ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 55 **2019** **Вып. 3**

УДК 621.391.1 : 519.1

© 2019 г. **Л.А. Бассалыго**

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ Н. АЛОНА И М. КАПАЛЬБО "НЕБОЛЬШИЕ ЯВНЫЕ СУПЕРКОНЦЕНТРАТОРЫ"[1]

Слегка улучшается конструкция суперконцентратора Алона и Капальбо.

Ключевые слова: граф-расширитель, концентратор, суперконцентратор.

DOI: 10.1134/S0555292319030082

Авторы [1] предложили оригинальную конструкцию суперконцентратора. Так как мы лишь весьма незначительно изменим их конструкцию, то заимствуем и используем обозначения и результаты из [1].

Суперконцентратор Γ_N – это ориентированный граф без циклов с N входами (множество входов обозначим через X) и N выходами (множество выходов обозначим через Y), такой что для любого подмножества входов $S \subseteq X$ и выходов $T \subseteq Y$, $|S| = |T|$, в графе Γ_N существует $|S|$ непересекающихся по вершинам ориентированных путей из S в T. Задача, как обычно, состоит в построении суперконцентратора с наименьшим числом ребер. Предложенная в [1] рекуррентная конструкция суперконцентратора использует (как и все предыдущие конструкции) граф-расширитель. Понятие двудольного графа-расширителя было введено Пинскером в [2] для построения концентратора с линейным (по числу входов) числом ребер, хотя в неявном виде это понятие уже содержалось в [3]. Нам понадобится лишь частный случай графа-расширителя, так что мы не даем его общего определения, которое, к тому же, теперь широко известно. Пусть $E(X, X')$ – двудольный граф-расширитель с N входами X и N выходами X' (нумерация входов и выходов одинаковая; i-я вершина входа обозначается через x_i, а выхода – через x_i'). Пусть $S \subseteq X$, $|S| = \alpha N$. Используемый в [1] граф-расширитель таков, что:

1. Если $\alpha \leqslant 1/4$, то $|\mathcal{N}(S)| \geqslant 2|S|$;
2. Если $1/4 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, то $|\mathcal{N}(S)| \geqslant |S| + N/4$;
3. Если $1/2 \leqslant \alpha$, то $|\mathcal{N}(S)| \geqslant |S| + (1-\alpha)N/2$,

где $\mathcal{N}(S)$ обозначает множество вершин X', смежных с S. Расширитель $E(Y, Y')$ является копией расширителя $E(X, X')$. Паросочетанием в двудольном графе называется набор непересекающихся по вершинам ребер. Для любого $S \subseteq X$ обозначим через M_S паросочетание в $E(X, X')$, множество вершин которого в X совпадает с S, а через $M_S(X')$ – множество вершин паросочетания M_S в X'. В расширителе $E(Y, Y')$ подмножество вершин в Y будем обозначать буквой T.

Далее, не оговаривая особо, мы будем полагать, что оба расширителя $E(X, X')$ и $E(Y, Y')$ удовлетворяют условиям 1–3. Соединим теперь последовательно графы $E(X, X')$ и $E(Y, Y')$, отождествив X' и Y' (для $X' = Y'$ введем общее обозначение Z),

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 19-01-00364).

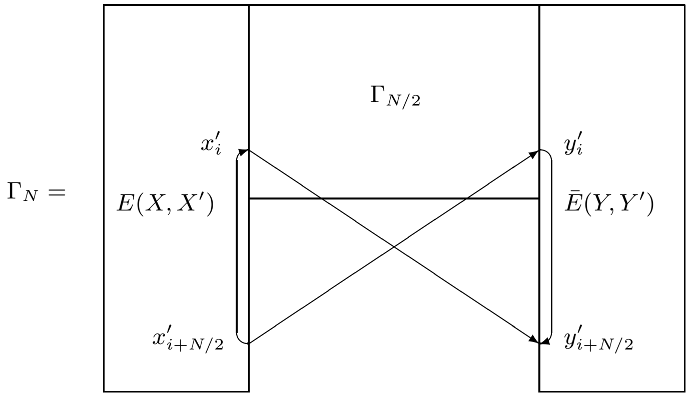

Рис. 1

и обозначим полученный граф через $E(X, Z, Y)$. Через $I(S, T)$, $I(S, T) \subseteq Z$, обозначим общие вершины в Z паросочетаний M_S в $E(X, Z)$ и M_T в $E(Y, Z)$: $I(S, T) = M_S(Z) \cap M_T(Z)$. В [1] доказано следующее

Предложение. *Пусть $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$, $|S| = |T| = \alpha N$. Тогда в графе $E(X, Z, Y)$ существуют паросочетания M_S в $E(X, Z)$ и M_T в $E(Y, Z)$, удовлетворяющие условиям*:

$1'$. *Если $\alpha \leqslant 1/4$, то $|I(S, T)| \geqslant 0$;*

$2'$. *Если $1/4 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, то $|I(S, T)| \geqslant (\alpha - 1/4)N$;*

$3'$. *Если $1/2 \leqslant \alpha$, то $|I(S, T)| \geqslant ((\alpha - (1 - \alpha)/2)N$;*

(В) *Если $z_i \notin I(S, T)$ и $z_{i+N/2} \notin I(S, T)$, то $\{z_i, z_{i+N/2}\} \nsubseteq M_S(Z)$ и $\{z_i, z_{i+N/2}\} \nsubseteq M_T(Z)$.*

Тривиальное уточнение этого предложения состоит в возможности замены условия (В) на условие

(В$'$) *Если $z_i \notin I(S, T)$ и $z_{i+N/2} \notin I(S, T)$, то $z_{i+N/2} \notin M_S(Z)$ и $z_{i+N/2} \notin M_T(Z)$.*

Не повторяя доказательства условия (В) в [1], укажем единственное отличие при доказательстве условия (В$'$), а именно: из двух склеенных вершин $\{z_i, z_{i+N/2}\}$ (см. доказательство в [1, с. 161]) в паросочетание всегда будем выбирать вершину z_i.

Несмотря на тривиальность такого уточнения, оно позволяет слегка изменить конструкцию суперконцентратора, предложенную в [1], и даже уменьшить число ребер в суперконцентраторе (правда, лишь весьма незначительно). Благодаря замене условия (В) на (В$'$) рекуррентная схема суперконцентратора, предложенная в [1] (см. рис. 1), заменяется на схему, изображенную на рис. 2, с сохранением свойств суперконцентратора.

Действительно, для любого i, $i = 1, 2, \ldots, N$, вершины $x'_{i+N/2}$ и $y'_{i+N/2}$ одновременно принадлежат или не принадлежат $I(S, T)$. В первом случае они соединяются непосредственно ребром (см. рис. 2). Второй случай рассмотрим подробнее. Пусть $x'_{i+N/2} \in M_S(X) \setminus I(S, T)$, а $y'_{i+N/2} \notin M_S(Y)$. Тогда согласно условию (В$'$) вершина $x'_i \in I(S, T)$, и следовательно, $y'_i \in I(S, T) \subseteq M_S(Y)$, так что достаточно соединить ребром вершины $x'_{i+N/2}$ и y'_i. Аналогично поступим, когда $y'_{i+N/2} \in M_S(Y) \setminus I(S, T)$, а $x'_{i+N/2} \notin M_S(X)$, соединяя ребром вершину $x'_i \in M_S(X)$ с вершиной $y'_{i+N/2}$ (см. рис. 2).

Таким образом, вместо $2N$ ребер схемы рис. 1 мы проводим $3N/2$ ребер. Так как

$$|\Gamma_N| = 2|E(X, X')| + |\Gamma_{N/2}| + 3N/2 = 4|E(X, X')| + 3N + o(N),$$

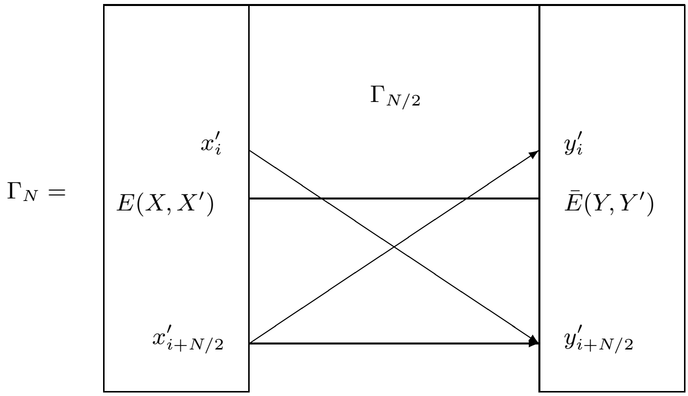

Рис. 2

то окончательный результат зависит от числа ребер в расширителе, удовлетворяющем условиям 1–3. Авторы [1] привели явную конструкцию расширителя с $10N$ ребрами, а следовательно, и явную конструкцию суперконцентратора, изображенного на рис. 1, с числом ребер, равным $44N + o(N)$. Параметры случайных достаточно экономных расширителей давно известны [4] (см. также [5]), и в [6] было указано, что существует расширитель с $6N$ ребрами, удовлетворяющий условиям 1–3, а следовательно, существует суперконцентратор, изображенный на рис. 1, с числом ребер, равным $28N + o(N)$. Переход к суперконцентратору, изображенному на рис. 2, позволяет слегка понизить сложность суперконцентратора: до $43N + o(N)$ для явной конструкции, и до $27N + o(N)$ для неявной.

Замечание. Небольшим преимуществом изображенного на рис. 2 суперконцентратора, как нам представляется, является и отсутствие ребер, соединяющих выходы расширителей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alon N., Capalbo M.* Smaller Explicit Superconcentrators // Internet Math. 2004. V. 1. № 2. P. 151–163.
2. *Pinsker M.S.* On the Complexity of a Concentrator // Proc. 7th Int. Teletraffic Conf. (ITC 7). Stockholm, Sweden. June 13–20, 1973. P. 318/1–318/4.
3. *Колмогоров А.Н., Бардзинь Я.М.* О реализации сетей в трехмерном пространстве // Проблемы кибернетики. Вып. 19. М.: Физматлит, 1967. С. 261–268.
4. *Бассалыго Л.А.* Асимптотически оптимальные коммутационные схемы // Пробл. передачи инфор. 1981. Т. 17. № 3. С. 81–88.
5. *Schöning U.* Construction of Expanders and Superconcentrators Using Kolmogorov Complexity // Random Structures Algorithms. 2000. V. 17. № 1. P. 64–77.
6. *Schöning U.* Smaller Superconcentrators of Density 28 // Inform. Process. Lett. 2006. V. 98. № 4. P. 127–129.

Бассалыго Леонид Александрович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
bass@iitp.ru

Поступила в редакцию
14.12.2018
После доработки
07.03.2019
Принята к публикации
21.05.2019