**ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ**

**Том 55** **2019** **Вып. 3**

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2019 г. **М.Е. Широков**

# ОЦЕНКИ СВЕРХУ ДЛЯ ИНФОРМАЦИИ ХОЛЕВО И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ[1]

Представлено семейство легко вычисляемых оценок сверху для величины Холево ансамбля квантовых состояний, зависящих от референсного состояния (как свободного параметра). Эти оценки получены с учетом вероятностных и метрических характеристик ансамбля. Показано, что при правильном выборе референсного состояния в данном семействе можно получить $\varepsilon$-точные оценки сверху для величины Холево, которые улучшают известные ранее оценки. Также представлены оценки сверху для величины Холево обобщенного ансамбля квантовых состояний с конечной средней энергией, зависящие от метрического размера ансамбля. В случае многомодового квантового осциллятора эти оценки являются $\varepsilon$-точными при больших уровнях энергии. Получены оценки сверху для пропускной способности Холево конечномерных квантовых каналов, зависящие от метрических характеристик множества выходных состояний канала.

*Ключевые слова*: квантовое состояние, ансамбль состояний, энтропия фон Неймана, квантовая относительная энтропия, квантовый канал.

**DOI:** 10.1134/S055529231903001X

## § 1. Введение и предварительные сведения

Информация Холево ансамбля квантовых состояний (также называемая границей или величиной Холево) дает оценку сверху для количества классической информации, которую можно получить за счет квантовых измерений состояний этого ансамбля [1]. Эта величина играет центральную роль при анализе информационных свойств квантовых систем и каналов [2–4].

Информация Холево дискретного (конечного или счетного) ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$ квантовых состояний определяется формулами

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \doteq \sum_i p_i H(\rho_i \,\|\, \bar{\rho}) = H(\bar{\rho}) - \sum_i p_i H(\rho_i), \quad \bar{\rho} = \sum_i p_i \rho_i,$$

где $H(\cdot\|\cdot)$ – квантовая относительная энтропия и $H(\cdot)$ – энтропия фон Неймана (введенные ниже), причем вторая формула справедлива, если $H(\rho_i) < +\infty$ для всех $i$. Поэтому для определения точного значения информации Холево необходимо вычисление энтропии (относительной энтропии) набора квантовых состояний, что требует значительных усилий, особенно в бесконечномерном случае. Поэтому легко вычисляемые оценки для информации Холево представляют интерес как для теоретических исследований, так и для практических задач.

Вопросом нахождения легко вычисляемых оценок (в частности, оценок сверху) для информации Холево занимались многие исследователи [5–9]. Основная идея работ в данном направлении – использовать геометрические и вероятностные характеристики ансамбля для получения эффективных оценок. Например, в работе [7]

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00086).

показано, что в конечномерном случае информация Холево ограничена сверху энтропией матрицы, элементы которой зависят от взаимных точностей воспроизведения (fidelities) состояний ансамбля и их вероятностей. Недавно Ауденаерт доказал в [5] следующую оценку:

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}} S(\{p_i\}), \tag{1}$$

в которой $\upsilon_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\sup\limits_{i,j}\|\rho_i-\rho_j\|_1$ – максимальное расстояние между состояниями ансамбля (по следовой норме), а $S(\{p_i\})$ – энтропия Шеннона распределения вероятностей $\{p_i\}$. Из этой оценки следует, что

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}} \log n, \tag{2}$$

где $n$ – число состояний ансамбля $\{p_i,\rho_i\}$.[2]

Оценка Ауденаерта (1) уточняет известное неравенство $\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant S(\{p_i\})$ за счет учета метрических соотношений между состояниями ансамбля.

В данной статье представлено семейство оценок сверху для информации Холево, зависящих от референсного состояния (как свободного параметра). Эти оценки получены с помощью метода Алицкого – Фаннеса – Винтера, обычно используемого для доказательства равномерной непрерывности функций на множестве квантовых состояний [10,11]. В частности, получено несколько модификаций оценки Ауденаерта (1) и ее следствия (2). Показано, что максимальное расстояние $\upsilon_{\mathrm{m}}$ между состояниями ансамбля в (1) и (2) можно заменить, соответственно, величинами

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\inf_{\sigma}\sup_{i}\|\rho_i-\sigma\|_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\inf_{\sigma}\sum_{i} p_i\|\rho_i-\sigma\|_1,$$

названными *максимальным метрическим размером* и *средним метрическим размером* ансамбля $\{p_i,\rho_i\}$, которые могут быть значительно меньше, чем $\upsilon_{\mathrm{m}}$. Цена такой замены – это появление неустранимого дополнительного слагаемого, не зависящего от размера ансамбля и размерности гильбертова пространства (см. ниже следствия 4, 5).

В § 3 статьи указанные выше результаты используются для получения оценки сверху для пропускной способности Холево конечномерного квантового канала, зависящей от чебышевского радиуса выходного множества этого канала. Полученная оценка пропускной способности Холево оказалась относительно точной для некоторых типов каналов (в частности, деполяризирующего и стирающего).

В статье также получена оценка сверху для информации Холево обобщенного ансамбля квантовых состояний с конечной средней энергией, зависящая от метрического размера ансамбля, и представлен ее конкретный вид для обобщеных ансамблей состояний многомодового квантового осциллятора.

Пусть $\mathcal{H}$ – конечномерное или бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ с операторной нормой $\|\cdot\|$, а $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство ядерных операторов в $\mathcal{H}$ со следовой нормой $\|\cdot\|_1$. Пусть $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – множество квантовых состояний (положительных операторов в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ с единичным следом) [2–4].

Обозначим через $I_{\mathcal{H}}$ единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\}$ с распределением вероятностей $\{p_i\}$ называется (*дискретным*) *ансамблем* и обозначается $\{p_i,\rho_i\}$. Состояние $\bar{\rho} \doteq \sum_i p_i\rho_i$ называется *средним состоянием* этого ансамбля.

[2] В случае $n=2$ неравенство (2) было получено ранее в работе [6].

*Энтропия Шеннона* $S(\{p_i\}) = \sum_i \eta(p_i)$ распределения вероятностей $\{p_i\}$ и *энтропия фон Неймана* $H(\rho) = \operatorname{Tr}\eta(\rho)$ состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, где $\eta(x) = -x\log x$, имеют вогнутые однородные[3] расширения на положительные конусы в $\ell_1$ и в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, определенные, соответственно, формулами (см. [12])

$$S(\{p_i\}) = \sum_i \eta(p_i) - \eta\left(\sum_i p_i\right) \quad \text{и} \quad H(\rho) = \operatorname{Tr}\eta(\rho) - \eta(\operatorname{Tr}\rho). \tag{3}$$

Расширенная энтропия фон Неймана удовлетворяет неравенству [3, 13]

$$\sum_i H(\rho_i) \leqslant H\left(\sum_i \rho_i\right) \leqslant \sum_i H(\rho_i) + S(\{\operatorname{Tr}\rho_i\}), \tag{4}$$

которое выполнено для любого конечного или счетного набора $\{\rho_i\}$ положительных операторов в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ с конечной величиной $\sum_i \operatorname{Tr}\rho_i$. Пусть $h_2(p)$ – бинарная энтропия $S(\{p, 1-p\})$.

*Квантовая относительная энтропия* двух состояний $\rho$ и $\sigma$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ определяется выражением [12, 13]

$$H(\rho\,\|\,\sigma) = \sum_i \langle i\,|\,\rho\log\rho - \rho\log\sigma\,|\,i\rangle,$$

в котором $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов состояния $\rho$ и предполагается, что $H(\rho\,\|\,\sigma) = +\infty$, если носитель $\operatorname{supp}\rho$ состояния $\rho$ не лежит в носителе $\operatorname{supp}\sigma$ состояния $\sigma$.

Будем использовать тождество Дональда [13, 14]

$$\sum_i p_i H(\rho_i\,\|\,\sigma) = \sum_i p_i H(\rho_i\,\|\,\bar{\rho}) + H(\bar{\rho}\,\|\,\sigma), \tag{5}$$

которое имеет место для произвольного ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$ состояний со средним состоянием $\bar{\rho}$ и любого состояния $\sigma$.

На протяжении всей статьи будем использовать следующее

Определение. Оценка сверху $g(x)$ неотрицательной функции $f(x)$ на множестве $X$ называется *$\varepsilon$-точной*, если $\sup_{x\in X} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

## § 2. Оценки сверху для информации Холево

**2.1. Дискретные ансамбли квантовых состояний.** Для любого заданного ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$ из $n \leqslant \infty$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ и любого состояния $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ рассмотрим два ансамбля $\{t_i, \tau_i^+\}$ и $\{t_i, \tau_i^-\}$ из $n$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, где

$$t_i = \frac{p_i\,\|\rho_i - \sigma\|_1}{\sum_i p_i\,\|\rho_i - \sigma\|_1} \quad \text{и} \quad \tau_i^{\pm} = 2\frac{[\rho_i - \sigma]_{\pm}}{\|\rho_i - \sigma\|_1}, \quad i = \overline{1, n},$$

а $[\rho_i - \sigma]_+$ и $[\rho_i - \sigma]_-$ – положительная и отрицательная части оператора $\rho_i - \sigma$ соответственно. Если $\sigma = \rho_{i_0}$ для некоторого $i_0$, то считаем, что оба ансамбля не имеют $i_0$-го состояния.

[3] Функция $f(x)$ называется однородной (порядка 1), если $f(cx) = cf(x)$ для любого $c \geqslant 0$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Информации Холево ансамблей* $\{p_i, \rho_i\}$, $\{t_i, \tau_i^+\}$ *и* $\{t_i, \tau_i^-\}$ *связаны неравенством*

$$\left|\chi(\{p_i,\rho_i\}) - \varepsilon\big(\chi(\{t_i,\tau_i^+\}) - \chi(\{t_i,\tau_i^-\})\big)\right| \leqslant g(\varepsilon), \tag{6}$$

*из которого следует, что*

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \varepsilon\big(\chi(\{t_i,\tau_i^+\}) - \chi(\{t_i,\tau_i^-\})\big) + g(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\chi(\{t_i,\tau_i^+\}) + g(\varepsilon), \tag{7}$$

*где* $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i p_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1$ *и* $g(\varepsilon) \doteq (1+\varepsilon)h_2\Big(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)$. *Следовательно,*[4]

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \varepsilon S\left(\{t_i\}\right) + g(\varepsilon) = S\Big(\Big\{\frac{1}{2}p_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1\Big\}\Big) + g(\varepsilon) \tag{8}$$

*и*

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \varepsilon H\left(\sum_i t_i\tau_i^+\right) + g(\varepsilon) = H\left(\sum_i p_i[\rho_i - \sigma]_+\right) + g(\varepsilon). \tag{9}$$

*Оценки сверху (6)–(9) являются $\varepsilon$-точными в смысле данного выше определения. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют ансамбль $\{p_i,\rho_i\}$ и состояние $\sigma$, такие что* $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i p_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1$ *и*

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) - \varepsilon\big(\chi(\{t_i,\tau_i^+\}) - \chi(\{t_i,\tau_i^-\})\big) = h_2(\varepsilon).$$

*Замечание* 1. Последнее утверждение предложения 1 показывает, что правая часть (6) не может быть меньше, чем функция $h_2(\varepsilon)$, которая эквивалентна функции $g(\varepsilon)$ для малых $\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (6) прямо следует из предложения 1 в [15] (с тривиальной системой $C$). Достаточно взять $qc$-состояния

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^{n} p_i\rho_i \otimes |i\rangle\langle i| \quad \text{и} \quad \sigma_{AB} = \sum_{i=1}^{n} p_i\sigma \otimes |i\rangle\langle i|,$$

где $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}$ и $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $n$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_B$, и заметить, что $\rho_B = \sigma_B$,

$$I(A\!:\!B)_\rho = \chi(\{p_i,\rho_i\}), \quad I(A\!:\!B)_\sigma = 0 \quad \text{и} \quad I(A\!:\!B)_{\tau_\pm} = \chi(\{t_i,\tau_i^\pm\}),$$

где $\tau_\pm = \varepsilon^{-1}[\rho - \sigma]_\pm$. Неравенства (8), (9) прямо следуют из (7).

Точность оценок (6)–(9) и последнее утверждение предложения можно доказать, используя приведенные ниже примеры 1, 2. ▲

Заметим прежде всего, что из предложения 1 следуют легко вычислимые оценки сверху для информации Холево.

С л е д с т в и е 1. *Информация Холево* $\chi(\{p_i,\rho_i\})$ *произвольного ансамбля* $\{p_i,\rho_i\}$ *из* $n \leqslant \infty$ *состояний в* $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ *ограничена сверху любой из величин*

$$\frac{1}{2}\sup_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1 S(\{p_j\}) + g(\varepsilon), \quad \varepsilon\log n + g(\varepsilon), \quad \varepsilon\log d + g(\varepsilon), \tag{10}$$

*где* $\sigma$ *– произвольное состояние в* $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i p_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1$ *и* $d = \dim\mathcal{H} \leqslant \infty$.

---

[4] $S$ и $H$ – однородные расширения энтропии Шеннона и энтропии фон Неймана на положительные конусы в $\ell_1$ и $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, определенные формулами (3).

Первая и вторая оценки в (10) могут быть точнее, чем, соответственно, оценка Ауденаерта (1) и ее следствие (2) (несмотря на неустранимое слагаемое $g(\varepsilon)$ в этих оценках), поскольку величины $\sup_i \|\rho_i - \sigma\|_1$ и $\sum_i p_i \|\rho_i - \sigma\|_1$ могут быть значительно меньше, чем $\sup_{i,j} \|\rho_i - \rho_j\|_1$ для ансамблей с большой информацией Холево (см. приведенные ниже примеры 3, 5).

Предложение 1 показывает, что величину

$$T_\chi(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \sigma) \doteq \varepsilon\big(\chi(\{t_i, \tau_i^+\}) - \chi(\{t_i, \tau_i^-\})\big)$$

можно считать приближением величины $\chi(\{p_i, \rho_i\})$.

Назовем величину

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_i p_i \|\rho_i - \sigma\|_1 \tag{11}$$

*метрическим размером ансамбля* $\{p_i, \rho_i\}$ *относительно состояния* $\sigma$ и будем обозначать ее через $D(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \sigma)$.

*Референсное состояние* $\sigma$ – это свободный параметр, который можно использовать для оптимизации оценок (6)–(10). Ниже будет дан конкретный вид этих оценок и анализ величины $T_\chi(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \sigma)$ в следующих случаях:

- $\sigma = \rho_c \doteq I_{\mathcal{H}}/d$ – хаотическое состояние в $d$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;
- $\sigma = \bar{\rho} \doteq \sum_i p_i \rho_i$ – среднее состояние ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$;
- $\sigma = \rho_{i_0}$ – одно из состояний ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$;
- $\sigma$ – состояние, минимизирующее величину $\frac{1}{2} \sum_i p_i \|\rho_i - \sigma\|_1$;
- $\sigma$ – состояние, минимизирующее величину $\frac{1}{2} \sup_i \|\rho_i - \sigma\|_1$.

*Замечание* 2. Минимизирующие состояния $\sigma$ в последних двух случаях могут не совпадать друг с другом и со средним состоянием $\bar{\rho}$ даже для ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$, состоящего из изоморфных состояний[5] с равномерным распределением вероятностей $\{p_i\}$ (см. приведенный ниже пример 4).

**Случай $\boldsymbol{\sigma = \rho_c}$.** В этом случае величины $\|\rho_i - \sigma\|_1$ и ансамбли $\{t_i, \tau_i^+\}$ и $\{t_i, \tau_i^-\}$ легко определяются. Действительно, если $\rho = \sum_k \lambda_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$ – спектральное разложение состояния $\rho$ в $d$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то

$$[\rho - \rho_c]_+ = \sum_{\lambda_k > 1/d} (\lambda_k - 1/d) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|, \quad [\rho - \rho_c]_- = \sum_{\lambda_k < 1/d} (1/d - \lambda_k) |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

и $\|\rho - \rho_c\|_1 = \sum_k |\lambda_k - 1/d|$. Поэтому в данном случае распределение вероятностей $\{t_i\}$ полностью определяется собственными значениями состояния $\rho_i$ и распределением вероятностей $\{p_i\}$.

Приведенная выше формула показывает, что $\{t_i, \tau_i^+\} = \{p_i, \rho_i\}$ для любого ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$, состоящего из состояний, пропорциональных проекторам одного и того же ранга.

[5] Здесь и далее мы называем квантовые состояния изоморфными, если они имеют одинаковый спектр (с учетом кратности), а значит, могут быть переведены друг в друга унитарным преобразованием.

Пример 1. Пусть $\{p_i,\rho_i\}$ – произвольный ансамбль чистых состояний. Тогда $\frac{1}{2}\left\|\rho_i-\rho_c\right\|_1 = 1-1/d$, $t_i=p_i$, $\tau_i^+=\rho_i$ и $\tau_i^-=\widetilde{\rho}_i \doteq (d-1)^{-1}(I_{\mathcal{H}}-\rho_i)$. Поэтому

$$T_\chi(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_c) = (1-1/d)\left(\chi(\{p_i,\rho_i\})-\chi(\{p_i,\widetilde{\rho}_i\})\right),$$

и следовательно,

$$\chi(\{p_i,\rho_i\})-T_\chi(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_c) = (1/d)\chi(\{p_i,\rho_i\})+(1-1/d)\chi(\{p_i,\widetilde{\rho}_i\}).$$

Поскольку $\chi(\{p_i,\widetilde{\rho}_i\}) \leqslant \log d-\log(d-1)$, имеем

$$0 \leqslant \chi(\{p_i,\rho_i\})-T_\chi(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_c) \leqslant \frac{\log d}{d}+(1-1/d)\log\frac{d}{d-1} = h_2(1/d),$$

где равенство во втором неравенстве имеет место тогда и только тогда, когда $\bar{\rho}=\rho_c$.

Из оценок (8), (9) следуют неравенства

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant (1-1/d)S(\{p_i\})+g(1-1/d)$$

и

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant (1-1/d)H(\bar{\rho})+g(1-1/d),$$

где $\bar{\rho} \doteq \sum_i p_i\rho_i$. Мы видим, что вторая оценка ближе к точному значению $H(\bar{\rho})$ величины $\chi(\{p_i,\rho_i\})$.

Пример 2. Пусть $\{p_i,\rho_i\}$ – ансамбль состояний, пропорциональных проекторам ранга $k$, в $d$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, такой что $\sum_i p_i\rho_i=\rho_c$. Если $\sigma=\rho_c$, то нетрудно видеть, что $\varepsilon=\frac{d-k}{d}$, $\{t_i,\tau_i^+\}=\{p_i,\rho_i\}$ и что ансамбль $\{t_i,\tau_i^-\}$ состоит из состояний, пропорциональных проекторам ранга $(d-k)$, и имеет среднее состояние $\rho_c$. Поэтому

$$\chi(\{p_i,\rho_i\})-T_\chi(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_c) = \frac{k}{d}\log\frac{d}{k}+\frac{d-k}{d}\log\frac{d}{d-k} = h_2(\varepsilon).$$

Это первый пример, доказывающий последнее утверждение предложения 1.

**Случай $\boldsymbol{\sigma=\bar{\rho}}$.** При каждом $i$ пусть $\widehat{\rho}_i=(1-p_i)^{-1}\sum_{j\neq i}p_j\rho_j$ – дополнительное состояние к состоянию $\rho_i$ в терминах работы [5]. Тогда $\rho_i-\bar{\rho}=(1-p_i)(\rho_i-\widehat{\rho}_i)$. Поэтому в этом случае

$$\tau_i^{\pm}=\frac{2[\rho_i-\widehat{\rho}_i]_{\pm}}{\left\|\rho_i-\widehat{\rho}_i\right\|_1} \quad \text{и} \quad t_i=\frac{1}{2\varepsilon}p_i\left\|\rho_i-\bar{\rho}\right\|_1=\frac{1}{2\varepsilon}p_i(1-p_i)\left\|\rho_i-\widehat{\rho}_i\right\|_1, \tag{12}$$

$i=\overline{1,n}$, где

$$\varepsilon=D(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\bar{\rho}) \doteq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i\left\|\rho_i-\bar{\rho}\right\|_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)\left\|\rho_i-\widehat{\rho}_i\right\|_1. \tag{13}$$

В силу выпуклости следовой нормы имеем

$$\left\|\rho_i-\widehat{\rho}_i\right\|_1 \leqslant 2\upsilon_{\mathrm{m}}, \quad \text{и следовательно,} \quad \varepsilon \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}}\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_i^2\right), \tag{14}$$

где $\upsilon_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sup_{i,j}\left\|\rho_i-\rho_j\right\|_1$.

В случае $\sigma = \bar{\rho}$ ансамбли $\{t_i, \tau_i^+\}$ и $\{t_i, \tau_i^-\}$ имеют одно и то же среднее состояние. Поэтому если это среднее состояние имеет конечную энтропию, то

$$T_\chi(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \bar{\rho}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} t_i \big(H(\tau_i^-) - H(\tau_i^+)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\big(H([\rho_i - \widehat{\rho}_i]_-) - H([\rho_i - \widehat{\rho}_i]_+)\big).$$

Если ансамбль $\{p_i, \rho_i\}$ состоит из взаимно ортогональных состояний, то

$$[\rho_i - \widehat{\rho}_i]_+ = \rho_i, \quad [\rho_i - \widehat{\rho}_i]_- = \widehat{\rho}_i, \quad (1-p_i)H(\widehat{\rho}_i) = H(\bar{\rho}) - p_i H(\rho_i) - h_2(p_i),$$

и следовательно,

$$T_\chi(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \bar{\rho}) = \sum_i p_i(1-p_i)\big(H(\widehat{\rho}_i) - H(\rho_i)\big) = \chi(\{p_i, \rho_i\}) - \sum_i p_i h_2(p_i).$$

Мы опять видим, что величина $T_\chi$ может быть меньше, чем информация Холево. Поскольку в этом случае $\varepsilon = 1 - \sum_i p_i^2$, в силу вогнутости функции $h_2$ имеем

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) - T_\chi(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^{n} p_i h_2(p_i) \leqslant h_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right) = h_2(\varepsilon) \leqslant g(\varepsilon),$$

что согласуется с (7).

Используя (12)–(14), в случае $\sigma = \bar{\rho}$ можно уточнить оценки в предложении 1 и следствии 1.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\{p_i, \rho_i\}$ – ансамбль из $n \leqslant +\infty$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ и $d = \dim \mathcal{H} \leqslant +\infty$. Тогда*[6]

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant S\Big(\Big\{\frac{1}{2} p_i(1-p_i) \left\|\rho_i - \widehat{\rho}_i\right\|_1\Big\}\Big) + g(\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \upsilon_{\mathrm{m}} S(\{p_i(1-p_i)\}) + g(\varepsilon) \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}}\left(1 - \sum_i p_i^2\right) \log n + g(\varepsilon) \tag{15}$$

*и*

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant \varepsilon \log d + g(\varepsilon) \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}}\left(1 - \sum_i p_i^2\right) \log d + g\left(\upsilon_{\mathrm{m}}\left(1 - \sum_i p_i^2\right)\right), \tag{16}$$

*где $\varepsilon = D(\{p_i, \rho_i\} \,|\, \bar{\rho})$ определено в (13), а $\upsilon_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sup_{i,j} \left\|\rho_i - \rho_j\right\|_1$. Слагаемое $g(\varepsilon)$ во всех неравенствах в (15) можно заменить на $g\Big(\upsilon_{\mathrm{m}}\Big(1 - \sum_i p_i^2\Big)\Big)$.*

Последняя оценка в (15) точнее, чем (2), для ансамблей с сильно неравномерным распределением вероятностей (у которых $1 - \sum_i p_i^2 \ll 1$).

П р и м е р 3. Пусть $\{p_i, \rho_i\}$ – ансамбль из $n+1$ взаимно ортогональных состояний, где $p_1 = 1 - \delta$ и $p_i = \delta/n$ для $i = \overline{2, n+1}$. Тогда $\upsilon_{\mathrm{m}} = 1$ и $1 - \sum_i p_i^2 = 2\delta - (1 + 1/n)\delta^2$. Поэтому последняя оценка в (15) дает

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant (2\delta - (1 + 1/n)\delta^2) \log n + g(2\delta - (1 + 1/n)\delta^2),$$

[6] $S$ – это однородное расширение энтропии Шеннона на положительный конус в $\ell_1$, определенное первой формулой в (3).

в то время, как $\chi(\{p_i,\rho_i\}) = S(\{p_i\}) = \delta\log n + h_2(\delta)$. Мы видим, что слагаемое $1-\sum\limits_i p_i^2$ позволяет учесть вырожденность распределения вероятностей $\{p_i\}$.

**Случай $\boldsymbol{\sigma = \rho_{i_0}}$.** Будем считать, что $i_0 = 1$. В этом случае

$$\tau_i^{\pm} = \frac{2[\rho_i-\rho_1]_{\pm}}{\|\rho_i-\rho_1\|_1}, \quad t_i = \frac{1}{2\varepsilon}p_i\,\|\rho_i-\rho_1\|_1\,, \quad i=\overline{2,n}, \tag{17}$$

где

$$\varepsilon = D(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_1) \doteq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} p_i\,\|\rho_i-\rho_1\|_1 \leqslant 1-p_1. \tag{18}$$

Если состояние $\rho_1$ ортогонально всем другим состояниям ансамбля, то $\varepsilon = 1-p_1$ и

$$\tau_i^+ = \rho_i, \quad \tau_i^- = \rho_1, \quad t_i = \widetilde{p}_i^1 \doteq p_i(1-p_1)^{-1}, \quad i=\overline{2,n}.$$

Поэтому в этом случае $\chi(\{t_i,\tau_i^+\}) = \chi(\{\widetilde{p}_i^1,\rho_i\}_{i>1})$ и $\chi(\{t_i,\tau_i^-\}) = 0$. Следовательно,

$$T_\chi(\{p_i,\rho_i\}\,|\,\rho_1) = (1-p_1)\chi(\{\widetilde{p}_i^1,\rho_i\}_{i>1}),$$

а из неравенства Дональда (5) следует, что

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) = (1-p_1)\chi\big(\{\widetilde{p}_i^1,\rho_i\}_{i>1}\big) + h_2(1-p_1).$$

Это – второй пример, доказывающий последнее утверждение предложения 1.

Используя (17), (18) и равенство $S(\{p_i\}_{i\geqslant 0}) = S(\{p_i\}_{i>0}) + h_2(p_1)$, можно уточнить оценки в предложении 1 и следствии 1 в случае $\sigma = \rho_1$.

Следствие 3. *Пусть $\{p_i,\rho_i\}$ – ансамбль из $n \leqslant +\infty$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ и $d = \dim\mathcal{H} \leqslant +\infty$. Тогда*

$$\begin{aligned}\chi(\{p_i,\rho_i\}) &\leqslant \varepsilon_1 S\left(\left\{\frac{1}{2\varepsilon_1}p_i\,\|\rho_i-\rho_1\|_1\right\}_{i>1}\right) + g(\varepsilon_1) \leqslant \\ &\leqslant v_1 S(\{p_i\}) + [g((1-p_1)v_1) - v_1 h_2(1-p_1)]\end{aligned} \tag{19}$$

*и*

$$\chi(\{p_i,\rho_i\}) \leqslant \varepsilon_1\log d + g(\varepsilon_1) \leqslant v_1(1-p_1)\log d + g(v_1(1-p_1)), \tag{20}$$

*где* $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i>1} p_i\,\|\rho_i-\rho_1\|_1$ *и* $v_1 = \frac{1}{2}\sup\limits_{i>1}\|\rho_i-\rho_1\|_1$.

Оценки в (19) – это модификации оценки Ауденаерта (1). Слагаемое в квадратных скобках во второй из них равно

$$v_1(1-p_1)(-\log v_1) + o(1-p_1)$$

при $p_1$, близких к 1. Это слагаемое – цена замены максимального расстояния $v_{\mathrm{m}}$ между состояниями ансамбля в (1) на максимальное расстояние $v_1$ от первого состояния ансамбля до всех остальных. Нетрудно построить ансамбль $\{p_i,\rho_i\}$ с произвольным значением $S(\{p_i\})$, такой что $v_1$ значительно меньше чем $v_{\mathrm{m}}$ (такой ансамбль можно получить, добавляя состояние $|1\rangle\langle 1|$ к ансамблю из приведенного ниже примера 5).

**Средний метрический размер.** Для заданного ансамбля $\{p_i,\rho_i\}$ рассмотрим величину

$$\varepsilon_{\mathrm{av}}(\{p_i,\rho_i\}) = \frac{1}{2}\inf_{\sigma}\sum_i p_i\,\|\rho_i-\sigma\|_1\,, \tag{21}$$

которую будем называть *средним метрическим размером* ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$. В конечномерном случае инфимум в (21) всегда достигается в некотором состоянии $\sigma$, которое будем называть *AMD-оптимальным состоянием* ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$. Для ансамбля из двух состояний $\rho_1$ и $\rho_2$ с вероятностями $p_1$ и $p_2 = 1-p_1$ AMD-оптимальное состояние легко определить: если $p_1 > p_2$ (соответственно, $p_1 < p_2$), то $\rho_2$ (соответственно, $\rho_1$) – единственное AMD-оптимальное состояние, а если $p_1 = p_2$, то любая выпуклая смесь состояний $\rho_1$ и $\rho_2$ является AMD-оптимальным состоянием для этого ансамбля. В этом случае $\varepsilon_{\rm av} = \dfrac{1}{2}\min\{p_1, p_2\}\left\|\rho_1 - \rho_2\right\|_1$. В общем случае непрерывность и выпуклость функции $\sigma \mapsto \sum\limits_i p_i \left\|\rho_i - \sigma\right\|_1$ показывают, что множество всех AMD-оптимальных состояний для заданного ансамбля замкнуто и выпукло. Приведенный ниже пример показывает, что (вопреки интуиции) среднее состояние $\bar{\rho}$ ансамбля изоморфных состояний с равномерным распределением вероятностей может не быть AMD-оптимальным.

П р и м е р 4. Пусть $\{p_i, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}_{i=1}^4$ – ансамбль из четырех чистых состояний в трехмерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $p_i \equiv 1/4$,

$$|\varphi_1\rangle = |1\rangle, \quad |\varphi_2\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle, \quad |\varphi_3\rangle = -\frac{1}{2}|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle, \quad |\varphi_4\rangle = |3\rangle$$

(здесь $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$). Тогда

$$\bar{\rho} = \frac{3}{8}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \frac{1}{4}|3\rangle\langle 3|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} p_i \left\||\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| - \bar{\rho}\right\|_1 = \frac{21}{32} > \frac{5}{8} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} p_i \left\||\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| - \sigma\right\|_1,$$

где $\sigma = \dfrac{1}{2}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$ – единственное AMD-оптимальное состояние для этого ансамбля.

Выбирая AMD-оптимальное состояние[7] в роли референсного состояния $\sigma$ в следствии 1, получим

С л е д с т в и е 4. *Пусть $\{p_i, \rho_i\}$ – ансамбль из $n \leqslant +\infty$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ и $d = \dim\mathcal{H} \leqslant +\infty$. Тогда*

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant \varepsilon_{\rm av}\log n + g(\varepsilon_{\rm av}) \quad \text{и} \quad \chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant \varepsilon_{\rm av}\log d + g(\varepsilon_{\rm av}),$$

*где $\varepsilon_{\rm av}$ – средний метрический размер $\{p_i, \rho_i\}$, определенный в* (21).

Поскольку $\varepsilon_{\rm av}$ может быть значительно меньше, чем максимальное расстояние $\upsilon_{\rm m}$ между состояниями ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$, первая оценка в следствии 4 можем быть точнее оценки (2), несмотря на (неустранимое) слагаемое $g(\varepsilon_{\rm av})$.

**Максимальный метрический размер.** Для заданного ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$ рассмотрим величину

$$\varepsilon_{\rm m}(\{p_i, \rho_i\}) = \frac{1}{2}\inf_{\sigma}\sup_{i}\left\|\rho_i - \sigma\right\|_1, \tag{22}$$

[7] Если $\dim\mathcal{H} = +\infty$, то AMD-оптимального состояния может не существовать. Тогда достаточно взять для заданного $\varepsilon > 0$ такое состояние $\sigma_\varepsilon$, что $\dfrac{1}{2}\sum\limits_i p_i \left\|\rho_i - \sigma_\varepsilon\right\|_1$ лежит в $\varepsilon$-окрестности $\varepsilon_{\rm av}$.

которую будем называть *максимальным метрическим размером* ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$. В конечномерном случае инфимум в (22) всегда достигается в некотором состоянии $\sigma$, которое будем называть *MMD-оптимальным состоянием* ансамбля $\{p_i, \rho_i\}$. Для ансамбля из двух состояний $\rho_1$ и $\rho_2$ с любыми вероятностями $p_1$ и $p_2 = 1 - p_1$ состояние $\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ – это единственное MMD-оптимальное состояние. В этом случае $\varepsilon_{\mathrm{m}} = \frac{1}{4}\|\rho_1 - \rho_2\|_1$.

Ансамбль из четырех чистых состояний примера 4 имеет единственное MMD-оптимальное состояние $\rho_c \doteq I_{\mathcal{H}}/3$, не совпадающее со средним состоянием и с AMD-оптимальным состоянием этого ансамбля. Для данного ансамбля $\varepsilon_{\mathrm{m}} = 2/3 > \varepsilon_{\mathrm{av}} = 5/8$.

Выбирая MMD-оптимальное состояние в качестве референсного состояния $\sigma$ в следствии 1, получаем

Следствие 5. *Пусть $\{p_i, \rho_i\}$ – ансамбль из $n \leqslant +\infty$ состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, где $\dim \mathcal{H} \leqslant +\infty$. Тогда*

$$\chi(\{p_i, \rho_i\}) \leqslant \varepsilon_{\mathrm{m}} S(\{p_i\}) + g(\varepsilon_{\mathrm{m}}),$$

*где $\varepsilon_{\mathrm{m}}$ – максимальный метрический размер $\{p_i, \rho_i\}$, определенный в* (22).

Покажем, что в некоторых случаях эта оценка точнее оценки Ауденаерта (1), несмотря на (неустранимое) дополнительное слагаемое $g(\varepsilon_{\mathrm{m}})$ (ограниченное сверху числом $g(1) = 2\log 2$). Заметим сначала, что

$$\varepsilon_{\mathrm{m}} \leqslant \frac{1}{2} \sup_i \|\rho_i - \bar{\rho}\|_1 \leqslant \upsilon_{\mathrm{m}}$$

в силу выпуклости следовой нормы.

Для любого ансамбля из двух состояний имеем $\upsilon_{\mathrm{m}}/\varepsilon_{\mathrm{m}} = 2$, но для ансамблей из большого числа состояний разность между $\varepsilon_{\mathrm{m}}$ и $\upsilon_{\mathrm{m}}$ не такая значительная. Следующий пример показывает существование ансамбля с произвольно большой информацией Холево, для которого величина $\upsilon_{\mathrm{m}}/\varepsilon_{\mathrm{m}}$ близка к $\sqrt{2}$.

Пример 5. Пусть $\{p_i, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}_{i=1}^n$ – ансамбль из $n$ чистых состояний в $(n+1)$-мерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, где $\{p_i\}$ – произвольное распределение вероятностей и $|\varphi_i\rangle = \sqrt{1-a^2}\,|1\rangle + a|i+1\rangle$, $a \in [0,1]$ (здесь $\{|1\rangle, \ldots, |n+1\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$). Тогда

$$\||\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| - |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|\|_1 = 2\sqrt{1 - |\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle|^2} = 2a\sqrt{2-a^2}$$

и

$$\||\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| - |1\rangle\langle 1|\|_1 = 2\sqrt{1 - |\langle\varphi_i|1\rangle|^2} = 2a.$$

Поэтому $\upsilon_{\mathrm{m}} = a\sqrt{2-a^2}$, в то время как $\varepsilon_{\mathrm{m}} \leqslant a$.[8] Поэтому в этом случае оценка Ауденаерта (1) и оценка в следствии 5 дают, соответственно,

$$\chi(\{p_i, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}) \leqslant a\sqrt{2-a^2} S(\{p_i\})$$

и

$$\chi(\{p_i, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}) \leqslant aS(\{p_i\}) + g(a).$$

Ясно, что вторая оценка точнее первой при малых $a$ и больших значениях $S(\{p_i\})$.

[8] Можно показать, что $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ – единственное MMD-оптимальное состояние для этого ансамбля и что $\varepsilon_{\mathrm{m}} = a - o(a) < a$.

Вычисление собственных значений состояния $\bar{\rho} \doteq \sum_{i=1}^{n} p_i|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ в случае $p_i \equiv 1/n$ показывает, что

$$\chi(\{p_i, |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\}) = H(\bar{\rho}) = (1-1/n)a^2 \log(n-1) + h_2\left((1-1/n)a^2\right).$$

**2.2. Обобщенные ансамбли квантовых состояний с конечной средней энергией.** При анализе бесконечномерных квантовых систем и каналов необходимо рассматривать *обобщенные* ансамбли квантовых состояний, определяемые как борелевские вероятностные меры на множестве квантовых состояний [2,16]. Дискретный ансамбль $\{p_i, \rho_i\}$ соответствует мере $\sum_i p_i\delta(\rho_i)$, где $\delta(\rho)$ – дираковская мера, сосредоточенная в состоянии $\rho$. Среднее состояние обобщенного ансамбля $\mu$ – это барицентр меры $\mu$, определяемый интегралом Бохнера

$$\bar{\rho}(\mu) = \int \rho\, \mu(d\rho).$$

Информация Холево обобщенного ансамбля $\mu$ определяется выражением [2,16]

$$\chi(\mu) = \int H(\rho \,\|\, \bar{\rho}(\mu))\, \mu(d\rho) = H(\bar{\rho}(\mu)) - \int H(\rho)\, \mu(d\rho),$$

в котором вторая формула верна при условии $H(\bar{\rho}(\mu)) < +\infty$.

В этом пункте будут рассмотрены оценки сверху для информации Холево обобщенного ансамбля $\mu$ с конечной средней энергией[9]

$$\bar{E}(\mu) \doteq \operatorname{Tr} H\bar{\rho}(\mu) = \int \operatorname{Tr} H\rho\, \mu(d\rho),$$

при условии, что гамильтониан $H$ системы удовлетворяет условию

$$\operatorname{Tr} e^{-\lambda H} < +\infty \quad \text{при некотором } \lambda > 0. \tag{23}$$

Из условия (23) следует, что все спектральные проекторы оператора $H$, соответствующие конечным интервалам, конечномерны и что энтропия фон Неймана $H(\rho)$ ограничена на множестве состояний $\rho$ с ограниченной энергией $E(\rho) \doteq \operatorname{Tr} H\rho$ [17, предложение 1]. Поэтому

$$F_H(E) \doteq \sup_{\operatorname{Tr} H\rho \leqslant E} H(\rho) \tag{24}$$

– конечная функция на $[E_0, +\infty)$, где $E_0 \doteq \inf_{\|\varphi\|=1} \langle\varphi|H|\varphi\rangle$.

*Замечание* 3. Далее будем считать, что $E_0 = 0$. Общий случай легко свести к данному, рассматривая “приведенный” гамильтониан $\bar{H} = H - E_0 I_{\mathcal{H}}$ и замечая, что неравенство $\operatorname{Tr} H\rho \leqslant E$ равносильно неравенству $\operatorname{Tr} \bar{H}\rho \leqslant E - E_0$ для любого состояния $\rho$ и $E \geqslant E_0$.

Пусть $\widehat{F}_H$ – гладкая функция на $[0, +\infty)$, такая что $\widehat{F}_H(E) \geqslant F_H(E)$ для всех $E \geqslant 0$, обладающая следующими свойствами:

$$\widehat{F}_H(E) > 0, \quad \widehat{F}'_H(E) > 0, \quad \widehat{F}''_H(E) \leqslant 0 \quad \text{для всех } E > 0. \tag{25}$$

В качестве $\widehat{F}_H$ можно взять саму функцию $F_H(E)$, которая удовлетворяет данным условиям в силу предложения 1 из [17], однако явный вид этой функции часто бывает неизвестен или достаточно сложен для использования в реальных оценках.

[9] Величина $\operatorname{Tr} H\rho$ определяется как $\sup_n \operatorname{Tr} P_n H\rho$, где $P_n$ – спектральный проектор оператора $H$, соответствующий интервалу $[0, n]$.

Метрический размер обобщенного ансамбля $\mu$ по отношению к состоянию $\sigma$ естественно определить выражением

$$D(\mu\,|\,\sigma)=\frac{1}{2}\int\|\rho-\sigma\|_1\ \mu(d\rho). \qquad (26)$$

Если $\mu=\{p_i,\rho_i\}$, то (26) совпадает с (11).

Предложение 2. *Пусть $\mu$ – обобщенный ансамбль состояний из $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ с конечной средней энергией $\bar{E}(\mu)\doteq E(\bar{\rho}(\mu))>0$ и $\sigma$ – состояние в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ с конечной энергией $E(\sigma)$. Пусть $\varepsilon=D(\mu\,|\,\sigma)$ – метрический размер ансамбля $\mu$ относительно состояния $\sigma$, определенный в (26). Тогда*[10]

$$\chi(\mu)\leqslant\varepsilon\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t}+t\right)\widehat{F}_H\left(\frac{\bar{E}(\mu)}{\varepsilon t}\right)+h_2(\varepsilon t)+g\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t}\varepsilon\right) \qquad (27)$$

*для всех $t\in(0,1/(2\varepsilon)]$, где $\widehat{F}_H$ – любая оценка сверху для функции $F_H$, удовлетворяющая условиям (25) и $\varkappa=\frac{1}{2}(1+E(\sigma)/\bar{E}(\mu))$.*

*Замечание* 4. Правая часть (27) является возрастающей функцией $\varepsilon$. Она стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ тогда и только тогда, когда $\widehat{F}_H(E)=o(E)$ при $E\to+\infty$. В силу предложения 1 из [17] функция $\widehat{F}_H(E)=F_H(E)$ удовлетворяет последнему условию тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Tr}e^{-\lambda H}<+\infty\quad\text{для всех }\lambda>0. \qquad (28)$$

Интересно отметить, что (28) – необходимое и достаточное условие непрерывности информации Холево на множестве всех обобщенных ансамблей $\mu$ с ограниченной средней энергией $\bar{E}(\mu)$ относительно топологии слабой сходимости. Это следует из предложения 18 в [15], поскольку (28) – необходимое и достаточное условие непрерывности энтропии фон Неймана на множестве состояний $\rho$ с ограниченной энергией $E(\rho)=\operatorname{Tr}\rho H$ [17, 18].

Доказательство. Предположим, что $\mu$ – дискретный ансамбль $\{p_i,\rho_i\}$ со средним состоянием $\bar{\rho}$.

Следуя доказательству лемм 16, 17 в [11], возьмем любое $\delta\in(0,\frac{1}{2}]$ и обозначим через $P_\delta$ спектральный проектор оператора $H$, соответствующий интервалу $[0,\delta^{-1}\bar{E}(\mu)]$. В силу условия (23) имеем $\operatorname{Tr}P_\delta<+\infty$. Поскольку $\operatorname{Tr}H\bar{\rho}=\bar{E}(\mu)$ и $\operatorname{Tr}H\sigma=E(\sigma)$, нетрудно показать, что

$$\operatorname{Tr}P_\delta\bar{\rho}\geqslant 1-\delta\quad\text{и}\quad\operatorname{Tr}P_\delta\sigma\geqslant 1-\delta E(\sigma)/\bar{E}(\mu). \qquad (29)$$

Рассмотрим ансамбль $\{\widehat{p}_i,\widehat{\rho}_i\}$, где $\widehat{\rho}_i=r_i^{-1}P_\delta\rho_iP_\delta$, $\widehat{p}_i=r_ip_i/r$, $r_i=\operatorname{Tr}P_\delta\rho_i$, $r=\operatorname{Tr}P_\delta\bar{\rho}$. В силу следствия 4 имеем

$$\chi(\{\widehat{p}_i,\widehat{\rho}_i\})\leqslant\widehat{\varepsilon}\log\operatorname{Tr}P_\delta+g(\widehat{\varepsilon}), \qquad (30)$$

где $\widehat{\varepsilon}$ – средний метрический размер ансамбля $\{\widehat{p}_i,\widehat{\rho}_i\}$.

Пусть $\widehat{\sigma}=s^{-1}P_\delta\sigma P_\delta$, где $s=\operatorname{Tr}P_\delta\sigma$. Тогда

$$2\widehat{\varepsilon}\leqslant\sum_i\widehat{p}_i\,\|\widehat{\rho}_i-\widehat{\sigma}\|_1=r^{-1}\sum_i p_i\,\|P_\delta\rho_iP_\delta-(r_i/s)P_\delta\sigma P_\delta\|_1\leqslant$$
$$\leqslant r^{-1}\sum_i p_i\big(\|P_\delta\rho_iP_\delta-P_\delta\sigma P_\delta\|_1+|1-(r_i/s)|\,\|P_\delta\sigma P_\delta\|_1\big)\leqslant$$

---

[10] $h_2(p)$ – бинарная энтропия, $g(p)=(1+p)h_2\Big(\dfrac{p}{1+p}\Big)=(p+1)\log(p+1)-p\log p$.

$$\leqslant r^{-1}\sum_i p_i\big(\|\rho_i-\sigma\|_1+|(1-r_i)-(1-s)|\big)\leqslant$$
$$\leqslant r^{-1}\big(2\varepsilon+(1-\operatorname{Tr}P_\delta\bar\rho)+(1-\operatorname{Tr}P_\delta\sigma)\big)\leqslant(1-\delta)^{-1}(2\varepsilon+2\varkappa\delta), \tag{31}$$

где последнее неравенство следует из (29).

Используя (29) и аргументы из доказательства леммы 16 в [11] (основанные на свойствах (25) функции $\widehat{F}_H$), получаем

$$H(\bar\rho)-H(P_\delta\bar\rho P_\delta)\leqslant\delta\widehat{F}_H(\bar E(\mu)/\delta)+h_2(\delta).$$

Из этого неравенства и леммы 25 в [15] следует, что

$$\chi(\{p_i,\rho_i\})-\chi(\{\widehat{p}_i,\widehat{\rho}_i\})\leqslant\delta\widehat{F}_H(\bar E(\mu)/\delta)+h_2(\delta). \tag{32}$$

Поскольку энергия состояния $[\operatorname{Tr}P_\delta]^{-1}P_\delta$ не превосходит $\bar E(\mu)/\delta$, его энтропия $\log\operatorname{Tr}P_\delta$ ограничена сверху величиной $\widehat{F}_H(\bar E(\mu)/\delta)$. Поэтому из (30)–(32) следует, что

$$\chi(\{p_i,\rho_i\})\leqslant(\varepsilon'+\delta)\widehat{F}_H\left(\frac{\bar E(\mu)}{\delta}\right)+g(\varepsilon')+h_2(\delta),\quad \text{где } \varepsilon'=\frac{\varepsilon+\varkappa\delta}{1-\delta}. \tag{33}$$

Предположим, что $\delta=\varepsilon t$, где $t\in(0,\frac{1}{2\varepsilon}]$. Тогда $\varepsilon'=\varepsilon(1+\varkappa t)/(1-\varepsilon t)$, и следовательно, из (33) вытекает (27) для $\mu=\{p_i,\rho_i\}$.

Для произвольного обобщенного ансамбля $\mu$ найдется последовательность $\{\mu_n\}$ дискретных ансамблей, слабо[11] сходящаяся к $\mu$, такая что

$$\lim_{n\to\infty}\chi(\mu_n)=\chi(\mu)\quad\text{и}\quad\bar\rho(\mu_n)=\bar\rho(\mu)\ \text{для всех } n.$$

Такую последовательность можно получить, используя конструкцию в доказательстве леммы 1 в [16] и принимая во внимание полунепрерывность снизу функции $\mu\mapsto\chi(\mu)$ [16, предложение 1]. Поскольку $D(\mu_n\,|\,\sigma)$ сходится к $D(\mu\,|\,\sigma)$ (в силу слабой сходимости $\mu_n$ к $\mu$), выполнимость неравенства (27) для ансамбля $\mu$ следует из его выполнимости для всех ансамблей $\mu_n$, которая была доказана выше. ▲

Применим предложение 2 к ансамблям состояний $\ell$-модового квантового осциллятора. В этом случае

$$H=\sum_{i=1}^{\ell}\hbar\omega_i a_i^+a_i+E_0I_{\mathcal H},\quad E_0\doteq\frac12\sum_{i=1}^{\ell}\hbar\omega_i, \tag{34}$$

где $a_i$ и $a_i^+$ – операторы уничтожения и рождения соответственно, а $\omega_i$ – частота $i$-го осциллятора [2, глава 12]. Поскольку условие (28) выполнено, для любого $E>0$ энтропия фон Неймана $H(\rho)$ непрерывна на множестве состояний, определяемом неравенством $\operatorname{Tr}\rho H\leqslant E$, и достигает максимума на этом множестве в состоянии Гиббса $\gamma(E)=[\operatorname{Tr}e^{-\lambda(E)H}]^{-1}e^{-\lambda(E)H}$, где $\lambda(E)$ – решение уравнения $\operatorname{Tr}He^{-\lambda H}=$ $=E\operatorname{Tr}e^{-\lambda H}$ [18].

Приведенный гамильтониан (см. замечание 3) имеет вид

$$\bar H=\sum_{i=1}^{\ell}\hbar\omega_i a_i^+a_i. \tag{35}$$

[11] Слабая сходимость последовательности $\{\mu_n\}$ к ансамблю $\mu_0$ означает, что $\lim_{n\to\infty}\int f(\rho)\mu_n(d\rho)=$ $=\int f(\rho)\mu_0(d\rho)$ для любой ограниченной функции $f$ на $\mathcal{S}(\mathcal{H})$, непрерывной относительно метрики, порожденной следовой нормой $\|\cdot\|_1$.

Точное значение $F_{\bar{H}}(E) = \sup\limits_{\operatorname{Tr}\bar{H}\rho\leqslant E} H(\rho)$ можно определить, решая трансцендентное уравнение [11,15]. Но можно показать, что функция $F_{\bar{H}}(E) = F_H(E+E_0)$ ограничена сверху функцией

$$\bar{F}_{\ell,\omega}(E) \doteq \ell \log \frac{E+2E_0}{\ell E_*} + \ell, \quad E_* = \left[\prod_{i=1}^{\ell} \hbar\omega_i\right]^{1/\ell}, \tag{36}$$

определенной на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющей условиям (25).[12] При этом разность $\bar{F}_{\ell,\omega}(E) - F_{\bar{H}}(E)$ стремится к нулю при $E \to +\infty$ [15].

Следствие 6. *Пусть $\mu$ – обобщенный ансамбль состояний $\ell$-модового квантового осциллятора с конечной средней энергией $\bar{E}(\mu) \doteq E(\bar{\rho}(\mu)) > E_0$, а $\sigma$ – состояние с конечной энергией $E(\sigma)$.*[13] *Пусть $\varepsilon = D(\mu\,|\,\sigma)$ – метрический размер ансамбля $\mu$ относительно состояния $\sigma$, определенный в (26). Тогда*

$$\chi(\mu) \leqslant \varepsilon\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t} + t\right)\bar{F}_{\ell,\omega}\left(\frac{\bar{E}(\mu)-E_0}{\varepsilon t}\right) + h_2(\varepsilon t) + g\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t}\varepsilon\right) \tag{37}$$

*для всех $t \in (0, 1/(2\varepsilon)]$, где $\bar{F}_{\ell,\omega}(E)$ – функция, определенная в (36), и*

$$\varkappa = \frac{1}{2}\big(1 + (E(\sigma)-E_0)/(\bar{E}(\mu)-E_0)\big).$$

*Данная оценка сверху при оптимальном выборе параметра $t$ и состояния $\sigma$ является $\varepsilon$-точной при больших значениях средней энергии $\bar{E}(\mu)$.*

Доказательство. Основное утверждение следствия прямо следует из предложения 2.

Пусть $E > E_0$, и пусть $\{p_i, \rho_i\}$ – любой ансамбль чистых состояний, среднее состояние которого совпадает с состоянием Гиббса $\gamma(E)$. Рассмотрим ансамбль $\{p_i, \rho_i^\varepsilon\}$, где $\rho_i^\varepsilon = \varepsilon\rho_i + (1-\varepsilon)\gamma(E)$. Тогда

$$2D(\{p_i,\rho_i^\varepsilon\}\,|\,\gamma(E)) = \sum_i p_i\,\|\rho_i^\varepsilon - \gamma(E)\|_1 = \sum_i \varepsilon p_i\,\|\rho_i - \gamma(E)\|_1 \leqslant 2\varepsilon,$$

в то время как из неравенства (4) следует, что

$$\chi(\{p_i,\rho_i^\varepsilon\}) \geqslant \varepsilon H\left(\gamma(E)\right) - h_2(\varepsilon) = \varepsilon F_H(E) - h_2(\varepsilon). \tag{38}$$

Поскольку $\bar{F}_{\ell,\omega}(E-E_0)/x \leqslant \bar{F}_{\ell,\omega}(E-E_0) - \ell\log x$ для любых $E > 0$ и $x \leqslant 1$, правая часть (37) не превосходит

$$\varepsilon\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t} + t\right)\left[\bar{F}_{\ell,\omega}(\bar{E}(\mu)-E_0) - \ell\log(\varepsilon t)\right] + h_2(\varepsilon t) + g\left(\frac{1+\varkappa t}{1-\varepsilon t}\varepsilon\right).$$

Неравенство (38) показывает точность оценки (37), поскольку $\bar{F}_{\ell,\omega}(E-E_0) - F_H(E) = o(1)$ при $E \to +\infty$, а величина

$$\varepsilon\left(\frac{1+t}{1-t} + t\right)\left[\bar{F}_{\ell,\omega}(E-E_0) - \ell\log(\varepsilon t)\right]$$

может быть сделана не больше чем $\varepsilon(\bar{F}_{\ell,\omega}(E-E_0) + o(\bar{F}_{\ell,\omega}(E)))$ при $E \to +\infty$ за счет выбора $t$. Это следует из приведенной ниже леммы, которая доказывается элементарными методами. ▲

[12] Везде в статье log – натуральный логарифм.

[13] Считаем, что энергия определяется исходным гамильтонианом (34).

Л е м м а. *Пусть* $f(t)=\dfrac{1+t}{1-t}+t$, $b>0$ *и* $c$ *– любое число. Тогда*

$$\min_{t\in(0,\frac{1}{2})} f(t)(x-b\log t+c)\leqslant x+o(x)\quad \text{при}\quad x\to+\infty.$$

## § 3. Оценки сверху для пропускной способности Холево квантового канала

*Квантовый канал* $\Phi$ из системы $A$ в систему $B$ – это вполне положительное сохраняющее след линейное отображение $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)\to\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$, где $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ – гильбертовы пространства, ассоциированные с данными системами [2–4].

*Пропускная способность Холево* квантового канала $\Phi$ между конечномерными системами $A$ и $B$ определяется выражением

$$C_\chi(\Phi)=\sup_{\{p_i,\rho_i\}}\chi(\{p_i,\Phi(\rho_i)\}),\tag{39}$$

в котором супремум берется по всем ансамблям входных состояний. Эта величина определяет предельную скорость передачи классической информации по каналу $\Phi$ с несцепленным кодированием на входе, она тесно связана с классической пропускной способностью квантового канала [2–4]. Поскольку как классическая пропускная способность, так и пропускная способность Холево являются трудновычислимыми величинами для квантового канала общего вида, любые методы приближенного оценивания этих характеристик имеют важное значение [19–21]. В данном параграфе мы используем результаты § 2 для получения легковычисляемых оценок сверху для пропускной способности Холево конечномерного квантового канала. Эти оценки являются грубыми в общем случае, однако для определенных классов каналов они дают достаточно точное приближение пропускной способности Холево.

Для заданного подмножества $\mathcal{S}_0$ в $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ рассмотрим величину

$$\mathrm{Cr}(\mathcal{S}_0)\doteq\frac{1}{2}\inf_{\sigma\in\mathcal{S}(\mathcal{H})}\sup_{\rho\in\mathcal{S}_0}\|\rho-\sigma\|_1,$$

называемую чебышевским радиусом [22, 23] подмножества $\mathcal{S}_0$ относительно метрики $\Delta(\rho,\sigma)=\frac{1}{2}\|\rho-\sigma\|_1$. Например, $\mathrm{Cr}(\{\rho,\sigma\})=\frac{1}{4}\|\rho-\sigma\|_1$ и $\mathrm{Cr}(\mathcal{S}(\mathcal{H}))=1-1/d$, где $d=\dim\mathcal{H}$. Чебышевский радиус множества $\mathcal{S}_0$ не превосходит его диаметр $D(\mathcal{S}_0)\doteq\frac{1}{2}\sup_{\rho,\sigma\in\mathcal{S}_0}\|\rho-\sigma\|_1$, но $\mathrm{Cr}(\mathcal{S}_0)$ может быть значительно меньше $D(\mathcal{S}_0)$ даже для многомерных множеств $\mathcal{S}_0$: диаметр множества векторов в примере 5 равен $a\sqrt{2-a^2}$, а чебышевский радиус не превосходит $a$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть* $\Phi\colon A\to B$ *– квантовый канал. Тогда*[14]

$$C_\chi(\Phi)\leqslant r_\Phi\log d_B+g(r_\Phi),\tag{40}$$

*где* $r_\Phi=\mathrm{Cr}(\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}_A)))$ *и* $d_B=\dim\mathcal{H}_B$. *Оценка* (40) *является* $\varepsilon$*-точной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (40) следует из второго неравенства в следствии 4, поскольку средний метрический размер $\varepsilon_{\mathrm{av}}$ образа любого входного ансамбля $\{p_i,\rho_i\}$ при действии канала $\Phi$ не превосходит $r_\Phi$.

Точность оценки (40) следует из приведенных ниже примеров 6, 7. ▲

Следующий пример показывает, что дополнительное слагаемое $g(r_\Phi)$ в неравенстве (40) убрать нельзя.

[14] $g(p)=(1+p)h_2\Big(\dfrac{p}{1+p}\Big)=(p+1)\log(p+1)-p\log p$.

П р и м е р 6. Пусть $\Phi\colon A \to B$ – такой квантовый канал, что множество $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}_A))$ содержит набор чистых состояний, соответствующих некоторому ортонормированному базису в $\mathcal{H}_B$ (например, $\Phi$ – тождественный канал или канал $\rho \mapsto \mapsto \sum\limits_k \langle\varphi_k|\rho|\varphi_k\rangle|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$, где $\{|\varphi_k\rangle\}$ и $\{|\psi_k\rangle\}$ – ортонормированные базисы в $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B \cong \mathcal{H}_A$ соответственно). Тогда $C_\chi(\Phi) = \log d_B$ и $r_\Phi = 1 - 1/d_B$. Поэтому в этом случае неравенство (40) имеет вид

$$C_\chi(\Phi) = \log d_B \leqslant (1 - 1/d_B)\log d_B + g(1 - 1/d_B),$$

которое не выполняется, если убрать слагаемое $g(1 - 1/d_B)$.

Несмотря на то что оценка сверху (40) зависит только от чебышевского радиуса выходного множества канала $\Phi$, она дает относительно точную оценку пропускной способности Холево для некоторых нетривиальных каналов.

П р и м е р 7. Пусть $\Phi_p$ – деполяризующий канал из $d$-мерной квантовой системы в себя, т.е. $\Phi_p(\rho) = (1-p)\rho + p\rho_c$, где $\rho_c$ – хаотическое состояние и $p \in [0,1]$. Тогда [2, 24, 25]

$$C_\chi(\Phi_p) = (1 - pc)\log d - h_2(pc) - pc\log c,$$

где $c = 1 - 1/d$, а оценка (40) дает

$$C_\chi(\Phi_p) \leqslant (1 - pc)\log d + g((1-p)c) - (1/d)\log d,$$

поскольку $\|\Phi_p(\rho) - \rho_c\|_1 = (1-p)\,\|\rho - \rho_c\|_1 \leqslant (1-p)c$ для любого входного состояния $\rho$.

Другой пример, когда оценка (40) дает асимптотически $\varepsilon$-точную оценку пропускной способности Холево, – это стирающий канал

$$\Psi_p(\rho) = \begin{bmatrix} (1-p)\rho & 0 \\ 0 & p\operatorname{Tr}\rho \end{bmatrix}, \quad p \in [0,1],$$

из $d$-мерной квантовой системы в ее $(d+1)$-мерное расширение [2, 26], поскольку в этом случае $C_\chi(\Psi_p) = (1-p)\log d$ и $r_{\Psi_p} = (1-p)(1-1/d)$.

Следующий пример показывает, что точность оценки (40) может значительно меняться для каналов одного класса.

П р и м е р 8. Пусть $\Phi\colon A \to B$ – такой квантовый канал, что множество $\Phi(\mathcal{S}(\mathcal{H}_A))$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\mathcal{S}_0$ изоморфных состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$ и содержит хаотическое состояние $\rho_c \doteq I_{\mathcal{H}_B}/d_B$, где $d_B = \dim\mathcal{H}_B$ (например, $\Phi$ – канал $\rho \mapsto \sum\limits_k \langle\varphi_k|\rho|\varphi_k\rangle\sigma_k$, где $\{|\varphi_k\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_A$, а $\{\sigma_k\}$ – набор изоморфных состояний в $\mathcal{S}(\mathcal{H}_B)$, таких что $\rho_c = \sum\limits_k p_k\sigma_k$ для некоторого распределения вероятностей $\{p_k\}$). Тогда $C_\chi(\Phi) = \log d_B - H_{\min}(\Phi)$, где $H_{\min}(\Phi) = H(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{S}_0$ [2, 27].

Покажем, что точность оценки (40) существенно зависит от вида спектра состояний в $\mathcal{S}_0$.

Предположим, что все состояния в $\mathcal{S}_0$ имеют спектр

$$\{1 - r/d,\ \underbrace{1/d, \ldots, 1/d}_{r},\ \underbrace{0, \ldots, 0}_{d-r-1}\},$$

где $d = d_B$ и $r < d - 1$. В этом случае $H_{\min}(\Phi) = (r/d)\log d + \eta(1 - r/d)$, и следовательно,

$$C_\chi(\Phi) = (1 - r/d)\log d - \eta(1 - r/d),$$

в то время как оценка сверху (40) дает

$$C_\chi(\Phi) \leqslant (1 - r/d - 1/d)\log d + g(1 - r/d - 1/d),$$

поскольку $\|\sigma - \rho_c\|_1 = 2(d - r - 1)/d$ для всех $\sigma \in \mathcal{S}_0$. Мы опять видим, что (40) – асимптотически $\varepsilon$-точная оценка пропускной способности Холево при большом $d$ и любом $r$.

Предположим теперь, что все состояния в $\mathcal{S}_0$ пропорциональны проекторам ранга $r$. Тогда

$$C_\chi(\Phi) = \log d - \log r,$$

в то время как оценка сверху (40) дает

$$C_\chi(\Phi) \leqslant (1 - r/d)\log d + g(1 - r/d).$$

Поэтому в этом случае (40) – очень грубая оценка пропускной способности Холево.

Автор благодарен профессору А.С. Холево и участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” в МИАН им. В.А. Стеклова за полезные замечания. Автор благодарен рецензенту за найденные неточности и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Холево А.С.* Некоторые оценки для количества информации, передаваемого квантовым каналом связи // Пробл. передачи информ. 1973. Т. 9. № 3. С. 3–11.
2. *Холево А.С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
3. *Нильсен М.А., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006.
4. *Wilde M.M.* Quantum Information Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
5. *Audenaert K.M.R.* Quantum Skew Divergence // J. Math. Phys. 2014. V. 55. № 11. P. 112202 (21 pp.).
6. *Briët J., Harremoës P.* Properties of Classical and Quantum Jensen–Shannon Divergence // Phys. Rev. A. 2009. V. 79. № 5. P. 052311.
7. *Fannes M., de Melo F., Roga W., Życzkowski K.* Matrices of Fidelities for Ensembles of Quantum States and the Holevo Quantity // Quantum Inf. Comput. 2012. V. 12. № 5–6. P. 472–489.
8. *Roga W., Fannes M., Życzkowski K.* Universal Bounds for the Holevo Quantity, Coherent Information, and the Jensen–Shannon Divergence // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. № 4. P. 040505 (4 pp.).
9. *Zhang L., Wu J., Fei S.-M.* Universal Upper Bound for the Holevo Information Induced by a Quantum Operation // Phys. Lett. A. 2012. V. 376. № 47–48. P. 3588–3592.
10. *Alicki R., Fannes M.* Continuity of Quantum Conditional Information // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. № 5. P. L55–L57.
11. *Winter A.* Tight Uniform Continuity Bounds for Quantum Entropies: Conditional Entropy, Relative Entropy Distance and Energy Constraints // Comm. Math. Phys. 2016. V. 347. № 1. P. 291–313.
12. *Lindblad G.* Expectation and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems // Comm. Math. Phys. 1974. V. 39. № 2. P. 111–119.
13. *Ohya M., Petz D.* Quantum Entropy and Its Use. Berlin: Springer, 1993.
14. *Donald M.J.* Further Results on the Relative Entropy // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1987. V. 101. № 2. P. 363–373.
15. *Shirokov M.E.* Tight Uniform Continuity Bounds for the Quantum Conditional Mutual Information, for the Holevo Quantity, and for Capacities of Quantum Channels // J. Math. Phys. 2017. V. 58. № 10. P. 102202 (29 pp.).

16. *Холево А.С., Широков М.Е.* Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50. № 1. С. 98–114.
17. *Широков М.Е.* Энтропийные характеристики подмножеств состояний. I // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. № 6. С. 193–222.
18. *Wehrl A.* General Properties of Entropy // Rev. Mod. Phys. 1978. V. 50. № 2. P. 221–250.
19. *Wang X., Xie W. Duan R.* Semidefinite Programming Strong Converse Bounds for Classical Capacity // IEEE Trans. Inform. Theory. 2018. V. 64. № 1. P. 640–653.
20. *Leditzky F., Kaur E., Datta N., Wilde M.M.* Approaches for Approximate Additivity of the Holevo Information of Quantum Channels // Phys. Rev. A. 2018. V. 97. № 1. P. 012332.
21. *Filippov S.N.* Lower and Upper Bounds on Nonunital Qubit Channel Capacities // Rep. Math. Phys. 2018. V. 82. № 2. P. 149–159.
22. *Amir D., Ziegler Z.* Relative Chebyshev Centers in Normed Linear Spaces. I // J. Approx. Theory. 1980. V. 29. № 3. P. 235–252.
23. *Гаркави А.Л.* О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // УМН. 1964. Т. 19. № 6 (120). С. 139–145.
24. *Amosov G.G.* Strong Superadditivity Conjecture Holds for the Quantum Depolarizing Channel in Any Dimension // Phys. Rev. A. 2007. V. 75. № 6. P. 060304(R) (2 pp.).
25. *King C.* The Capacity of the Quantum Depolarizing Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2003. V. 49. № 1. P. 221–229.
26. *Amosov G.G., Mancini S.* The Decreasing Property of Relative Entropy and the Strong Superadditivity of Quantum Channels // Quantum Inf. Comput. 2009. V. 9. № 7–8. P. 594–609.
27. *Amosov G.G.* On Weyl Channels Being Covariant with Respect to the Maximum Commutative Group of Unitaries // J. Math. Phys. 2007. V. 48. № 1. P. 012104 (14 pp.).

*Широков Максим Евгеньевич*
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
`msh@mi.ras.ru`

Поступила в редакцию
08.05.2019
После доработки
27.06.2019
Принята к публикации
01.07.2019