежать, если передача ведется не менее чем по трем ортогональным каналам. В-третьих, доказывается, что пропускная способность при детерминированном кодировании ПМДСК с одинаковыми ограничениями по состояниям непрерывна и обладает свойством суперактивации. Ранее этот эффект был показан только для квантовой передачи информации и классической передачи с ограничениями по секретности.

Ключевые слова: произвольно меняющийся канал, неизвестные помехи, детерминированное кодирование, разнесенный прием, суперактивация, непрерывность.

DOI: 10.1134/S0555292319020013

§ 1. Введение

Хорошо изученная модель произвольно меняющихся каналов (ПМК) была введена в [1] для учета неопределенности шума/помех в канале. Кроме того, ПМК и передача информации при неопределенности в канале обсуждаются в общем виде в [2, 3]. Модель ПМК основана на том принципе, что источник помех может управлять состоянием канала произвольным образом. Важным при этом является вопрос, возможна ли надежная передача информации по ПМК. Передача по ПМК на положительных скоростях может быть возможной при кодировании с использованием совместной случайности (СС-кодирования), даже если без таковой она невозможна [4]. СС-кодирование характеризуется тем, что передатчик и приемник наблюдают идеально коррелированные выходы случайного эксперимента. На практике совместную случайность можно обеспечить с помощью спутникового сигнала или общей

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Исследовательского фонда Германии (DFG) (номера грантов NO 1129/1-1 и NO 1129/2-1), Федерального министерства экономики и энергетики Германии и Европейского социального фонда (номер гранта 03EFHNS102), Европейского исследовательского совета (расширенный грант по проекту IRQUAT), Министерства экономики и конкуренции Испании (номер проекта FIS2013-40627-P) и Межведомственной комиссии по научно-технологическим инновациям при правительстве Каталонии (номер проекта 2014 SGR 966).

² Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Исследовательского фонда Германии (DFG) (номер гранта BO 1734/20-1) и Федерального министерства образования и науки Германии (номера грантов 01BQ1050 и 16KIS0118).

процедуры синхронизации [5]. Она используется для координации выбора конкретного кода из общей библиотеки кодовых книг. Напротив того, при детерминированном кодировании передачу по ПМК на положительных скоростях нельзя обеспечить во многих случаях, где она гарантирована при наличии совместной случайности, поскольку ПМК может быть симметризуемым. В этом случае источник помех может выбирать свои входы таким образом, что любые два кодовых слова будут неразличимы на декодере. В [6] Чисар и Нарайан доказали, что несимметризуемость ПМК является достаточным условием положительности пропускной способности при детерминированном кодировании с критерием средней вероятности ошибки. Кроме того, знаменитый результат Алсведе [7] утверждает, что пропускная способность при детерминированном кодировании дискретного ПМК без памяти равна либо его СС-пропускной способности, либо нулю (дихотомия Алсведе). Таким образом, совместная случайность, совместно используемая передатчиком и приемником, может сдвинуть пропускную способность с нуля. Известны явные примеры этого эффекта [7]. В качестве альтернативы совместной случайности для надежной передачи по симметризуемым ПМК можно использовать слабо коррелированные сигналы. Это понятие было введено в [8] и затем исследовано в [9, 10]. В [9] было показано, что для произвольно меняющегося широкополосного канала при длине блока n достаточно не более $O(\log n)$ выходов коррелированных источников для достижения такой же пропускной способности, что и при координации с использованием совместной случайности. Тем не менее, чтобы гарантировать надежную передачу сообщений при наличии помех, когда канал симметризуем, во всех предшествовавших работах предполагалось наличие некоторого внешнего вспомогательного механизма, не доступного генератору помех, – будь то канал или источник. Подведем итог: использование СС-кодирования – многообещающий подход, теоретически позволяющий бороться с произвольно меняющимися помехами. Однако когда дело доходит до практической реализации, наличие общего источника случайности для кодера и декодера равносильно использованию дополнительного канала управления, который может иметься далеко не всегда. Таким образом, практическая значимость детерминированных кодов для обеспечения надежной связи на практике не подлежит сомнению.

Альтернативной техникой координации является размещение многих антенн на передающем и/или приемном конце, приводящее к схемам с многими входами и одним выходом, одним входом и многими выходами (SIMO) или многими входами и многими выходами (MIMO) соответственно. Помимо увеличения скорости передачи данных, в таких системах используется разнесение антенн, т.е. каждая антенна наблюдает более-менее некоррелированную версию переданного сигнала (сигналов). Однако, насколько известно авторам, не существует никакой теории, связывающей антенное разнесение с симметризуемостью ПМК. Этот пробел ликвидируется в данной статье, где показываются возможности различных схем разнесения в сценариях с произвольно меняющимися помехами. В сценариях классической передачи здравый смысл подсказывает, что пропускная способность системы, состоящей из нескольких параллельных каналов, равна нулю, если пропускная способность каждого отдельного канала равна нулю. Напротив, явление суперактивации, хорошо известное в квантовой физике, утверждает, что классические соображения аддитивности для основных ресурсов не верны в общем случае, как впервые было отмечено в [11]. Для классических моделей каналов суперактивация, являющаяся наиболее сильной формой нарушения аддитивности, впервые была продемонстрирована в контексте произвольно меняющихся каналов с подслушиванием (см., например, [10, 12–14]). Каналы с подслушиванием учитывают секретность, т.е. защиту информации от перехвата сообщений в теоретико-информационной постановке. Для этого класса каналов совместное использование нескольких ортогональных каналов обеспечивает суперактивацию пропускной способности конфиденциальной переда-

чи, что является первым примером в классической постановке [10, 13, 14]. Супераддитивность – более слабая форма нарушения аддитивности пропускной способности ортогональных каналов. Явление супераддитивности имеет долгую историю в классической теории информации: Алсведе в [15] показал, что рассмотрение выражений для пропускной способности в контексте ПМК с критерием максимальной ошибки при детерминированном кодировании тесно связано с задачей Шеннона о пропускной способности с нулевой ошибкой для дискретного канала без памяти (ДКБП). В 1956 г. Шеннон выдвинул предположение [16], что пропускная способность с нулевой ошибкой ортогонального ДКБП аддитивна. Через сорок лет Алон [17] опроверг эту гипотезу, показав супераддитивность пропускной способности с нулевой ошибкой. Для ортогональных ПМК общего вида без ограничений на помехи пропускная способность передачи сообщений с критерием средней вероятности ошибки не может обладать свойством суперактивации. Однако вместо этого может возникать супераддитивность [14].

В настоящей статье представлена схема борьбы с помехами, основанная на разнесенном приеме при помехах с ограничениями по состояниям. В отличие от [6] наша схема нацелена на избежание симметризуемости, а не на возможность передачи на положительных скоростях по симметризуемым каналам при наложении ограничений по мощности, хотя влияние таких ограничений мы также рассматриваем в теореме 7. Кроме того, отличие от [18] состоит в том, что наши результаты (за одним исключением) основаны на детерминированных схемах кодирования. Одна из основных целей данной статьи – показать, что в случае составного независимого ПМДСК с одинаковыми ограничениями по состояниям (о.о.с.) возникает суперактивация. Таким образом, пропускная способность такой составной системы может быть положительной даже в ситуациях, когда каждая индивидуальная пропускная способность равна нулю. Эти результаты подчеркивают важность стабилизирующего эффекта, оказываемого разнесенным приемом на линию связи.

Для полноты исследований мы также приводим анализ непрерывности пропускной способности при детерминированном кодировании. Непрерывная зависимость параметров системы, особенно на множестве неопределенности в контексте ПМК, является существенным аспектом любой системы связи. Если резкие потери могут быть вызваны малыми изменениями параметров системы, то нельзя гарантировать устойчивость лежащего в основе системы метода передачи информации. Для классической передачи вопрос непрерывности обсуждается редко. Однако в квантовом случае имеются работы, в которых обсуждается непрерывность для квантовых каналов [19], в том числе произвольно меняющихся [20]. Более того, в [21] исследуется непрерывность в классической передаче при ограничениях по секретности. В общем случае пропускная способность симметризуемого ПМК при детерминированном кодировании разрывна на множестве неопределенности, в то время как СС-пропускная способность обладает непрерывной зависимостью. Мы показываем, что для составного независимого ПМДСК с о.о.с. даже пропускная способность при детерминированном кодировании непрерывна на множестве неопределенности. Насколько нам известно, составной независимый ПМК с о.о.с. с разнесением – первый сценарий классической передачи по ПМК, где C_d непрерывна при отсутствии дополнительных ограничений по секретности.

Структура статьи. Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру. В начале в § 2 вводятся обозначения и основные модели каналов. В § 3 определяются кодовые понятия и показатели производительности. Затем в § 4 формулируется основной результат, который показывает, что за исключением тривиальных случаев добавление третьего некоррелированного ортогонального канала уже позволяет избежать симметризуемости для составного независимого ПМДСК с о.о.с. Кроме того, показывается, что пропускная способность составного ПМДСК с о.о.с. обладает свойством суперактивации, если на источник помех и передатчик наложены соот-

ветствующие ограничения по мощности или если исключаются практически мало-значимые комбинации каналов-состояний. Доказательства основного результата и дальнейших результатов приведены в § 5. В § 6 обсуждаются практическое применение полученных результатов в контексте взаимодействия между транспортными средствами и даются рекомендации для дальнейшего построения систем. Наконец, в § 7 обсуждаются следствия полученных результатов и намечаются направления дальнейших исследований.

§ 2. Модель системы и основные модели каналов

Мы придерживаемся обозначений, принятых в [13, 22–24]. Для $L \in \mathbb{N}_{>0}$ положим $[L] := \{1, \dots, L\}$. Множество перестановок на $[L]$ обозначим через S_L . Пусть даны два множества \mathcal{X} и \mathcal{Y} мощности $|\mathcal{X}| = L_{\mathcal{X}}$ и $|\mathcal{Y}| = L_{\mathcal{Y}}$, где $L_{\mathcal{X}}, L_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{N}_{>0}$. Их произведением является множество

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \{(x, y) : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}. \quad (1)$$

Через \mathcal{X}^n обозначим произведение n экземпляров множества \mathcal{X} для любого $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Множество распределений вероятностей на конечном множестве \mathcal{X} обозначим через

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) := \left\{ p : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{X}, \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1 \right\}. \quad (2)$$

Важным подмножеством элементов множества $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ является множество его экстремальных точек, т.е. мер Дирака: для $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ определим $\delta_{x_1} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ как $\delta_{x_1}(x_2) = \delta(x_1, x_2)$, где $\delta(\cdot, \cdot)$ – обычный символ Кронекера. Чтобы использовать структурные свойства, перенесем вероятностные понятия на язык линейной алгебры, считая, что $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ вложено в $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}}$ с помощью биекции $p \mapsto \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x)e_x$. При

таком отображении δ_x переходит в фиксированный базис $\{e_x\}_{x \in \mathcal{X}}$, что делает возможным естественное использование матричной алгебры в наших вычислениях. Мы представим лишь результаты из полилинейной алгебры для двухкомпонентных систем; обобщение на многомерный случай очевидно. Кроме базиса $\{e_x\}_{x \in \mathcal{X}}$ в $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}}$ будем использовать второй фиксированный базис $\{e_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$ в $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{Y}}}$. Матрицы размера $L_{\mathcal{X}} \times L_{\mathcal{Y}}$ задают линейные отображения из $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}}$ в $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{Y}}}$ своим действием в этих базисах. Тензорным произведением пространств $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}}$ и $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{Y}}}$ является $\mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}} \otimes \mathbb{R}^{L_{\mathcal{Y}}} := \text{span} \{e_x \otimes e_y\}_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}}$. Это позволяет определить так называемые “векторы-произведения” двух векторов $u = \sum_{x \in \mathcal{X}} u_x e_x$ и $v = \sum_{y \in \mathcal{Y}} v_y e_y$ как

$$u \otimes v := \sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} u_x v_y e_x \otimes e_y. \quad (3)$$

Векторное пространство $\mathbb{R}^L \otimes \mathbb{R}^{L'}$ наследует скалярное произведение по формуле $\langle u \otimes v, x \otimes y \rangle := \langle u, x \rangle \langle v, y \rangle$. Пространство $(L \times L')$ -матриц обозначается через $M_{L \times L'}$. Для заданных $A, B \in M_{L \times L'}$ определим матрицу $A \otimes B$ через ее действие на векторах-произведениях:

$$(A \otimes B)(u \otimes v) := (Au) \otimes (Bv). \quad (4)$$

Чтобы упростить дальнейшие обозначения, для $u \in \mathbb{R}^{L_{\mathcal{X}}}$ и $n \in \mathbb{N}_{>0}$ обозначим через $u^{\otimes n} := u \otimes \dots \otimes u$ тензорное произведение n экземпляров вектора u . Соответственно, для $A \in M_{L_{\mathcal{X}} \times L_{\mathcal{Y}}}$ обозначим $A^{\otimes n} := A \otimes \dots \otimes A$.

Влияние шума при передаче сообщений моделируется стохастическими матрицами W условных распределений вероятностей $(w(y|x))_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}}$, элементы которых

удовлетворяют условию $\forall x \in \mathcal{X}: w(\cdot|x) \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Любая такая матрица в дальнейшем будет также называться каналом. Множество каналов, действующих на конечных алфавитах \mathcal{X} размера $L_{\mathcal{X}}$ и \mathcal{Y} размера $L_{\mathcal{Y}}$, обозначается через $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Специальный случай, когда $\forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}: w(y|x) = \delta(y, x)$, обозначается через Id. Важный подкласс каналов возникает в случае двоичного алфавита ($L_{\mathcal{X}} = L_{\mathcal{Y}} = 2$). В этом случае каждая матрица канала W полностью характеризуется двумя параметрами в следующем смысле:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ 1 - w_1 & 1 - w_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Если $w_2 = 1 - w_1$, то такой канал называется двоичным симметричным каналом (ДСК). Всякий ДСК с вероятностью перемены бита $1 - w$, обозначаемый через $\text{BSC}(w)$, полностью задается своим параметром ДСК w . Специальный случай ДСК – канал с переключением битов, где $w = 0$, обозначаемый через \mathbb{F} . Для аккуратного моделирования влияния конкретных стратегий источника помех в вероятностном контексте вводится понятие произвольно меняющегося канала (ПМК): вероятностный закон, управляющий передачей кодовых слов по ПМК прямой связи при n обращениях к каналу, имеет вид

$$w^{\otimes n}(y^n | x^n, s^n) = \prod_{i=1}^n w(y_i | x_i, s_i), \quad (6)$$

где $s^n = (s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{S}^n$ – входы злоумышленника, управляющие состоянием канала, $x^n = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ – входные слова кодера, а $y^n = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}^n$ – выход канала на приемном конце, причем предполагается, что все они берутся из конечных алфавитов. Введенное понятие естественным образом обобщается на произведения ПМК. Пусть, например, имеются $K = 2$ ДКБП, обозначаемые через W_1 и W_2 и отображающие \mathcal{X}_1 в \mathcal{Y}_1 и \mathcal{X}_2 в \mathcal{Y}_2 соответственно, с матрицами вероятностей переходов $(w_1(y_1 | x_1))_{x_1 \in \mathcal{X}_1, y_1 \in \mathcal{Y}_1}$ и $(w_2(y_2 | x_2))_{x_2 \in \mathcal{X}_2, y_2 \in \mathcal{Y}_2}$. Тогда матрица вероятностей переходов канала $W_1 \otimes W_2$ определяется как $w(y_1, y_2 | x_1, x_2) := w_1(y_1 | x_1) \cdot w_2(y_2 | x_2)$ для всех $x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y_1 \in \mathcal{Y}_1, y_2 \in \mathcal{Y}_2$. Это понятие можно адаптировать и для произвольно меняющихся каналов:

Определение 1 (произвольно меняющийся канал). Пусть $\mathcal{S}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – конечные множества. Произвольно меняющийся канал (ПМК) – это набор $\mathcal{W} := (W_s)_{s \in \mathcal{S}}$, где $W_s \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ для любого $s \in \mathcal{S}$. Альтернативными обозначениями являются $w(y|x, s) := w_s(y|x)$ или $W_s(\delta_x) = w_s(\cdot|x)$ для всех $s \in \mathcal{S}, x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$. Действие ПМК полностью описывается последовательностью $((W_{s^n})_{s^n \in \mathcal{S}^n})_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, где $W_{s^n} = W_{s_1} \otimes \dots \otimes W_{s_n}$.

В дальнейших рассуждениях мы будем использовать энтропию Шеннона распределений $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, которая определяется как $H(p) := - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log(p(x))$. Каждый канал $W: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ с распределением вероятностей $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ задает совместное распределение $\mathcal{P}((X, Y) = (x, y)) := p(x)w(y|x)$ для всех $x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$. Используя введенные выше обозначения, взаимную информацию, которая определяется как $I(X; Y) := H(X) - H(X|Y)$, можно также записать в виде $I(p; W) := I(X, Y)$.

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится расстояние $d(W, W')$ между двумя ДКБП $W, W' \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, которое мы вводим как расстояние по вариации:

$$d(W, W') := \max_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} |w(y|x) - w'(y|x)|.$$

Затем воспользуемся расстоянием Хаусдорфа $D(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ и определим расстояние между двумя ПМК $\mathcal{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$ и $\mathcal{W}' \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}', \mathcal{Y})$ как

$$D(W, W') := \max \{d_1(W, W'), d_2(W, W')\}, \quad (7)$$

где $d_1(W, W')$ и $d_2(W, W')$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} d_1(W, W') &:= \max_{s' \in S'} \min_{s \in S} d(W_s, W'_{s'}), \\ d_2(W, W') &:= \max_{s \in S} \min_{s' \in S'} d(W_s, W'_{s'}). \end{aligned}$$

Для изучения составных ПМК с разнесением введем следующую модель.

Определение 2 (составной ортогональный ПМК). Пусть заданы ПМК \mathcal{W}_i , $i \in [K]$, с входными алфавитами $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_K$, множествами состояний $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_K$ и выходными алфавитами $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$. Определим составной ортогональный ПМК как

$$\mathfrak{W} := \bigotimes_{i=1}^K \mathcal{W}_i. \text{ Имеем}$$

$$w(y_1, \dots, y_K | x_1, \dots, x_K, s_1, \dots, s_K) := \prod_{i=1}^K w_i(y_i | x_i, s_i). \quad (8)$$

Для упрощения дальнейшего анализа будем рассматривать схему разнесения с тривиальным предварительным кодированием, т.е. будем считать, что один и тот же входной символ x передается по всем ПМК одновременно. Этим задается составной ПМК, возникающий при совместном использовании K независимых ПМК (условно независимых относительно общего входа).

Определение 3 (составной независимый ПМК). Пусть заданы ПМК \mathcal{W}_i , где $i \in [K]$, с входным алфавитом \mathcal{X} , множествами состояний $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_K$ и выходными алфавитами $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$. Определим составной независимый ПМК как $\mathfrak{W}_{\text{CI}} = \mathfrak{W} \circ \circ (\text{Id} \otimes E)$, где отображение $E: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_K$ задается условием $e(x_1, \dots, x_K | x) := \prod_{i=1}^K \delta(x_i, x)$. Эквивалентным образом,

$$w_{\text{CI}}(y_1, \dots, y_K | x, s_1, \dots, s_K) := \prod_{i=1}^K w_i(y_i | x, s_i). \quad (9)$$

В дальнейшем анализе мы накладываем дополнительные ограничения на возможную стратегию источника помех в модели ПМК, получая составной независимый ПМК с локальными ограничениями по состояниям. Будем предполагать, что источник помех может использовать лишь один и тот же вход для совместного управления всеми K каналами, т.е. $s_K = \dots = s_1$ в определениях 2 и 3. Это реалистичное предположение для моделей связи, где вероятности в (6) получаются из линейной суперпозиции электромагнитных волн (по частоте или времени) на приемных антеннах, а источник помех не имеет возможности настраивать свой вход канала для K ветвей разнесения по отдельности.

Определение 4 (составной независимый ПМК с локальными ограничениями по состояниям). Пусть $K \in \mathbb{N}_{>0}$, и пусть $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K$ – ПМК с входным алфавитом \mathcal{X} , множествами состояний $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_K$ и выходными алфавитами $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_K$. Составной независимый ПМК с локальными ограничениями по состояниям, возникающий из этих каналов, задается выбором подмножества $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_K$ как

$$\mathfrak{W}_{\text{CI,lo-c}} := (W_{1,s_1} \otimes \dots \otimes W_{K,s_K})_{s^K \in \mathcal{S}}. \quad (10)$$

Специальным случаем ПМК с локальными ограничениями по состояниям является составной независимый ПМК с одинаковыми ограничениями по состояниям $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$, где $\mathcal{S}_1 = \dots = \mathcal{S}_K$ и $\mathcal{S} := \{s^K : s_1 = \dots = s_K\}$. Аналогично определяется составной ортогональный ПМК с одинаковыми ограничениями по состояниям $\mathfrak{W}_{\text{id-c}}$.

Замечание 1. Если источник помех с одинаковыми ограничениями по состояниям использует вероятностную стратегию, где его вход выбирается случайным образом в соответствии с распределением $q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, то эффективным распределением на входе канала с одинаковыми ограничениями по состояниям будет

$$q^{(K)} := \sum_{s \in \mathcal{S}} q(s) \delta_s^{\otimes K}. \quad (11)$$

Определим множество всех таких входных распределений $q^{(K)}$:

$$\mathcal{P}^{(K)}(\mathcal{S}) := \{q^{(K)} : q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})\}. \quad (12)$$

Ограничение источника помех входами такого вида дает нам возможность в доказательстве теоремы 1 применять методы факторного анализа с зависимыми переменными [23].

Замечание 2. Заметим, что индивидуальные каналы составного независимого ПМК с о.о.с. условно независимы при условии на вход канала (входное слово и входное состояние).

Замечание 3. Условие одинакового ограничения на состояния тривиально переносится на случай составного ортогонального ПМК.

На рис. 1 показана блок-схема описанного выше составного независимого ПМК при помехах с о.о.с. Следуя [6], в теореме 7 настоящей статьи мы используем ограничение по мощности, ограничивающее стратегию источника помех.

Определение 5 (помехи с ограничением по мощности). Пусть $K \in \mathbb{N}_{>0}$, и пусть $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K$ – ПМК с множеством локальных ограничений \mathcal{S} . Пусть $l: \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)$ и $\Lambda > 0$. Множество состояний источника помех с ограничением по мощности определяется как $\mathcal{S}_\Lambda^n := \left\{s^n \in \mathcal{S}^n : \sum_{i=1}^n l(s_i) \leq \Lambda \cdot n\right\}$.

Аналогично ограничим стратегию на входе:

Определение 6 (ограничение по входной мощности). Пусть \mathcal{W} – ПМК с входным алфавитом \mathcal{X} . Пусть $g: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ и $\Gamma > 0$. Множество входных последовательностей с ограничением по мощности определяется как $\mathcal{X}_\Gamma^n := \left\{x^n \in \mathcal{X}^n : \sum_{i=1}^n g(x_i) \leq \Gamma \cdot n\right\}$.

Замечание 4. Мы будем рассматривать только двоичные ПМК, т.е. $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ с двумя состояниями $\mathcal{S} = \{1, 2\}$, а в качестве функций стоимости используем $l(s) := s - 1$ и $g(p) = p$.

§ 3. Кодовые понятия и характеристики производительности

Определим понятия кода, скорости передачи и пропускной способности для передачи по составному независимому ПМК с о.о.с. Эти определения обобщаются на случай составных ортогональных ПМК с о.о.с. путем замены входного алфавита \mathcal{X} на $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_K$, что дает большую гибкость на этапе предварительного кодирования.

Поскольку наши результаты основаны на двоичных алфавитах, в дальнейшем будем определять все кодовые понятия только для специального случая, когда $\mathcal{X}_1 = \dots = \mathcal{X}_K = \mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}_1 = \dots = \mathcal{Y}_K = \mathcal{Y}$. Обобщение на более общий случай очевидно.

Определение 7 (детерминированный код). Детерминированный (не использующий дополнительные средства) код \mathcal{M}_n для составного независимого ПМК с о.о.с. $\mathcal{W}_{\text{CI, id-c}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}^K)$, где $K \in \mathbb{N}_{>0}$, состоит из множества \mathcal{M}_n сообщений и детерминированного кодера $f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{X}^n$ в сочетании с набором $\{\mathcal{D}_m\}_{m \in \mathcal{M}_n}$

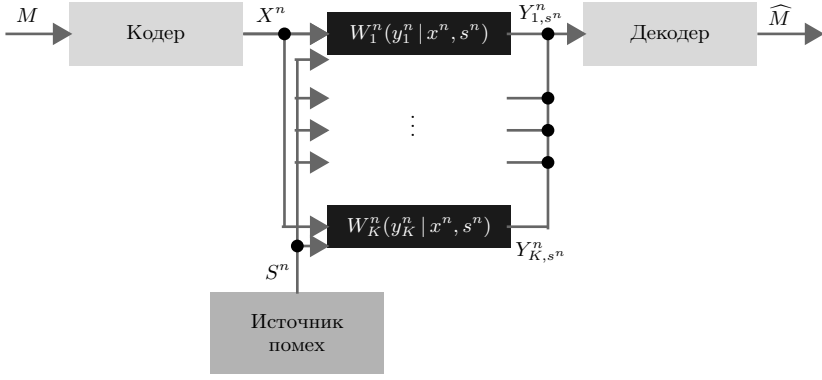


Рис. 1. Блок-схема составного независимого ПМК с одинаковыми ограничениями по состояниям. Состояние всех K параллельных каналов управляется одной и той же последовательностью состояний $s^n \in \mathcal{S}^n$, выбираемой источником помех

декодирующих подмножеств $\mathcal{D}_m \subset \mathcal{Y}^K$, для которых $\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_{m'} = \emptyset$ при любом $m \neq m'$. Средняя вероятность ошибки декодирования кода \mathcal{K}_n имеет вид

$$\bar{e}_{\text{UA}}(\mathcal{K}_n) := 1 - \min_{s^n \in \mathcal{S}^n} \frac{1}{|\mathcal{M}_n|} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} w^{\otimes n}(\mathcal{D}_m | f(m), s^n). \quad (13)$$

Более сложные схемы кодирования и декодирования могут возникать при доступе к дополнительному координационному ресурсу, т.е. множеству Γ возможных реализаций случайной величины (совместной случайности), совместно доступной легальным участникам. Передатчик и приемник могут использовать $\gamma \in \Gamma$ для координации своего выбора кодеров и декодеров с целью обеспечения надежной связи в обход симметризуемости.

Определение 8 (код с совместной случайностью). Код с совместной случайностью \mathcal{K}_n для составного независимого ПМК с о.о.с. $\mathcal{W}_{\text{CI,id-c}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}^K)$, $K \in \mathbb{N}_{>0}$, состоит из множества \mathcal{M}_n сообщений, множества Γ случайных выходов источника совместной случайности и множества стохастических кодеров $E^\gamma \in \mathcal{C}(\mathcal{M}_n, \mathcal{X}^n)$ в сочетании с набором $\{\mathcal{D}_m^\gamma\}_{m \in \mathcal{M}_n, \gamma \in \Gamma}$ декодирующих подмножеств \mathcal{D}_m^γ , для которых $\mathcal{D}_m^\gamma \cap \mathcal{D}_{m'}^\gamma = \emptyset$ при всех $\gamma \in \Gamma$, $m \neq m'$. Средняя ошибка декодирования для СС-кода \mathcal{K}_n имеет вид

$$\bar{e}_{\text{RA}}(\mathcal{K}_n) := 1 - \min_{s^n \in \mathcal{S}^n} \frac{1}{|\mathcal{M}_n| \cdot |\Gamma|} \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} e^\gamma(x^n | m) w^{\otimes n}(\mathcal{D}_m^\gamma | x^n, s^n). \quad (14)$$

Определение 9 (достижимая скорость передачи). Неотрицательное число R называется *достижимой скоростью* передачи по составному независимому ПМК с о.о.с. $\mathcal{W}_{\text{CI,id-c}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}^K)$, $K \in \mathbb{N}_{>0}$, с критерием средней вероятности ошибки, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и достаточно больших n существует детерминированный код \mathcal{K}_n , такой что $\frac{\log |\mathcal{K}_n|}{n} > R - \delta$ и $\bar{e}_{\text{UA}} < \varepsilon$.

Такое число называется *достижимой скоростью* при СС-кодировании в канале $\mathcal{W}_{\text{CI,id-c}}$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и достаточно больших n существует СС-код \mathcal{K}_n , такой что $\frac{\log |\mathcal{K}_n|}{n} > R - \delta$ и $\bar{e}_{\text{RA}} < \varepsilon$.

Определение 10 (пропускная способность). Пусть $K \in \mathbb{N}_{>0}$, и пусть заданы K независимых ПМК $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$. Пропускная способность при де-

терминированном кодировании составного независимого ПМК с одинаковыми ограничениями по состояниям $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ определяется как

$$C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) := \sup \left\{ R \mid \begin{array}{l} R - \text{достижимая скорость при детерминированном} \\ \text{кодировании и ограничении по состояниям } \mathcal{S} = \\ = \{s^K : s_1 = \dots = s_K\} \end{array} \right\}.$$

СС-пропускная способность канала $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ определяется как

$$C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) := \sup \left\{ R \mid \begin{array}{l} R - \text{достижимая скорость при СС-кодировании и} \\ \text{ограничении по состояниям } \mathcal{S} = \{s^K : s_1 = \dots = s_K\} \end{array} \right\}.$$

Кроме того, определим пропускную способность при детерминированном кодировании составного независимого ПМК с ограничениями по мощности состояний Λ и мощности входа Γ :

$$C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}, \Lambda, \Gamma) := \sup \left\{ R \mid \begin{array}{l} R - \text{достижимая скорость при детерминированном} \\ \text{кодировании с ограничением по состояниям } \mathcal{S} = \{s^K : s_1 = \dots = s_K\} \\ \text{и ограничениями по мощности } \Lambda \text{ и } \Gamma \end{array} \right\}.$$

Аналогично определяется СС-пропускная способность с ограничениями по мощности:

$$C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}, \Lambda, \Gamma) := \sup \left\{ R \mid \begin{array}{l} R - \text{достижимая скорость при СС-кодировании} \\ \text{с ограничением по состояниям } \mathcal{S} = \{s^K : s_1 = \dots = s_K\} \\ \text{и ограничениями по мощности } \Lambda \text{ и } \Gamma \end{array} \right\}.$$

Для понятия симметризуемости мы придерживаемся стандартных определений в контексте произвольно меняющихся каналов (см., например, [2]).

Определение 11 (симметризуемость). ПМК $\mathcal{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$ называется симметризуемым, если для некоторого $U \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ равенство

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} w(y|x, s)u(s|x') = \sum_{s \in \mathcal{S}} w(y|x', s)u(s|x), \quad (15)$$

выполнено для всех $x, x' \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Если U и \mathcal{W} удовлетворяют условию (15), то U называется *симметризатором для \mathcal{W}* . Если \mathcal{W} известен из контекста, то U называется просто *симметризатором*.

В [8, 25] это определение было адаптировано к произвольно меняющимся каналам множественного доступа, что привело к понятию частичной симметризуемости.

Для перенесения результатов о суперактивации со случая составного независимо ПМК на случай составного ортогонального ПМК будем использовать следующую функцию, которая впервые была введена в квантовой постановке в [26], а затем использовалась при изучении каналов классической передачи в [13] и которая численно оценивает, насколько данный ПМК далек от симметризуемого.

Определение 12. Пусть $p > 0$. Определим функции $F_p: \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ как

$$F_p(\mathcal{W}') := \min_{U \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{S})} \max_{x \neq x'} \left\| \sum_{s \in \mathcal{S}} W'(\delta_{x'} \otimes \delta_s)u(s|x) - \sum_{s \in \mathcal{S}} W'(\delta_x \otimes \delta_s)u(s|x') \right\|_p \quad (16)$$

для каждого $\mathcal{W}' = (w'(\cdot|\cdot, s))_{s \in \mathcal{S}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$, где через $\|\cdot\|_p$ обозначена p -норма. В дальнейшем вместо F_p будем писать $F_z := F_p$, $z > 0$, во избежание путаницы с распределением вероятностей $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Замечание 5. Сравнивая определения 11 и 12, становится очевидно, что условие $\exists z: F_z(\mathcal{W}') = 0$ равносильно тому, что \mathcal{W} симметризуем. При этом $\exists z: F_z(\mathcal{W}') = 0$ тогда и только тогда, когда $\forall z: F_z(\mathcal{W}') = 0$.

Теперь приведем формальное определение явления суперактивации.

Определение 13 (суперактивация). Пусть дан составной независимый ПМК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$, где $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$, $K \in \mathbb{N}_{>0}$. Будем говорить, что пропускная способность C канала $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ обладает свойством суперактивации, если найдутся $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K$, такие что

$$C(\mathcal{W}_1) = C(\mathcal{W}_2) = \dots = C(\mathcal{W}_K) = 0, \quad (17)$$

но

$$C(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0. \quad (18)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением ПМДСК и покажем, что использования трех независимых ПМДСК или же трех ортогональных ПМДСК в составном канале уже достаточно для избежания симметризуемости, за исключением некоторых специальных, но тривиальных и практически не значимых случаев.

§ 4. Основные результаты

В основной части настоящей статьи мы сконцентрируемся на изучении влияния разнесенного приема на характеристики передачи информации по ПМК. Наши основные результаты показывают, почему передача по многим параллельным ПМК с использованием разнесенного приема может быть существенным фактором надежности в сценариях произвольно меняющейся передачи, особенно если для передачи информации используются ПМДСК.

4.1. Симметризуемость и пропускная способность составного независимого ПМДСК с о.о.с.

Имеет место следующая

Теорема 1 (несимметризуемость составных независимых ПМДСК с о.о.с.). Пусть $K = 3$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ – составной независимый ПМДСК с о.о.с., состоящий из каналов $\mathcal{W}_1 = \{W_{1,1}, W_{1,2}\}$, $\mathcal{W}_2 = \{W_{2,1}, W_{2,2}\}$ и $\mathcal{W}_3 = \{W_{3,1}, W_{3,2}\}$. Пусть с каждым каналом-состоянием $W_{i,j}$ связан соответствующий параметр ДСК $w_{i,j}$. Кроме того, пусть $w_{i,1} \neq w_{i,2}$ и $w_{i,j} \neq 1/2$ для всех $i \in [3]$, $j \in [2]$, а также $w_{1,1} \neq 1 - w_{1,2} \vee w_{2,1} \neq 1 - w_{2,2} \vee w_{3,1} \neq 1 - w_{3,2}$. Тогда канал $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ не симметризуем в смысле определения 11.

Замечание 6. На первый взгляд, указанное исключение является недостатком теоремы, однако при ближайшем рассмотрении видно, что этот случай не имеет практической значимости. В этом исключительном случае первый канал-состояние каждого из ПМДСК является обращенной версией второго, что довольно редко может встретиться на практике. Кроме того, если канал $\text{BSC}(p)$ имеет свойство $p(1) = 1/2$, то такой канал полностью рандомизирует любой вход. В такой ситуации от остальных участников системы связи потребуются самые значительные усилия для улучшения передачи. Если же $w_{i,1} = w_{i,2}$ для любого $i \in [3]$, то источник помех вовсе не оказывает влияния на i -ю линию связи, которую в таком случае можно моделировать как обычный ДКБП.

Следствие 1. Пусть $K > 3$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ – составной независимый ПМДСК с о.о.с. Если существует подмножество $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}} \subset \mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$, для которого выполнены условия теоремы 1, то канал $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ не симметризуем в смысле определения 11.

Теперь рассмотрим симметризуемость составных независимых ПМДСК с о.о.с. при $K = 2$ и симметризуемость однолинейного ПМДСК ($K = 1$).

Теорема 2 (симметризуемость составного независимого ПМДСК при $K = 2$). Пусть $\mathcal{S} = [2]$ и $K = 2$. Пусть $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ – составной независимый ПМДСК с о.о.с., состоящий из каналов \mathcal{W}_1 и \mathcal{W}_2 с каналами-состояниями $W_{1,1}, W_{1,2}$ и $W_{2,1}, W_{2,2}$ соответственно. Пусть $w_{2,2} = 1 - w_{2,1}$. Тогда канал $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ симметризуем в смысле определения 11 для всех пар $(w_{1,1}, w_{1,2})$, таких что $w_{1,2} = 1 - w_{1,1}$.

Замечание 7. В специальном случае, когда $w_{1,2} = 1 - w_{1,1}$, числа каналов $K = 2$ уже достаточно для предотвращения симметризации, за исключением случая, в котором $w_{2,2} = 1 - w_{2,1}$.

Теорема 3 (симметризуемость ПМДСК при $K = 1$). Пусть $\mathcal{S} = [2]$, и пусть $\mathcal{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$ – ПМДСК с каналами-состояниями $W_{1,1}$ и $W_{1,2}$. Пусть параметр $w_{1,1} \in [0, 1/2]$ фиксирован. Тогда канал \mathcal{W} симметризуем в смысле определения 11, если $w_{1,2} \in (1/2, 1]$, причем в качестве симметризирующей стратегии можно выбрать любой канал $U \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, удовлетворяющий условию

$$u(1|0) + u(1|1) = \frac{1 - 2w_{1,2}}{w_{1,1} - w_{1,2}}. \quad (19)$$

Отметим, что $(1 - 2w_{1,2})/(w_{1,1} - w_{1,2}) \in (0, 2)$ при таких ограничениях на $w_{1,1}$ и $w_{1,2}$, так что может существовать много симметризаторов U .

Замечание 8. Теорема 3 утверждает, что для любого $w_{1,2} \in (1/2, 1]$ существует стратегия источника помех, симметризирующая канал \mathcal{W} , что приводит к нулевой пропускной способности канала. Соответственно, множество симметризуемых ПМДСК при $K = 1$ велико. Сравнивая результат для $K = 1$ с условиями симметризуемости независимых ПМК в теореме 1, легко видеть, что использование двух дополнительных независимых ветвей разнесения при передаче по ПМК позволяет сузить множество симметризуемых каналов до небольшого подмножества тривиальных каналов, малозначимых в практических приложениях.

В следующем примере, сравнивая результаты теорем 1–3, мы явно укажем разницу в симметризуемости между случаями $K = 1$, $K = 2$ и $K = 3$, продемонстрировав сокращение мощности множества симметризуемых ПМК в этих трех случаях.

Пример. Вначале рассмотрим результат теоремы 3. Напомним, что для однолинейного ПМК ($K = 1$) с фиксированной стратегией $q^{(1)}$ каждый ПМДСК \mathcal{W} симметризуем – для этого параметры ДСК $w_{1,1}$ и $w_{1,2}$ соответствующих каналов-состояний $W_{1,1}$ и $W_{1,2}$ должны без ограничения общности удовлетворять условиям $w_{1,1} \in [0, 1/2]$ и $w_{1,2} \in (1/2, 1]$.

Теперь положим $\mathcal{U}_{CS} := \{(w_{1,1}, w_{1,2}) : w_{1,1} \in [0, 1/2), w_{1,2} \in (1/2, 1]\}$ и определим следующие двоичные симметричные ПМК с двумя состояниями: $\mathcal{W}(w_{1,1}, w_{1,2}) := \{\text{BSC}(w_{1,1}), \text{BSC}(w_{1,2})\}$ для всех $(w_{1,1}, w_{1,2}) \in \mathcal{U}_{CS}$. Определим также множества $\mathcal{U}_K((w_{2,1}, w_{2,2}) \dots (w_{K,1}, w_{K,2}))$, $K \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_K((w_{2,1}, w_{2,2}), \dots, (w_{K,1}, w_{K,2})) &:= \\ &:= \left\{ \begin{array}{l} (w_{1,1}, w_{1,2}) \in \mathcal{U}_{CS} : \exists (w_{2,1}, w_{2,2}), \dots, (w_{K,1}, w_{K,2}), \text{ такие что канал} \\ W(w_{1,1}, w_{1,2}) \otimes_{i=2}^K W(w_{i,1}, w_{i,2}) \text{ симметризуем при помехах с о.о.с.} \end{array} \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Из теоремы 3 известно, что $\mathcal{U}_1() = \mathcal{U}_{CS}$ для $K = 1$. Для $K = 2$ теорема 2 показывает, что $\mathcal{U}_2((w_{2,1}, 1 - w_{2,1})) = \{(w_{1,1}, w_{1,2}) \in \mathcal{U}_{CS} : w_{1,2} = 1 - w_{1,1}\}$. В этих двух случаях множество \mathcal{U} является плоскостью ($K = 1$) или прямой с угловым коэффициентом -1 ($K = 2$) соответственно (см. рис. 2 (а), (б)). Таким образом, множество

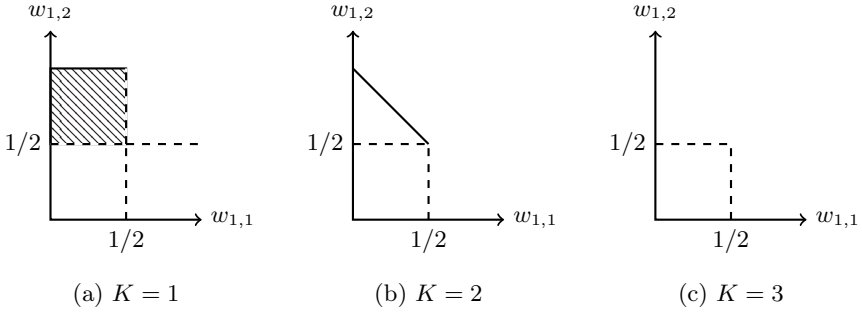


Рис. 2. Симметризуемые составные независимые ПМДСК с о.о.с. с параметрами $w_{1,1}$ и $w_{1,2}$. Показаны множества \mathcal{U}_K для $K = 1, 2, 3$

возможных стратегий, приводящих к симметризации, в геометрическом представлении сужается с плоскости до прямой при увеличении K от одного до двух.

Теперь обратимся к случаю, когда для передачи доступны три независимых ветви разнесения ПМК, т.е. $K = 3$. Это позволяет использовать результат теоремы 1, которая утверждает, что при $K = 3$ и $w_{3,2} \neq 1 - w_{3,1}$ справедливо равенство

$$\mathcal{U}_3((w_{2,1}, 1 - w_{2,1}), (w_{3,1}, w_{3,2})) = \emptyset. \quad (21)$$

Таким образом, при $K = 3$ множество \mathcal{U}_3 является пустым (см. рис. 2 (c)).

Показанное на рисунке сужение множества \mathcal{U} подчеркивает важность разнесения для обеспечения надежной связи. Передача по составному ПМК с о.о.с., состоящему из трех или более независимых ПМДСК, позволяет избежать симметризуемости, за исключением тривиальных случаев. Обеспечение устойчивости к отказам является одним из важнейших вопросов при стандартизации и сертификации методов и технологий в сценариях с высокими требованиями к надежности. Использование систем связи, спроектированных в соответствии с требованиями теоремы 1, позволяет гарантировать положительную пропускную способность линии беспроводной связи даже в присутствии неизвестных и произвольно меняющихся помех.

Теорема 4 (пропускная способность ПМДСК). Пусть $K = 3$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть дан составной независимый ПМДСК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ с K компонентами, не относящийся к исключениям, перечисленным в теореме 1. Тогда детерминированная и СС-пропускная способность C_d и C_r канала $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ имеют вид

$$C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = \min_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})} \max_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} I\left(p; \sum_{s=1}^2 q(s) \bigotimes_{i=1}^K W_{i,s}\right). \quad (22)$$

Замечание 9. Из теоремы 4 с учетом результатов работ [13, 26] с использованием расстояния, введенного в определении 12, немедленно вытекает непрерывность C_d . Таким образом, для любого составного независимого ПМК $\mathfrak{W}'_{\text{CI,id-c}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}^K)$ существует $\delta > 0$, такое что для всех $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y}^K)$, таких что $D(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}, \mathfrak{W}'_{\text{CI,id-c}}) < \delta$, выполнено $C_d(\mathfrak{W}'_{\text{CI,id-c}}) > 0 \implies C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0$. Определение расстояния $D(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ дано в (7).

4.2. Суперактивация пропускных способностей для составного независимого ПМДСК с о.о.с. В [14] утверждается, что "... суперактивация при надежной связи по ортогональным ПМК невозможна", и таким образом, является отличительной особенностью ортогональных произвольно меняющихся каналов с подслушиванием. Если источник помех не имеет ограничений и может изменять свою стратегию

в каждом канале отдельно, то это утверждение не вызывает сомнений. Однако следующая теорема показывает, что для составного независимого ПМДСК с о.о.с. возникает совершенно неожиданное явление.

Теорема 5 (суперактивация детерминированной и СС-пропускной способности составного независимого ПМК с о.о.с.). Пусть $K = 3$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть дан составной независимый ПМК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$, состоящий из трех ПМДСК $\mathcal{W}_1 = \{W_{1,1}, W_{1,2}\}$, $\mathcal{W}_2 = \{W_{2,1}, W_{2,2}\}$ и $\mathcal{W}_3 = \{W_{3,1}, W_{3,2}\}$. Пусть параметры ДСК $w_{i,s}$ для i -го канала удовлетворяют условиям $w_{1,1}, w_{2,1}, w_{3,1} \in [0, 1/2]$ и $w_{1,2}, w_{2,2}, w_{3,2} \in (1/2, 1]$. Кроме того, пусть $w_{1,1} \neq 1 - w_{1,2} \vee w_{2,1} \neq 1 - w_{2,2} \vee w_{3,1} \neq 1 - w_{3,2}$. Тогда для $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$ справедливы следующие утверждения:

1. $C_d(\mathcal{W}_1) = C_d(\mathcal{W}_2) = C_d(\mathcal{W}_3) = 0$, но $C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0$, т.е. пропускная способность при детерминированном кодировании обладает свойством суперактивации;
2. $C_r(\mathcal{W}_1) = C_r(\mathcal{W}_2) = C_r(\mathcal{W}_3) = 0$, но $C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0$, т.е. СС-пропускная способность обладает свойством суперактивации.

Замечание 10. Насколько известно авторам, второе утверждение теоремы 5 является первым описанным случаем суперактивации СС-пропускной способности. До настоящего времени считалось, что суперактивация может возникать лишь для пропускных способностей при детерминированном кодировании. Кроме того, симметризуемость считалась решающим критерием равенства нулю пропускной способности при детерминированном кодировании. Симметризуемость для СС-пропускной способности не столь существенна. Таким образом, утверждение 2 теоремы 5 показывает, какое неожиданное и необычайно сильное влияние оказывает разнесенный прием на передачу по ПМК.

Теорема 5 поднимает вопрос о том, имеется ли разница между двумя явлениями суперактивации – для схем передачи, использующих вспомогательные средства и не использующих. На самом деле, оказывается, что для большого класса составных независимых ПМДСК с о.о.с. не имеет значения, какую пропускную способность использовать как характеристику канала – детерминированную или с использованием совместной случайности. Дальнейший анализ особенно важен для понимания свойств непрерывности пропускной способности C_d при передаче информации по произвольно меняющимся каналам. Наши результаты о непрерывности для составного независимого ПМДСК с о.о.с. обобщает следующая

Теорема 6. Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть дан составной независимый ПМК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$. Условие $\exists z: F_z(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\forall z: F_z(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = 0$, что в свою очередь выполнено тогда и только тогда, когда $C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = 0$. Это равносильно тому, что C_d непрерывна в $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$.

Теорема 6 показывает, что малые изменения в множестве неопределенности составного независимого ПМДСК с о.о.с. вызывают лишь небольшие изменения характеристик соответствующей системы связи. Заключение о непрерывности пропускной способности $C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}})$ в теореме 6 следует из того, что $C_r(\mathcal{W})$ непрерывна в \mathcal{W} для любого ПМДСК \mathcal{W} (включая составные независимые ПМДСК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$).

Теперь рассмотрим специальный случай $w_{1,1} = 1 - w_{1,2} \wedge w_{2,1} = 1 - w_{2,2} \wedge w_{3,1} = 1 - w_{3,2}$, являющийся исключением в теореме 5, для которого из теоремы 1 известно, что этот составной независимый ПМДСК с о.о.с. симметризуем. В следующей теореме мы показываем, что и в этом случае пропускная способность при детерминированном кодировании может быть суперактивирована при наложении ограничений по мощности на стратегии как передатчика, так и источника помех.

Теорема 7 (суперактивация пропускной способности при детерминированном кодировании составного независимого ПМК с о.о.с. с ограничениями по мощности

состояний и входов). Пусть $\mathcal{S} = [2]$, $K = 3$ и $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Пусть дан составной независимый ПМК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI}, \text{id-c}}$, состоящий из трех ПМДСК $\mathcal{W}_1 = \{W_{1,1}, W_{1,2}\}$, $\mathcal{W}_2 = \{W_{2,1}, W_{2,2}\}$ и $\mathcal{W}_3 = \{W_{3,1}, W_{3,2}\}$. Пусть параметры ДСК $w_{i,s}$ для i -го канала удовлетворяют условиям $w_{1,1} = 1 - w_{1,2}$, $w_{2,1} = 1 - w_{2,2}$ и $w_{3,1} = 1 - w_{3,2}$, причем все параметры ДСК не равны $1/2$. Пусть заданы ограничения по мощности: на состояния $\Lambda = 1/2 - \varepsilon$ с функцией стоимости $l(s_i) = 1 - s$ и на вход $\Gamma = 1/2 - \varepsilon$ с целевой функцией $g(x_i) = x$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что пропускная способность при детерминированном кодировании C_d канала $\mathfrak{W}_{\text{CI}, \text{id-c}}$ обладает свойством суперактивации в смысле определения 13, т.е.

$$C_d(\mathcal{W}_1, \Lambda, \Gamma) = C_d(\mathcal{W}_2, \Lambda, \Gamma) = C_d(\mathcal{W}_3, \Lambda, \Gamma) = 0, \quad \text{но} \quad C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI}, \text{id-c}}, \Lambda, \Gamma) > 0. \quad (23)$$

Следствие 2 (суперактивация пропускной способности составного ортогонального ПМДСК с о.о.с.). Утверждения теорем 5 и 7 остаются верными при замене составного независимого ПМДСК с о.о.с. на составной ортогональный ПМДСК с о.о.с.

Замечание 11. Теоремы 5, 7 и следствие 2 показывают, что суперактивация – явление, возникающее не только при ограничениях по секретности. В этих результатах требуются ограничения на состояния, не являющиеся для источника помех нереалистичными с точки зрения практических приложений. Кроме того, ограничение $\mathcal{S} = [2]$ для источника помех имеет практическое следствие для двухуровневой амплитудной модуляции. Теоремы 5, 7 и следствие 2 в сочетании с теоремой 1 дают принципиально новый взгляд на принцип симметризуемости, а также на методы и пути обхода симметризуемости в реальных приложениях с помощью разнесенного приема.

Наложение одинаковых ограничений по состояниям на стратегию источника помех делает возможным передачу на положительных скоростях по составному ПМК. И наоборот, очевидно, что при отказе от этих ограничений из индивидуальной симметризуемости ортогональных каналов $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_K \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$ немедленно следует симметризуемость составных ортогональных ПМК $\mathfrak{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{X}^K \times \mathcal{S}^K, \mathcal{Y}^K)$. В этом случае симметризующей стратегией будет просто произведение стратегий. Таким образом, если позволить источнику помех выбирать стратегии в соответствующих подканалах по отдельности, то надежная связь при отсутствии координации будет невозможна, поскольку симметризуемость может препятствовать передаче по составному ПМК на положительных скоростях. Резюмируем вышесказанное: разнесение в сочетании с превосходством легальных пользователей над источником помех в смысле большего количества антенн или большего числа степеней свободы при предварительном кодировании является фактором, позволяющим обеспечить надежную связь по ПМК и предотвратить отказ системы.

§ 5. Доказательства

5.1. Доказательства результатов из п. 4.1.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что для ДСК выполнено следующее соотношение: для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\text{BSC}(a) \circ \text{BSC}(b) = \text{BSC}(b) \circ \text{BSC}(a)$. Чтобы использовать результаты работы [23], сделаем следующую перенумерацию:

$$V_1(\delta_0) = W_{1,1}(\delta_0) = \mathbf{w}_{1,1}, \quad V_1(\delta_1) = W_{1,2}(\delta_0) = \mathbf{w}_{1,2}, \quad (24)$$

$$V_2(\delta_0) = W_{2,1}(\delta_0) = \mathbf{w}_{2,1}, \quad V_2(\delta_1) = W_{2,2}(\delta_0) = \mathbf{w}_{2,2}, \quad (25)$$

$$V_3(\delta_0) = W_{3,1}(\delta_0) = \mathbf{w}_{3,1}, \quad V_3(\delta_1) = W_{3,2}(\delta_0) = \mathbf{w}_{3,2}, \quad (26)$$

$$Y_1(\delta_0) = W_{1,1}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{1,1}), \quad Y_1(\delta_1) = W_{1,2}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{1,2}), \quad (27)$$

$$Y_2(\delta_0) = W_{2,1}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{2,1}), \quad Y_2(\delta_1) = W_{2,2}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{2,2}), \quad (28)$$

$$Y_3(\delta_0) = W_{3,1}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{3,1}), \quad Y_3(\delta_1) = W_{3,2}(\delta_1) = \mathbb{F}(\mathbf{w}_{3,2}), \quad (29)$$

где для действительного числа x полагаем $\mathbf{x} := (x, 1 - x)$. Заметим, что $Y_i(\delta_0) = \mathbb{F} \circ V_i(\delta_0)$ и $Y_i(\delta_1) = \mathbb{F} \circ V_i(\delta_1)$ для всех $i \in [3]$. Теперь модифицированное условие симметризуемости из определения 11

$$\sum_{s=1}^2 q(s) \bigotimes_{i=1}^3 (W_{i,s}(\delta_0)) = \sum_{s=1}^2 q'(s) \bigotimes_{i=1}^3 (W_{i,s}(\delta_1)) \quad (30)$$

можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\sum_{s=1}^2 q(s) \bigotimes_{i=1}^3 \mathbf{w}_{i,s} = \sum_{s=1}^2 q'(s) (\mathbb{F}^{\otimes 3}) \left(\bigotimes_{i=1}^3 \mathbf{w}_{i,s} \right), \quad (31)$$

где $\mathbf{w}_{i,s}$ – векторы. Находя из уравнения (31) стратегию источника помех $q^{(3)} := \sum_{s=1}^2 q(s) \delta_s^{\otimes 3}$, получаем

$$q^{(3)} = \left(\bigotimes_{i=1}^3 (V_i^{-1} \circ \mathbb{F} \circ V_i) \right) q'^{(3)} = \left(\bigotimes_{i=1}^3 X_i \right) q'^{(3)}, \quad (32)$$

где $X_i = V_i^{-1} \circ \mathbb{F} \circ V_i$ для всех $i \in [3]$. Обратные к V_i матрицы существуют для всех $i \in [3]$, поскольку по предположению каналы-состояния ПМК различны. Для двоичных алфавитов это равносильно обратимости. В специальных случаях, когда $q(s) = q'(s') = 1$ для некоторого выбора $s, s' \in \mathcal{S}$, теорема доказывается очень просто. Для этого явно вычислим матрицы X_i :

$$X_i = V_i^{-1} \circ \mathbb{F} \circ V_i = \quad (33)$$

$$= \det(V_i) \begin{pmatrix} 1 - w_{i,2} & -w_{i,2} \\ w_{i,1} - 1 & w_{i,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{i,1} & w_{i,2} \\ 1 - w_{i,1} & 1 - w_{i,2} \end{pmatrix} = \quad (34)$$

$$= \frac{1}{w_{i,1} - w_{i,2}} \begin{pmatrix} 1 - w_{i,1} - w_{i,2} & 1 - 2w_{i,2} \\ -1 + 2w_{i,1} & -1 + w_{i,1} + w_{i,2} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В вышеуказанных специальных случаях уравнение (33) имеет решения V_i , $i \in [3]$, имеющие вид либо $V_i = \text{BSC}(1/2)$, либо $V_i = \text{BSC}(w_{i,1})$. Поскольку первое из этих решений исключено по условию, остается только второй случай, поэтому в этих специальных случаях теорема доказана. Теперь рассмотрим более общий случай, когда $q(1), q'(1) \in (0, 1)$. Здесь можно применить результат из [23, теорема 1]: для любой перестановки $\tau \in S_2$ имеем $X_1 = X_2 = X_3 = \tau^{-1}$, $q' = \tau(q)$. Отсюда

$$\frac{1}{w_{1,1} - w_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 - w_{1,1} - w_{1,2} & 1 - 2w_{1,2} \\ -1 + 2w_{1,1} & -1 + w_{1,1} + w_{1,2} \end{pmatrix} = \tau^{-1}. \quad (36)$$

Единственной матрицей перестановки, для которой выполняется равенство (36), является $\tau^{-1} = \mathbb{F}$. Таким образом, все V_i – ДСК, что следует из соотношений

$$V_i = \mathbb{F} \circ V_i \circ \mathbb{F}, \quad i \in [3]. \quad (37)$$

Объединяя (37) и (30) и используя тот факт, что $q'(2) = q(1)$ (см. [23]), получаем $W_{1,s} = \mathbb{F} \circ W_{1,s}$, $W_{2,s} = \mathbb{F} \circ W_{2,s}$ и $W_{3,s} = \mathbb{F} \circ W_{3,s}$, или, что то же самое, $q(1) = q(2) = 1/2$ и $w_{1,2} = \mathbb{F}(w_{1,1})$, $w_{2,2} = \mathbb{F}(w_{2,1})$ и $w_{3,2} = \mathbb{F}(w_{3,1})$. Но этот случай исключен по условию. Таким образом, теорема полностью доказана. \blacktriangle

Доказательство теоремы 2. Напомним, что $w_{2,2} = 1 - w_{2,1}$. Отсюда следует, что $V_2 = \text{BSC}(w_{2,1})$. Снова воспользуемся тем, что для ДСК с любыми двумя параметрами ДСК $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо $\text{BSC}(a) \circ \text{BSC}(b) = \text{BSC}(b) \circ \text{BSC}(a)$. Применяя это соотношение к (33) при $i = 2$, получаем $V_2^{-1} \circ \mathbb{F} \circ V_2 = V_2^{-1} \circ V_2 \circ \mathbb{F} = \mathbb{F}$, поэтому (32) принимает вид

$$q^{(2)} = (X_1 \otimes \mathbb{F})q^{(2)}. \quad (38)$$

Теперь воспользуемся оператором частичного следа $\text{tr}_{[L']}: \mathbb{R}^L \otimes \mathbb{R}^{L'} \rightarrow \mathbb{R}^L$ по “содержимому” пространства $\mathbb{R}^{L'}$, который определяется следующим образом: для $v = \sum_{i,j=1}^{L,L'} v_{i,j} \delta_i \otimes \delta_j$ положим

$$\text{tr}_{[L']}(v) := \sum_{i,j=1}^{L,L'} v_{i,j} \delta_j. \quad (39)$$

Вычисляя частичный след по первой системе, непосредственно получаем $q' = \mathbb{F}(q)$. Возвращаясь к соотношению (38), получаем

$$q^{(2)} = (X_1 \otimes \mathbb{F})q^{(2)} = \quad (40)$$

$$= (X_1 \otimes \text{Id})(\text{Id} \otimes \mathbb{F})q^{(2)} = \quad (41)$$

$$= (X_1 \otimes \text{Id}) \sum_{j,i} q'(j)(1 - \delta(i,j)) \delta_i \otimes \delta_j = \quad (42)$$

$$= (X_1 \otimes \text{Id})(q(1)\delta_2 \otimes \delta_1 + q(2)\delta_1 \otimes \delta_2) = \quad (43)$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 q(j)x_{(i,1 \oplus j)} \delta_i \otimes \delta_j, \quad (44)$$

где $\oplus: \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a \oplus b := a + (b \bmod 2)$. В специальных случаях, где, например, $q(1) = q'(2) = 1$ или $q(2) = q'(1) = 1$, множество решений уравнения (40) имеет вид

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} x & 1 \\ 1-x & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & x \\ 1 & 1-x \end{array} \right) \right\}, \quad (45)$$

что с учетом (33) и (35) приводит к заключению, что $w_{1,1} = 1 - w_{1,2}$. Во всех остальных случаях покомпонентное сравнение дает $X_1 = X_2 = \mathbb{F}$. В силу (36) отсюда следует, что и во всех этих случаях $w_{1,1} = 1 - w_{1,2}$. \blacktriangle

Замечание 12. Общий случай при $K = 2$ остается открытой проблемой, поскольку X_i в общем случае не являются ДСК. Если предположить, что все X_i – ДСК, решение дается теоремой 3 из работы [24].

Доказательство теоремы 3. Пусть матрицы вероятностей переходов двух ПМДСК с каналами-состояниями $W_{1,1}$ и $W_{1,2}$ имеют вид

$$W_{1,1} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & 1 - w_{1,1} \\ 1 - w_{1,1} & w_{1,1} \end{pmatrix}, \quad W_{1,2} = \begin{pmatrix} w_{1,2} & 1 - w_{1,2} \\ 1 - w_{1,2} & w_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Напомним, что мы исключаем тривиальные случаи, в которых $w_{1,1} = w_{1,2} = 1/2$. Теперь проверим критерий симметризуемости:

$$\begin{aligned} u(1|0)(w_{1,1} \cdot \delta_0 + (1 - w_{1,1})\delta_1) + (1 - u(1|0))(w_{1,2} \cdot \delta_0 + (1 - w_{1,2})\delta_1) = \\ = u(1|1)((1 - w_{1,1})\delta_0 + w_{1,1} \cdot \delta_1) + (1 - u(1|1))((1 - w_{1,2})\delta_0 + w_{1,2} \cdot \delta_1). \end{aligned} \quad (47)$$

Это равносильно следующим двум уравнениям:

$$u(1|0) \cdot w_{1,1} + (1 - u(1|0))w_{1,2} = u(1|1)(1 - w_{1,1}) + (1 - u(1|1))(1 - w_{1,2}), \quad (48)$$

$$u(1|0)(1 - w_{1,1}) + (1 - u(1|0))(1 - w_{1,2}) = u(1|1) \cdot w_{1,1} + (1 - u(1|1))w_{1,2}. \quad (49)$$

Так как $w_{1,1} \in [0, 1/2)$ фиксировано, то очевидно, что равенства (48), (49) будут выполнены для произвольного $w_{1,2} \in [1/2, 1]$ при подходящем выборе $u(1|0)$ и $u(1|1)$ в соответствии с (19). \blacktriangle

Доказательство теоремы 4. Теорема 4 следует из теоремы 1 работы [6] с учетом того, что теорема 1 гарантирует несимметризуемость. Таким образом, пропускная способность при детерминированном кодировании равна СС-пропускной способности. \blacktriangle

5.2. Доказательства результатов из п. 4.2.

Доказательство теоремы 5. Первая часть утверждения 1 теоремы 5 дается теоремой 3. По поводу второй части утверждения 1 из теоремы 1 работы [7] с учетом результатов работ [6, 18] следует, что пропускная способность при детерминированном кодировании несимметризуемого ПМК с критерием средней вероятности ошибки равна либо его СС-пропускной способности, либо нулю. Кроме того, из теоремы 1 известно, что составной ПМДСК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ несимметризуем. Таким образом, $C_d(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) = C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}})$. Теми же рассуждениями, что и в [6], покажем, что несимметризуемость канала $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ является достаточным условием того, что $C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0$. Предположим противное: пусть

$$\min_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})} \max_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} I\left(p; \sum_{s=1}^2 q(s) \bigotimes_{i=1}^K W_{i,s}\right) = 0 \quad (50)$$

для несимметризуемого составного независимого ПМДСК с о.о.с. $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$. В таком случае выходы ПМДСК $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ и \mathcal{W}_3 канала $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ в (50) не зависят от $p(x)$ при $p(x) > 0$ для всех $x \in \mathcal{X}$, т.е.

$$P_{Y_1, Y_2, Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \sum_{s \in \mathcal{S}} W_1(y_1 | x, s) W_2(y_2 | x, s) W_3(y_3 | x, s) q(s) \quad (51)$$

не зависит от x . Следовательно, получаем постоянные независимые каналы. Из этого в свою очередь вытекает тривиальная симметризуемость, полагая $u(\cdot | x) = q(\cdot)$, что противоречит предположению. Таким образом, из несимметризуемости $\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}$ следует, что $C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI,id-c}}) > 0$. Утверждение 1 теоремы 5 доказано.

Для доказательства утверждения 2 остается показать, что $C_r(\mathcal{W}_1) = C_r(\mathcal{W}_2) = C_r(\mathcal{W}_3) = 0$. Для этого определим выпуклую оболочку множества ПМДСК как

$$\text{conv}(\mathcal{W}) := \left\{ W = \sum_{s=1}^2 q(s) W_s : q \in \mathcal{P}(\mathcal{S}) \right\}. \quad (52)$$

Из [1, 4, 27] известно, что СС-пропускная способность отдельного ПМК имеет вид

$$C_r(W) = \min_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})} \max_{p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} I\left(p, \sum_{s=1}^2 q(s) W_s\right). \quad (53)$$

Заметим, что для каждого из индивидуальных ПМДСК \mathcal{W}_i , $i \in [3]$, справедливо $\text{BSC}(1/2) \in \text{conv}(\mathcal{W}_i)$, причем $I(p, \text{BSC}(1/2)) = 0$. Таким образом, из (53) и того факта, что минимизацию и максимизацию в (53) можно поменять местами, как следует из выпуклости взаимной информации по каналу, получаем $C_r(\mathcal{W}_i) = 0$ для всех $i \in [3]$. \blacktriangle

Для доказательства теоремы 6 нам понадобится следующая

Лемма. Пусть $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ и $\mathcal{S} = [2]$. Пусть $\mathcal{W} \in \mathcal{C}(\mathcal{X} \times \mathcal{S}, \mathcal{Y})$ – произвольный ПМК. Для любого $r \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ обозначим через $T_r \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ соответствующий “мусорный канал”, определяемый как $T(p) = r \ \forall p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Выпуклое множество всех мусорных каналов обозначим через $\mathcal{T} := \{T_r : r \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})\}$. Если $F_z(\mathcal{W}) = 0$ для некоторого $z > 0$ и $u(1|1) = u(1|0)$ в (16), то существуют $q \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$ и $r \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, такие что

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s = T_r. \quad (54)$$

Отсюда следует, что $I\left(p; \sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s\right) = 0$ для всех $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Доказательство леммы. Для доказательства леммы просто подставим $u(1|1) = u(1|0)$ в (16). Положим $\lambda := u(1|1)$ и $\mu := u(1|0)$. Имеем

$$\lambda w(\cdot|0, 1) + (1 - \lambda)w(\cdot|0, 2) = \mu w(\cdot|1, 1) + (1 - \mu)w(\cdot|1, 2). \quad (55)$$

Далее, при $\lambda = \mu$ получаем

$$\lambda w(\cdot|0, 1) + (1 - \lambda)w(\cdot|0, 2) = \lambda w(\cdot|1, 1) + (1 - \lambda)w(\cdot|1, 2). \quad (56)$$

Теперь положим $q(1) := \lambda$ и $q(2) := (1 - \lambda)$. Тогда (56) принимает вид

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s(\delta_0) = \sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s(\delta_1). \quad (57)$$

Обозначая $r := \sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s(\delta_0)$, отсюда непосредственно получаем $\sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s(\delta_1) = r$, и таким образом, $\sum_{s \in \mathcal{S}} q(s)W_s = T_r$. \blacktriangle

Доказательство теоремы 6. По предположению $F_z(\mathfrak{W}_{\text{CI, id-c}}) = 0, \ \forall z > 0$. Тогда существует симметризатор $U \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, такой что

$$\left\| \sum_{s \in \mathcal{S}} u(s|x) \bigotimes_{i=1}^K W_i(\delta_{x'} \otimes \delta_s) - \sum_{s \in \mathcal{S}} u(s|x') \bigotimes_{i=1}^K W_i(\delta_x \otimes \delta_s) \right\|_z = 0. \quad (58)$$

Для краткости обозначим $\lambda := u(1|1)$, $\mu := u(1|0)$ и $\mathbf{a}_i := w_i(\cdot|0, 1)$, $\mathbf{b}_i := w_i(\cdot|0, 2)$, $i \in [K]$. Для $z > 0$ положим

$$f_z(\lambda, \mu) := \left\| \lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right\|_z. \quad (59)$$

Тогда, поскольку $\mathbb{F} \circ \text{BSC}(a) = \text{BSC}(a) \circ \mathbb{F}$ для всех a , из (58) вытекает $f_z(\lambda, \mu) = 0$ для всех $z > 0$.

Заметим, что выбор нормы, по которой вычисляется $f_z(\lambda, \mu)$, не важен для исследования симметризуемости, поскольку нас интересуют лишь случаи, в которых выражение под знаком нормы равно нулю. Таким образом, для упрощения вычислений будем рассматривать 2-норму, т.е. полагать $z = 2$. Так как $\|\cdot\|_2$ – унитарно

инвариантная норма, а $\mathbb{F}^{\otimes K}$ – унитарная матрица, то

$$\begin{aligned}
f_2(\lambda, \mu) &= \left\| \lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right\|_2 = \\
&= \left\| \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\left(\lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right) \right\|_2 = \\
&= \left\| \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) - \left(\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right\|_2 = \\
&= f_2(\mu, \lambda). \tag{60}
\end{aligned}$$

Далее, для $p \in [0, 1]$, определяемого как $p := 1/2(\lambda + \mu)$, имеем

$$\begin{aligned}
f_2(p, p) &= \left\| p \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - p) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(p \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - p) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right\|_2 = \\
&= \left\| \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + \left(1 - \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \right) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \right. \\
&\quad \left. - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + \left(1 - \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \right) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right\|_2 = \\
&= \left\| \frac{1}{2} \left[\lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\mu \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \mu) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i - \mathbb{F}^{\otimes K} \left(\lambda \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{a}_i + (1 - \lambda) \bigotimes_{i=1}^K \mathbf{b}_i \right) \right] \right\|_2 \leq \\
&\leq \frac{1}{2}(f_2(\lambda, \mu) + f_2(\mu, \lambda)) = 0, \tag{61}
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из условия $f(\lambda, \mu) = f(\mu, \lambda) = 0$. Положим $u'(\cdot | x) = (p, 1 - p)^T$, $\forall x \in \{0, 1\}$. Тогда для всех $z > 0$ имеем

$$\left\| \sum_{s \in \mathcal{S}} u'(s | x) \bigotimes_{i=1}^K W_i(\delta_{x'} \otimes \delta_s) - \sum_{s \in \mathcal{S}} u'(s | x') \bigotimes_{i=1}^K W_i(\delta_x \otimes \delta_s) \right\|_z = f_z(p, p) = 0. \tag{62}$$

Таким образом, u' является симметризатором. Так как $u'(\cdot | x)$ не зависит от x , в силу леммы получаем $C_r(\mathfrak{W}_{\text{CI, id-c}}) = 0$, что завершает доказательство теоремы. \blacktriangle

Доказательство теоремы 7 использует результаты работы [6]. Вначале покажем, что для пропускной способности при детерминированном кодировании индивидуальных каналов имеет место равенство $C_d(\mathcal{W}_i, \Lambda, \Gamma) = 0$ для всех $i \in [3]$. При $K = 1$ без ограничения общности каналы \mathcal{W}_1 , \mathcal{W}_2 и \mathcal{W}_3 , рассматриваемые по отдельности, симметризуемы для $w_{1,1}, w_{2,1}, w_{3,1} \in [0, 1/2)$ и $w_{1,2}, w_{2,2}, w_{3,2} \in (1/2, 1]$. Для вывода следствий из ограничения по мощности на симметризирующую стратегию сосредоточимся на рассмотрении канала \mathcal{W}_1 . Симметризирующая стратегия при $K = 1$ имеет вид

$$u(1|0) + u(1|1) = \frac{1 - 2w_{1,2}}{w_{1,1} - w_{1,2}}. \tag{63}$$

Обозначим через \mathcal{U} множество каналов $\mathcal{C}(\mathcal{S}, \mathcal{X})$, удовлетворяющих условию симметризуемости в определении 11. Заметим, что при $w_{1,2} = 1 - w_{1,1}$ из (63) следует, что ПМДСК \mathcal{W}_1 симметризуется при любом симметризаторе $U \in \mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{S})$, таком что $u(1|0) + u(1|1) = 1$. Таким образом, U сам по себе является ДСК, и при этом каналы Id и \mathbb{F} попадают в класс симметризаторов. Пусть \mathcal{U} – множество каналов, симметризирующих \mathcal{W}_1 . Теперь, обращаясь к результатам работы [6], вычислим

$$\Lambda_0(p) = \min_{U \in \mathcal{U}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{s \in \mathcal{S}} p(x) u(s|x) l(s) = \quad (64)$$

$$= \min_{U \in \mathcal{U}} (p \cdot u(2|0) + (1-p) \cdot u(2|1)) = \quad (65)$$

$$= \min_{u \in [0,1]} (p(1-2u) + u) = \quad (66)$$

$$= \begin{cases} 1-p, & \text{если } p \geq \frac{1}{2}, \\ p & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (67)$$

где (66) следует из того, что U является ДСК с параметром u . Последний шаг основан на том, что минимум u достигается в граничных точках интервала $[0, 1]$. Заметим, что $\Lambda_0(p, 1-p) \in [0, 1/2]$, причем значение $\Lambda_0(p, 1-p) = 1/2$ достигается при $p = 1/2$. Теперь воспользуемся теоремой 3 из работы [6]. Аналогично определим $g(p) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) g(x)$. Заметим, что в нашей постановке для индивидуальных ПМДСК выполнено

$$\max_{g(p) \leq \Gamma} \Lambda_0(p, 1-p) = \frac{1}{2} - \varepsilon. \quad (68)$$

Тогда теорема 3 с учетом [6, замечание на с. 188] дает $C_d(\mathcal{W}_1, \Lambda, \Gamma) = 0$. В частности, можно выбрать $\varepsilon \in (0, 1/2)$ так, чтобы U_1, U_2, U_3 удовлетворяли ограничению по мощности $\Lambda = 1/2 - \varepsilon$ для $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3$, откуда $C_d(\mathcal{W}_i, \Lambda, \Gamma) = 0$ для всех $i \in [3]$. Заметим, что для составного независимого ПМДСК с о.о.с. $\mathcal{W}_{\text{Cl}, \text{id-c}}$ и $\varepsilon \in (0, 1/2)$ справедливо

$$\max_{g(p) \leq \Gamma} \Lambda_0(p, 1-p) = \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \varepsilon = \Lambda, \quad (69)$$

поскольку минимизация по $U \in \mathcal{U}$ берется по множеству симметризирующих стратегий, которое для составного независимого ПМДСК с о.о.с. состоит из одного элемента: $\mathcal{U} = \{1/2\}$. Таким образом, согласно утверждению 2 теоремы 3 из [6] получаем $C_d(\mathcal{W}_{\text{Cl}, \text{id-c}}, \Lambda, \Gamma) > 0$. ▲

Доказательство следствия 2. Из доказательства теоремы 3 работы [13] известно, что из положительности функций $F_z(\mathcal{W}_{\text{id-c}})$ в определении 12 следует, что канал $\mathcal{W}_{\text{id-c}}$ не симметризуем. Тогда наличие эффекта суперактивации пропускной способности составного ортогонального ПМДСК с о.о.с. является прямым следствием теоремы 1 в сочетании с наблюдением, что если разрешены различные входы соответствующих ветвей разнесения (ортогональных ПМДСК), то максимизация в (16) берется по большему множеству входных алфавитов. Предыдущие рассуждения справедливы как для детерминированной, так и для СС-пропускной способности. Если рассматривать все K каналов по отдельности, то нет никакой разницы между составным независимым и составным ортогональным ПМДСК, т.е. каждый ПМДСК, удовлетворяющий условиям теоремы, симметризуем, поскольку $\text{BSC}(1/2) \in \text{conv}(\mathcal{W}_i)$ для всех $i \in [K]$. Из этого следует равенство нулю как детерминированной, так и СС-пропускной способности. Но если рассматривать совместное использование K ортогональных каналов, то теорема 1 гарантирует несимметризуемость и, тем самым, положительность обеих пропускных способностей. ▲

§ 6. Практическое применение

Хорошо известная технология связи V2X (Vehicle-to-Everything) между автомобилем и другими объектами дорожной инфраструктуры в автомобильных самоорганизующихся сетях является расширением стандарта IEEE 802.11a для беспроводных локальных вычислительных сетей, называемым IEEE 802.11p (в дальнейшем – просто 11p) [28]. На основе этого стандарта в США была разработана технология выделенной связи ближнего действия DSRC (dedicated short range communication), которая в Европе носит название ITS-G5 [29]. Поскольку стандарт 11p предназначен для прямой связи на коротких расстояниях с малой задержкой, в нем нет центрального модуля, управляющего использованием спектральных ресурсов. Поэтому диапазон частот от 5,85 до 5,925 ГГц выделен для совместного использования с самостоятельной координацией. Для предупреждения конфликтов в качестве схемы доступа к среде используется множественный доступ с контролем несущей. Поскольку существуют схемы адаптивного управления с ограничением по мощности, в этих технологиях могут возникать одновременные обращения к каналу, при которых взаимные помехи, создаваемые соответствующими участниками, в общем случае не известны. Такие помехи могут также быть вызваны одновременным использованием различных технологий в одной и той же полосе частот, таких как, например, 11p и интерфейс PC5 для взаимодействия автомобилей между собой по LTE-связи четвертого поколения [30]. В этой ситуации могут возникать конфликты пакетов, вызывающие неограниченные задержки в реальных схемах связи, например, в 11p при игнорировании конфликтующих пакетов, что является серьезным недостатком для обмена критической по времени информацией [31]. Кроме того, в сценариях с быстро и произвольно меняющимися условиями в каналах благодаря блокировке или влиянию второстепенных движущихся объектов в окружении автомобиля условия в канале не всегда можно точно отследить с помощью техники оценки состояния канала. Таким образом, приемник может не иметь никакой информации об актуальных условиях замирания в канале. Чтобы учесть эти возникающие новые случаи в контексте связи с подвижными объектами с высокими требованиями к надежности, должно быть разработано аппаратное обеспечение, работающее должным образом даже в наихудших условиях. Эти требования, накладываемые на разработанные ранее методы связи, приводят к необходимости применения модели ПМК к сценариям связи V2X, что в дальнейшем может охватывать и реальные сценарии помех, когда целью активного злоумышленника будет преднамеренное искажение связи.

В настоящей статье мы обсудили различные варианты модели ПМК, отвечающие следующим реальным сценариям:

1. Технология связи ММО с ограничениями по состояниям источника помех (один вход, управляющий состояниями всех ветвей разнесения одновременно) из-за ограниченного числа передающих антенн у источника помех или тривиальной стратегии предварительного кодирования (составной ортогональный ПМК с одинаковыми ограничениями на состояния – определение 4, продолженное на модель канала из определения 2);
2. Частотное разнесение, подверженное влиянию второй (некоординированной) пары передатчик (Tx) – приемник (Rx), работающей в режиме тривиального разнесения, т.е. один и тот же входной символ посылается на всех рабочих частотах (см. п. 1);
3. Тривиальное пространственное разнесение на приемнике (один входной символ посылается по всем параллельным каналам, что приводит к одному “эффективному” каналу) с целью компенсации произвольных помех от источника с ограничениями по состояниям (составной независимый ПМК с ограничениями по состояниям – определение 4);

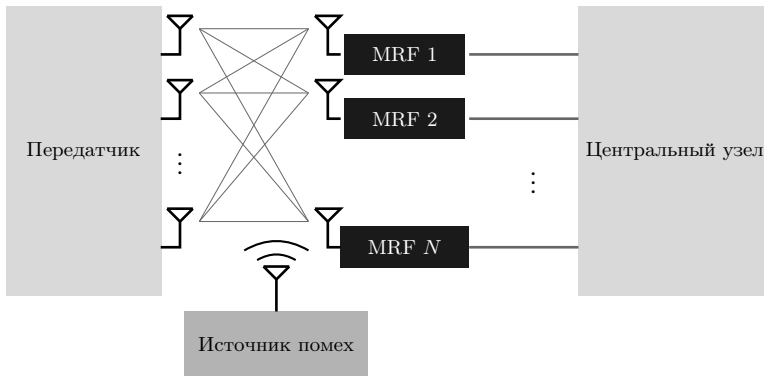


Рис. 3. Модель системы линии связи, включающей распределенную антенную систему (DAS) на приемном конце. Аналого-цифровое преобразование выполняется на точке подачи антенны в интерфейсе радиосвязи с мобильным объектом (MRF). Цифровые данные многих MRF объединяются на центральном узле

- Тривиальное частотное разнесение (один входной символ посылается на всех рабочих частотах) с помехами от второй (некоординированной) пары Tx–Rx, использующей тривиальное разнесение (см. п. 3).

В сценариях, основанных на пространственном разнесении, источник помех можно также заменить второй (некоординированной) парой Tx–Rx, работающей в той же полосе частот. Эта некоординированная пара Tx–Rx может находиться как внутри подвижного объекта (автомобиля), например, при использовании нескольких некоординированных модулей взаимодействия, одновременно работающих в одной полосе частот, так и состоять из двух дополнительных взаимодействующих сторон.

Мы рассматривали передачу по нескольким ортогональным каналам с использованием пространственного или частотного разнесения. В сценарии V2X предположение ортогональности для пространственного разнесения оправдано благодаря тому, что несколько антенн, размещенных на одном и том же движущемся объекте, разнесены таким образом, что возникает так называемая распределенная антенная система (DAS). Схема DAS включает в себя центральный узел управления, связанный с интерфейсами мобильной радиосвязи (MRF) через сеть Ethernet или оптическое волокно. Системное описание схемы DAS приведено на рис. 3. Преимуществом DAS перед широко используемой системой с близко расположенными антеннами состоит в малой корреляции между отдельными элементами антенны, что приводит к “приблизительно” независимым каналам связи. Для обеспечения ортогональности по частоте мы предполагаем, что в используемой схеме мультиплексирования с ортогональным разделением частот не возникает интерференции между несущими.

Из-за высокой мобильности взаимодействия транспортных средств антенны, размещенные на корпусе, могут подвергаться воздействию быстрых изменений в состоянии каналов, вызванных блокировкой электромагнитных волн и/или помехами со стороны других пользователей, конкурирующих за спектральные ресурсы. Хотя антенны в автомобильной распределенной антенной системе расположены достаточно далеко друг от друга, чтобы оправдать предположение о независимости каналов по отношению к шуму, изменение состояния канала, вызванное быстрым изменением эффектов блокировки и помех, происходит примерно одновременно на всех MRF-интерфейсах. Эта практическая ситуация учитывается в нашем анализе как источник помех с одинаковыми ограничениями по состояниям.

Результаты, представленные в теоремах 2 и 3, означают, что автомобильная система связи, использующая единственную приемную антенну, работающую в сце-

нарии ПМК, не может гарантировать безотказную работу в широком диапазоне параметров системы. Возвращаясь к прикладному примеру автомобильной связи для обеспечения безопасности, можно сказать, что такая система будет работать со сбоями при любом процессе сертификации со специальными требованиями к надежности, поскольку полный отказ системы предотвратить невозможно. Однако результаты теорем 1, 5, 7 и следствия 2 показывают, что наличие третьей антенны дает возможность избежать симметризуемости ПМДСК и, таким образом, нулевой пропускной способности составного канала связи при наложении практически обоснованных ограничений на возможности источника помех.

§ 7. Обсуждение результатов и заключение

В статье исследовалось влияние разнесенного приема на надежность связи. Наша модель выгодно отличается от предыдущих тем, что она учитывает потенциальное влияние источника помех. Доказано, что разнесенный прием дает возможность резко увеличить как СС-пропускную способность, так и детерминированную. Что наиболее важно, оказалось, что существует множество каналов, которые могут быть симметризуемыми по отдельности, но становятся несимметризуемыми при работе в режиме SIMO, когда источник помех имеет возможности адаптировать свою стратегию для каждого канала отдельно. Точнее говоря, показано, что для составных независимых ПМК при одинаковых ограничениях по состояниям параллельная связь по трем ортогональным ПМК позволяет избежать симметризуемости и тем самым нулевой пропускной способности, если все рассматриваемые каналы являются независимыми или ортогональными ПМДСК. Особо подчеркнuto, что пропускные способности при детерминированном кодировании составных независимых и ортогональных ПМДСК при помехах с о.о.с. непрерывны и обладают свойством суперактивации, если на стратегии источника помех и передатчика наложены дополнительные ограничения по мощности или если исключены практически малозначимые состояния каналов. Возникновение суперактивации в такой постановке является самой сильной формой нарушения аддитивности для ортогональных ПМК, поскольку для общего составного ортогонального двоичного симметричного ПМК без дополнительных ограничений не возникает ни суперактивация, ни супераддитивность. Пропускная способность ортогональных ПМК без дополнительных ограничений ограничена сверху суммой соответствующих СС-пропускных способностей. Таким образом, СС-пропускную способность можно рассматривать как контрольную величину, характеризующую эффективность связи по ПМК. В настоящей статье показано, что использование антенного разнесения не только делает связь по ПМК более стабильной, но и позволяет уводить от нуля СС-пропускную способность. Этот результат имеет практическую значимость для каналов управления в современных системах связи, где необходимо обеспечивать высокий уровень надежности. Это объясняется тем, что сбой в канале управления немедленно приводит к сбоям всей системы связи в целом, вызывая полный отказ системы.

Итак, представлена концепция разнесенного приема как источника возможности суперактивации и тем самым надежной связи по каналу с произвольно меняющимся шумом. Представленные результаты можно распространить на произвольные сценарии, в которых несколько приемников согласованно используют ПМК при помехах с о.о.с. Чтобы воспользоваться преимуществами этой концепции, одним из основных условий является то, чтобы кооперация приемников осуществлялась без потерь, а каналы от передатчика к кооперирующим приемникам были независимыми. Последнее предположение достигается с помощью пространственного разделения кооперирующих сторон или использования нескольких ортогональных частот в практических приложениях. Важный вопрос для дальнейшего анализа – каким образом этот результат может быть адаптирован к более общим ПМК с произвольным размером алфавита. Однако это, видимо, довольно сложный вопрос, так как

анализ соотношения (35) для не двоичных алфавитов весьма затруднителен. Кроме того, весьма интересно было бы найти конкретное приложение схемы сложения разнесенных сигналов, представленной в нашей предыдущей работе [32].

Первый автор выражает благодарность П. Фертлю и А. Поссельту (концерн BMW) за поддержку его исследований. Кроме того, авторы благодарят рецензента за ценные замечания и тщательное изучение представленной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blackwell D., Breiman L., Thomasian A.J.* The Capacities of Certain Channel Classes under Random Coding // *Ann. Math. Statist.* 1960. V. 31. № 3. P. 558–567.
2. *Lapidoth A., Narayan P.* Reliable Communication under Channel Uncertainty // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1998. V. 44. № 6. P. 2148–2177.
3. *Csiszár I., Körner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2011.
4. *Ahlsvede R., Wolfowitz J.* Correlated Decoding for Channels with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions // *Inform. Control.* 1969. V. 14. № 5. P. 457–473.
5. *Schaefer R.F., Boche H., Poor H.V.* Secure Communication under Channel Uncertainty and Adversarial Attacks // *Proc. IEEE.* 2015. V. 103. № 10. P. 1796–1813.
6. *Csiszár I., Narayan P.* The Capacity of the Arbitrarily Varying Channel Revisited: Positivity, Constraints // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1988. V. 34. № 2. P. 181–193.
7. *Ahlsvede R.* Elimination of Correlation in Random Codes for Arbitrarily Varying Channels // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* 1978. V. 44. № 2. P. 159–175.
8. *Ahlsvede R., Cai N.* Correlated Sources Help Transmission over an Arbitrarily Varying Channel // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1997. V. 43. № 4. P. 1254–1255.
9. *Schaefer R.F., Boche H.* How Much Coordination Is Needed for Robust Broadcasting over Arbitrarily Varying Bidirectional Broadcast Channels // *Proc. 2014 IEEE Int. Conf. on Communications (ICC'2014).* Sydney, Australia. June 10–14, 2014. P. 1872–1877.
10. *Boche H., Schaefer R.F.* Capacity Results, Coordination Resources, and Super-activation in Wiretap Channels // *Proc. 2013 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2013).* Istanbul, Turkey. July 7–12, 2013. P. 1342–1346.
11. *Smith G., Yard J.* Quantum Communication with Zero-Capacity Channels // *Science.* 2008. V. 321. № 5897. P. 1812–1815.
12. *Boche H., Schaefer R.F., Poor H.V.* On Arbitrarily Varying Wiretap Channels for Different Classes of Secrecy Measures // *Proc. 2014 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2014).* Honolulu, HI, USA. June 29–July 4, 2014. P. 2376–2380.
13. *Nötzel J., Wiese M., Boche H.* The Arbitrarily Varying Wiretap Channel—Secret Randomness, Stability, and Super-activation // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2016. V. 62. № 6. P. 3504–3531.
14. *Schaefer R.F., Boche H., Poor H.V.* Super-activation as a Unique Feature of Arbitrarily Varying Wiretap Channels // *Proc. 2016 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2016).* Barcelona, Spain. July 10–15, 2016. P. 3077–3081.
15. *Ahlsvede R.* A Note on the Existence of the Weak Capacity for Channels with Arbitrarily Varying Channel Probability Functions and Its Relation to Shannon's Zero Error Capacity // *Ann. Math. Statist.* 1970. V. 41. № 3. P. 1027–1033.
16. *Shannon C.E.* The Zero Error Capacity of a Noisy Channel // *IRE Trans. Inform. Theory.* 1956. V. 2. № 3. P. 8–19.
17. *Alon N.* The Shannon Capacity of a Union // *Combinatorica.* 1998. V. 18. № 3. P. 301–310.
18. *Ericson T.* Exponential Error Bounds for Random Codes in the Arbitrarily Varying Channel // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1985. V. 31. № 1. P. 42–48.
19. *Leung D., Smith G.* Continuity of Quantum Channel Capacities // *Comm. Math. Phys.* 2009. V. 292. № 1. P. 201–215.

20. *Boche H., Nötzel J.* Positivity, Discontinuity, Finite Resources, Nonzero Error for Arbitrarily Varying Quantum Channels // Proc. 2014 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2014). Honolulu, HI, USA. June 29 – July 4, 2014. P. 541–545.
21. *Boche H., Schaefer R.F., Poor H.V.* On the Continuity of the Secrecy Capacity of Compound and Arbitrarily Varying Wiretap Channels // IEEE Trans. Inf. Forensics Secur. 2015. V. 10. № 12. P. 2531–2546.
22. *Arendt C., Nötzel J., Boche H.* Super-activation of the Composite Independent Arbitrarily Varying Channel under State Constraints // Proc. IEEE Global Communications Conf. (GLOBECOM'2017). Singapore. Dec. 4–8, 2017. P. 1–6.
23. *Nötzel J., Swetly W.* Deducing Truth from Correlation // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 12. P. 7505–7517.
24. *Nötzel J., Arendt C.* Using Dependent Component Analysis for Blind Channel Estimation in Distributed Antenna Systems // Proc. 2016 Global Conf. on Signal and Information Processing (GlobalSIP'2016). Washington, DC, USA. Dec. 7–9, 2016. P. 1116–1121.
25. *Ahlsvede R., Cai N.* Arbitrarily Varying Multiple-Access Channels. II. Correlated Sender's Side Information, Correlated Messages, and Ambiguous Transmission // Proc. 1997 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'97). Ulm, Germany. June 29 – July 4, 1997. P. 23.
26. *Boche H., Nötzel J.* Positivity, Discontinuity, Finite Resources, and Nonzero Error for Arbitrarily Varying Quantum Channels // J. Math. Phys. 2014. V. 55. № 12. P. 122201 (20 pp.).
27. *Stiglitz I.G.* Coding for a Class of Unknown Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 1966. V. 12. № 2. P. 189–195.
28. IEEE 802.11-2016: IEEE Standard for Information Technology—Telecommunications and Information Exchange between Systems. Local and Metropolitan Area Networks—Specific Requirements. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. 2016.
29. ETSI ES 202 663 V1.1.0 (2009-11): ETSI Standard Intelligent Transport Systems (ITS); European Profile Standard for the Physical and Medium Access Control Layer of Intelligent Transport Systems Operating in the 5 GHz Frequency Band. Final draft, 2011.
30. *Uhlemann E.* Initial Steps toward a Cellular Vehicle-to-Everything Standard [Connected Vehicles] // IEEE Veh. Technol. Mag. 2017. V. 12. № 1. P. 14–19.
31. *Khan A., Almeida J., Fernandes B., Alam M., Pedreiras P., Ferreira J.* Towards Reliable Wireless Vehicular Communications // Proc. 2015 IEEE 18th Int. Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC'2015). Canary Islands, Spain. Sept. 15–18, 2015. P. 167–172.
32. *Arendt C., Nötzel J., Boche H.* Evaluation of Distributed Post-Detection Receive Diversity Combining Schemes for Reliable Wireless Communication over Arbitrarily Varying Channels // Proc. 2018 IEEE 88th Vehicular Technology Conf. (VTC-Fall). Chicago, IL, USA. Aug. 27–30, 2018. P. 1–6.

Arendt Кристиан

Концерн BMW, Мюнхен, Германия
 Институт теоретической информационной технологии,
 Технический университет Мюнхена, Германия
 christian.ca.arendt@bmw.de

Поступила в редакцию

13.02.2018

После доработки

05.04.2019

Принята к публикации

15.05.2019

Нётцель Янис

Институт теоретической информационной технологии,
 Технический университет Мюнхена, Германия
 Институт телекоммуникационной инженерии,
 Технический университет Дрездена, Германия
 Отделение теоретической физики: информация и квантовые
 явления, Автономный университет Барселоны, Испания
 janis.noetzel@tu-dresden.de

Бохе Хольгер

Институт теоретической информационной технологии,
 Технический университет Мюнхена, Германия
 boche@tum.de