ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 **2020** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.72

 В.В. Прелов

О МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ *f*-ДИВЕРГЕНЦИИ И ДИВЕРГЕНЦИИ РЕНЬИ ПРИ ЗАДАННОМ ВАРИАЦИОННОМ РАССТОЯНИИ[1]

Рассматривается задача о нахождении максимальных значений f-дивергенций $D_f(P \,\|\, Q)$ дискретных распределений вероятностей P и Q со значениями на конечном множестве при условии, что заданы вариационное расстояние $V(P,Q)$ между ними и одно из распределений вероятностей P или Q. Получены точные выражения для указанных максимумов f-дивергенций, которые в ряде случаев позволяют выписать для них как явные формулы, так и простые верхние границы. В качестве следствия получены явные выражения для максимумов f-дивергенций $D_f(P \,\|\, Q)$ при условии, что кроме $V(P,Q)$ задана лишь величина минимальной компоненты распределения P или распределения Q. Аналогичные результаты получены и для дивергенции Реньи.

Ключевые слова: f-дивергенция, дивергенция Реньи, вариационное расстояние, дискретные распределения вероятностей.

DOI: 10.31857/S0555292320010015

Понятие f-дивергенции для вероятностных распределений было введено Чисаром [1, 2] и независимо Али и Силвейем [3], а несколько позднее переоткрыто Закаи и Зивом [4]. В случае дискретных распределений вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ и $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, определенных на конечном множестве $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, которые и будут рассматриваться в этой статье, f-дивергенция $D_f(P \,\|\, Q)$ распределения P относительно Q определяется равенством

$$D_f(P \,\|\, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right), \tag{1}$$

где $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, такая что $f(1) = 0$ (в дальнейшем мы всегда будем считать, что $f(\cdot)$ – дважды дифференцируемая функция, такая что $f''(x) > 0$, $x \neq 1$). При этом всегда предполагается, что:

- $0 \cdot f\left(\dfrac{0}{0}\right) = 0;$
- $f(0) = \lim\limits_{u \downarrow 0} f(u);$
- $0 \cdot f\left(\dfrac{a}{0}\right) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon f\left(\dfrac{a}{\varepsilon}\right) = a \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{t}$, где $a \neq 0$.

Заметим, что вышеуказанные пределы всегда существуют (хотя могут быть равны бесконечности), так как $f(\cdot)$ – выпуклая функция.

Многие известные меры различия между вероятностными распределениями, используемые в теории информации, теории вероятностей и математической стати-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 19-01-00364).

стике, являются частными случаями f-дивергенции. Среди подобных мер различия отметим следующие:

- Обычные (информационные) дивергенции

$$D(P \,\|\, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad \text{и} \quad D(Q \,\|\, P) = \sum_{i \in \mathcal{N}} q_i \log \frac{q_i}{p_i} \tag{2}$$

  являются f-дивергенциями при $f(t) = t \log t$ и $f(t) = -\log t$ соответственно;
- Вариационное расстояние

$$V(P, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} |p_i - q_i| = D_f(P \,\|\, Q) \quad \text{при } f(t) = |t-1|; \tag{3}$$

- Дивергенция Йенсена – Шеннона

$$S(P \,\|\, Q) = D\Big(P \,\Big\|\, \frac{P+Q}{2}\Big) + D\Big(Q \,\Big\|\, \frac{P+Q}{2}\Big) = D_f(P \,\|\, Q) \tag{4}$$

  при $f(t) = t \log t - (1+t) \log \dfrac{1+t}{2}$;
- Треугольная дивергенция

$$\triangle(P \,\|\, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{(p_i - q_i)^2}{p_i + q_i} = D_f(P \,\|\, Q) \quad \text{при } f(t) = \frac{(t-1)^2}{t+1}; \tag{5}$$

- χ^2-дивергенция

$$\begin{aligned} &\chi^2(P \,\|\, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} = D_f(P \,\|\, Q) \\ &\text{при } f(t) = (t-1)^2 \quad \text{или} \quad f(t) = t^2 - 1; \end{aligned} \tag{6}$$

- Квадрат расстояния Хеллингера

$$h^2(P, Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2 = D_f(P \,\|\, Q) \quad \text{при } f(t) = 2(1 - \sqrt{t}); \tag{7}$$

- Дивергенция Хеллингера порядка α, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$,

$$\mathcal{H}_\alpha(P \,\|\, Q) = D_f(P \,\|\, Q) \quad \text{при } f(t) = f_\alpha(t) = \frac{t^\alpha - 1}{\alpha - 1}. \tag{8}$$

Заметим, что χ^2-дивергенция и квадрат расстояния Хеллингера являются частными случаями дивергенции Хеллингера, т.е. $\chi^2(P \,\|\, Q) = \mathcal{H}_2(P \,\|\, Q)$ и $h^2(P, Q) = \mathcal{H}_{1/2}(P \,\|\, Q)$.

Дивергенция Реньи $D_\alpha(P \,\|\, Q)$ положительного порядка α, $\alpha \neq 1$ (не являющаяся f-дивергенцией), между распределениями вероятностей P и Q определяется равенством (см. [5, 6])

$$D_\alpha(P \,\|\, Q) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \sum_{i \in \mathcal{N}} p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{9}$$

где для $\alpha > 1$ предполагается, что $0/0 = 0$ и $a/0 = \infty$ при $a > 0$.

Изучению различных свойств f-дивергенции и дивергенции Реньи посвящено большое количество работ (см., например, работы [6–8] и библиографию в них). В частности, много работ посвящено выводу различных неравенств между разными типами f-дивергенций (см., например, [9–11]), а в [12] приведен подробный обзор подобных неравенств, содержащий и ряд новых неравенств, полученных авторами этой работы.

В работе [13] получено параметрическое выражение для минимального значения f-дивергенции при заданном вариационном расстоянии между двумя распределениями вероятностей. Явное же выражение для указанного минимума f-дивергенции в [13] получено лишь в случае, когда функция $f(\cdot)$ обладает некоторого рода симметрией.

В работе [14] получены точные, а в некоторых случаях и явные выражения для максимальных значений (обычных) дивергенций $D(P\,\|\,Q)$ и $D(Q\,\|\,P)$ при условии, что заданы вариационное расстояние $V(P,Q)$ и распределение вероятностей Q. В общем случае это позволило получить оптимальную верхнюю границу для $D(P\,\|\,Q)$ при заданных $V(P,Q)$ и минимальной компоненте распределения Q, которая улучшает границу Сасона – Верду [12, 15]. В данной статье мы обобщаем результаты [14] на случай f-дивергенций и дивергенций Реньи, попутно исправляя одну неточность в формулировке следствия из теоремы 1 в [14] (см. замечание 2 ниже).

Для формулировки полученных результатов введем необходимые определения и обозначения. Для распределений вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ и $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ обозначим $p_{\min} = \min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i$ и $q_{\min} = \min\limits_{i\in\mathcal{N}} q_i$ и заметим, что при заданном P и любых Q вариационное расстояние $V(P,Q)$ может изменяться в пределах от 0 до $2(1-p_{\min})$, а при заданном Q и любых P величина $V(P,Q)$ может изменяться от 0 до $2(1-q_{\min})$.

Для фиксированного распределения вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n = p_{\min} > 0$, и действительного числа v, $0 \leqslant v \leqslant 2(1-p_{\min})$, положим

$$D_f^{\max}(P,v) = \max_{Q:\,V(P,Q)=v} D_f(P\,\|\,Q), \tag{10}$$

и аналогично для фиксированного распределения $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n = q_{\min} > 0$, и числа v, $0 \leqslant v \leqslant 2(1-q_{\min})$, обозначим

$$D_f^{\max}(Q,v) = \max_{P:\,V(P,Q)=v} D_f(P\,\|\,Q). \tag{11}$$

Введем также величины $D_f^{\max}(p_{\min},v)$ и $D_f^{\max}(q_{\min},v)$, определяемые равенствами

$$D_f^{\max}(p_{\min},v) = \max_{(P,Q):\,V(P,Q)=v,\ \min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i = p_{\min}} D_f(P\,\|\,Q), \tag{12}$$

$$D_f^{\max}(q_{\min},v) = \max_{(P,Q):\,V(P,Q)=v,\ \min\limits_{i\in\mathcal{N}} q_i = q_{\min}} D_f(P\,\|\,Q), \tag{13}$$

причем максимумы в (12), (13) берутся по всем возможным распределениям $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ и $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, таким что $V(P,Q) = v$ и при этом $p_{\min} > 0$ в (12) и $q_{\min} > 0$ в (13).

Аналогичные величины вводим и для дивергенции Реньи (9):

$$D_\alpha^{\max}(P,v) = \max_{Q:\,V(P,Q)=v} D_\alpha(P\,\|\,Q), \tag{14}$$

$$D_\alpha^{\max}(Q,v) = \max_{P:\,V(P,Q)=v} D_\alpha(P\,\|\,Q), \tag{15}$$

$$D_\alpha^{\max}(p_{\min},v) = \max_{(P,Q):\,V(P,Q)=v,\ \min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i = p_{\min}} D_\alpha(P\,\|\,Q), \tag{16}$$

$$D_\alpha^{\max}(q_{\min},v) = \max_{(P,Q):\,V(P,Q)=v,\ \min\limits_{i\in\mathcal{N}} q_i = q_{\min}} D_\alpha(P\,\|\,Q). \tag{17}$$

Обозначим через $\mathcal{N}_s$ подмножество $\mathcal{N}$, не содержащее элемент s, т.е. $\mathcal{N}_s = \mathcal{N}\setminus\{s\}$. Для заданного распределения вероятностей $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ и параметра v, $0 \leqslant v \leqslant$

$\leqslant 2(1-p_{\min})$, всякое равенство

$$\frac{v}{2}=\sum_{i\in I_s}p_i+\beta, \quad \text{где} \quad I_s\subseteq\mathcal{N}_s, \tag{18}$$

назовем *допустимым* (P,I_s)*-представлением* $\frac{v}{2}$, если либо $\beta=0$, либо существует индекс $j\in\mathcal{N}_s\setminus I_s$, такой что $0<\beta<p_j$. Аналогично определяется *допустимое* (Q,I_s)*-представление* $\frac{v}{2}$, если задано распределение $Q=\{q_i,\ i\in\mathcal{N}\}$ и параметр v, $0\leqslant v\leqslant 2(1-q_{\min})$.

Теорема 1. *Для любого распределения вероятностей $P=\{p_i,\ i\in\mathcal{N}\}$, такого что $p_1\geqslant p_2\geqslant\ldots\geqslant p_n>0$, и любого v, $0\leqslant v\leqslant 2(1-p_n)$, для величины $D_f^{\max}(P,v)$, определенной в* (10), *справедливы следующие утверждения*:

1. *Если $f^*=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\infty$, то*

$$D_f^{\max}(P,v)=\begin{cases}\infty, & \text{если } \frac{v}{2}\geqslant p_n,\\ m_P, & \text{если } 0\leqslant\frac{v}{2}<p_n,\end{cases} \tag{19}$$

где

$$m_P=\max\left\{\left(p_n+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_n}{p_n+\frac{v}{2}}\right)+\left(p_{n-1}-\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}-\frac{v}{2}}\right),\right.$$
$$\left.\left(p_{n-1}+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+\frac{v}{2}}\right)+\left(p_n-\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_n}{p_n-\frac{v}{2}}\right)\right\}. \tag{20}$$

2. *Если $f^*=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}<\infty$, то*

- *Для любого v справедливо равенство*

$$D_f^{\max}(P,v)=$$
$$=\max_{s,I_s}\left\{\left(p_s+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_s}{p_s+\frac{v}{2}}\right)+(p_k-\beta)f\left(\frac{p_k}{p_k-\beta}\right)+\left(\frac{v}{2}-\beta\right)f^*\right\}, \tag{21}$$

  где $p_k=\min\limits_{j:\,j\in\mathcal{N}_s\setminus I_s,\,\beta<p_j}\{p_j\}$, а максимум в правой части (21) *берется по всем s и всем допустимым (P,I_s)-представлениям $\frac{v}{2}$, таким что $t\leqslant s\leqslant n$, где $t=$ $=\min\left\{i:\ p_i+\frac{v}{2}\leqslant 1\right\}$;*

- *Если $0\leqslant\frac{v}{2}\leqslant p_n$, то*

$$D_f^{\max}(P,v)=m_P, \tag{22}$$

  где m_P определено в (20);

- *Для любых v справедлива верхняя граница*

$$D_f^{\max}(P,v)\leqslant\left(p_n+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_n}{p_n+\frac{v}{2}}\right)+\frac{vf^*}{2}, \tag{23}$$

  причем эта верхняя граница достигается, т.е.

$$D_f^{\max}(P,v)=\left(p_n+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_n}{p_n+\frac{v}{2}}\right)+\frac{vf^*}{2}, \tag{24}$$

если $\dfrac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i p_i$ *при любых* $a_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении. Во многом аналогичное утверждение справедливо и для величины $D_f^{\max}(Q, v)$, определенной в (11).

Теорема 2. *Для любого распределения вероятностей* $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, *такого что* $q_1 \geqslant q_2 \geqslant \ldots \geqslant q_n > 0$, *и любого* v, $0 \leqslant v \leqslant 2(1 - q_n)$, *для величины* $D_f^{\max}(Q, v)$ *справедливы следующие утверждения*:

1. *Если* $f(0) = \infty$, *то*

$$D_f^{\max}(Q, v) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \dfrac{v}{2} \geqslant q_n, \\ m_Q, & \text{если } 0 \leqslant \frac{v}{2} < q_n, \end{cases} \tag{25}$$

где

$$m_Q = \max\Bigg\{ q_n f\left(\frac{q_n + \frac{v}{2}}{q_n}\right) + q_{n-1} f\left(\frac{q_{n-1} - \frac{v}{2}}{q_{n-1}}\right), \\ q_{n-1} f\left(\frac{q_{n-1} + \frac{v}{2}}{q_{n-1}}\right) + q_n f\left(\frac{q_n - \frac{v}{2}}{q_n}\right) \Bigg\}. \tag{26}$$

2. *Если* $f(0) < \infty$, *то*

- *Для любого* v *справедливо равенство*

  $$D_f^{\max}(Q, v) = \max_{s, I_s} \left\{ q_s f\left(\frac{q_s + \frac{v}{2}}{q_s}\right) + q_k f\left(\frac{q_k - \beta}{q_k}\right) + \left(\frac{v}{2} - \beta\right) f(0) \right\}, \tag{27}$$

  где $q_k = \min\limits_{j:\, j \in \mathcal{N}_s \setminus I_s,\, \beta < q_j} \{q_j\}$, *а максимум в правой части* (27) *берется по всем* s *и всем допустимым* (Q, I_s)-*представлениям* $\dfrac{v}{2}$, *таким что* $t \leqslant s \leqslant n$, *где* $t = \min\left\{ i : \, q_i + \dfrac{v}{2} \leqslant 1 \right\}$;
- *Если* $0 \leqslant \dfrac{v}{2} \leqslant q_n$, *то*

  $$D_f^{\max}(Q, v) = m_Q, \tag{28}$$

  где m_Q *определено в* (26);
- *Для любых* v *справедлива верхняя граница*

  $$D_f^{\max}(Q, v) \leqslant q_n f\left(\frac{q_n + \frac{v}{2}}{q_n}\right) + \frac{v f(0)}{2}, \tag{29}$$

  причем эта верхняя граница достигается, т.е.

  $$D_f^{\max}(Q, v) = q_n f\left(\frac{q_n + \frac{v}{2}}{q_n}\right) + \frac{v f(0)}{2}, \tag{30}$$

  если $\dfrac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i q_i$ *при любых* $a_i \in \{0, 1\}$.

Доказательство этой теоремы также приведено в Приложении. Из теорем 1 и 2 можно вывести

Следствие. *Для величин* $D_f^{\max}(p_{\min}, v)$ *и* $D_f^{\max}(q_{\min}, v)$, *определенных в* (12) *и* (13), *в случае* $|\mathcal{N}| = n \geqslant 3$ *справедливы следующие утверждения*:

- *Для всех* $p_{\min}$, $0 < p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$, *и всех* v, $0 \leqslant v \leqslant 2(1-p_{\min})$, *справедлива верхняя граница*

$$D_f^{\max}(p_{\min}, v) \leqslant \left(p_{\min} + \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_{\min}}{p_{\min} + \frac{v}{2}}\right) + \frac{vf^*}{2}; \tag{31}$$

- *Эта верхняя граница достигается, т.е.*

$$D_f^{\max}(p_{\min}, v) = \left(p_{\min} + \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_{\min}}{p_{\min} + \frac{v}{2}}\right) + \frac{vf^*}{2}, \tag{32}$$

если $p_{\min} < \frac{v}{2} < 1 - 2p_{\min}$ *и* $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n+1}$, *а также если* $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$ *и* $\frac{v}{2} = 1 - p_{\min}$ *или* $\frac{v}{2} = kp_{\min}$, *где* k *– целое, такое что* $1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{1-p_{\min}}{p_{\min}} \right\rfloor$;

- *Если* $0 \leqslant \frac{v}{2} \leqslant p_{\min}$, *то*

$$D_f^{\max}(p_{\min}, v) = \left(p_{\min} + \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_{\min}}{p_{\min} + \frac{v}{2}}\right) + \left(p_{\min} - \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_{\min}}{p_{\min} - \frac{v}{2}}\right); \tag{33}$$

- *Для всех* $q_{\min}$, $0 < q_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$, *и всех* v, $0 \leqslant v \leqslant 2(1-q_{\min})$, *справедлива верхняя граница*

$$D_f^{\max}(q_{\min}, v) \leqslant q_{\min} f\left(\frac{q_{\min} + \frac{v}{2}}{q_{\min}}\right) + \frac{vf(0)}{2}; \tag{34}$$

- *Эта верхняя граница достигается, т.е.*

$$D_f^{\max}(q_{\min}, v) = q_{\min} f\left(\frac{q_{\min} + \frac{v}{2}}{q_{\min}}\right) + \frac{vf(0)}{2}, \tag{35}$$

если $q_{\min} < \frac{v}{2} < 1 - 2q_{\min}$ *и* $q_{\min} \leqslant \frac{1}{n+1}$, *а также если* $q_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$ *и* $\frac{v}{2} = 1 - q_{\min}$ *или* $\frac{v}{2} = kq_{\min}$, *где* k *– целое, такое что* $1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{1-q_{\min}}{q_{\min}} \right\rfloor$;

- *Если* $0 \leqslant \frac{v}{2} \leqslant q_{\min}$, *то*

$$D_f^{\max}(q_{\min}, v) = q_{\min}\left[f\left(\frac{q_{\min} + \frac{v}{2}}{q_{\min}}\right) + f\left(\frac{q_{\min} - \frac{v}{2}}{q_{\min}}\right)\right]. \tag{36}$$

Доказательство этого следствия также приведено в Приложении.

Замечание 1. Во многих конкретных случаях f-дивергенций можно указать точные значения величин m_P и m_Q, определенных в (20) и (26). Например, в случае обычной дивергенции $D(P \,\|\, Q)$ (когда $f(t) = t \log t$) легко проверить, что

$$m_P = p_n \log\left(1 + \frac{v}{2p_n - v}\right) + p_{n-1} \log\left(1 - \frac{v}{2p_{n-1} + v}\right),$$
$$m_Q = \left(q_{n-1} + \frac{v}{2}\right) \log\left(1 + \frac{v}{2q_{n-1}}\right) + \left(q_n - \frac{v}{2}\right) \log\left(1 - \frac{v}{2q_n}\right).$$

Замечание 2. Частным случаем приведенного выше следствия является следствие в работе [14], в формулировке которого имеется опечатка: вместо условия $0 \leqslant v \leqslant 2(1-q_{\min})$ должно быть $0 \leqslant v \leqslant 2(1-2q_{\min})$. Кроме того, к условию

$\dfrac{v}{2} \geqslant q_{\min}$ для справедливости равенства (17) в [14] следует добавить условие, что $q_{\min} \leqslant \dfrac{1}{|\mathcal{N}|+1}$ (при котором всегда справедливо неравенство (20) в [14]).

Для нахождения максимальных значений дивергенций Реньи, определенных в (14)–(17), заметим, что хотя дивергенция Реньи $D_\alpha(P\,\|\,Q)$ и не является f-дивергенцией, но легко видеть, что она является монотонной функцией от некоторой f-дивергенции. Действительно, справедливы следующие равенства:

- Если $\alpha > 1$, то

$$D_\alpha(P\,\|\,Q) = \frac{1}{\alpha-1}\log\sum_{i\in\mathcal{N}} p_i^\alpha q_i^{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\log\left[D_f(P\,\|\,Q)+1\right], \tag{37}$$

  где $f(t) = t^\alpha - 1$. Эта функция $f(t)$ удовлетворяет всем требованиям при определении f-дивергенции (т.е. она является выпуклой функцией на интервале $(0,\infty)$, для которой $f(1) = 0$);

- Если $0 < \alpha < 1$, то

$$D_\alpha(P\,\|\,Q) = \frac{1}{\alpha-1}\log\bigl[-D_{\widetilde{f}}(P\,\|\,Q)+1\bigr], \tag{38}$$

  где $\widetilde{f}(t) = 1 - t^\alpha$, что тоже удовлетворяет всем требованиям к f-дивергенции.

Поэтому

$$D_\alpha^{\max}(P,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\log\bigl[D_f^{\max}(P,v)+1\bigr], & \text{если } \alpha > 1,\\ \dfrac{1}{\alpha-1}\log\bigl[-D_{\widetilde{f}}^{\max}(P,v)+1\bigr], & \text{если } 0 \leqslant \alpha < 1, \end{cases} \tag{39}$$

а для величин $D_f^{\max}(P,v)$ и $D_{\widetilde{f}}^{\max}(P,v)$ при $f(t) = t^\alpha - 1$, $\alpha > 1$, и $\widetilde{f}(t) = 1 - t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, справедливы утверждения теоремы 1.

Формулы, аналогичные равенству (39), справедливы и для величин $D_\alpha^{\max}(Q,v)$, $D_\alpha^{\max}(p_{\min},v)$ и $D_\alpha^{\max}(q_{\min},v)$, определенных в (15)–(17). При этом нетрудно показать, что величины m_P и m_Q, определенные в (20) и (26), для функций $f(t) = t^\alpha - 1$, $\alpha > 1$, и $\widetilde{f}(t) = 1 - t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, принимают следующий вид:

$$m_P = p_n^\alpha\left(p_n - \frac{v}{2}\right)^{1-\alpha} + p_{n-1}^\alpha\left(p_{n-1} + \frac{v}{2}\right)^{1-\alpha} - p_n - p_{n-1} \qquad \text{при всех } \alpha > 0,\ \alpha \neq 1, \tag{40}$$

$$m_Q = \begin{cases} q_n^{1-\alpha}\left(q_n - \dfrac{v}{2}\right)^\alpha + q_{n-1}^{1-\alpha}\left(q_{n-1} + \dfrac{v}{2}\right)^\alpha - q_n - q_{n-1}, & \text{если } \alpha \leqslant 2,\ \alpha \neq 1,\\ q_n^{1-\alpha}\left(q_n + \dfrac{v}{2}\right)^\alpha + q_{n-1}^{1-\alpha}\left(q_{n-1} - \dfrac{v}{2}\right)^\alpha - q_n - q_{n-1}, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases} \tag{41}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. **1.** Докажем вначале равенство (19). Так как по условию распределение $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ задано и $p_i > 0$ для всех $i \in \mathcal{N}$, то из определения f-дивергенции (1) следует, что

$$D_f(P\,\|\,Q) = \sum_{i\colon q_i>0} q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) + f^* \sum_{i\colon q_i=0} p_i, \tag{П.1}$$

где $f^* = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}$. Поэтому величина $D_f^{\max}(P,v)$, определенная в (10), равна бесконечности тогда и только тогда, когда $f^* = \infty$ и существует распределение $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, такое что $V(P, Q) = v$ и хотя бы одна из его компонент $q_i = 0$. Легко видеть, что это возможно лишь в случае, когда $v \geqslant 2p_n$, откуда и следует первое из равенств в (19).

Для доказательства второго из равенств в (19), когда $0 \leqslant v < 2p_n$, вначале покажем, что существует оптимальное распределение $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ (т.е. распределение, на котором достигается значение $D_f^{\max}(P, v)$), для которого $V(P, Q) = v$ и существуют два индекса s и ℓ, $\ell \neq s$, такие что $q_s = p_s + \dfrac{v}{2}$ и $q_\ell = p_\ell - \dfrac{v}{2}$, а все остальные $q_i = p_i$.

Пусть $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ – некоторое распределение вероятностей, для которого $V(P, Q) = v$ и существуют по крайней мере две его компоненты q_k и q_j, $k \neq j$, такие что $q_k > p_k$ и $q_j > p_j$. Покажем, что тогда это распределение Q не может быть оптимальным, так как найдется другое распределение $\widehat{Q} = \{\widehat{q}_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, для которого $V(P, \widehat{Q}) = v$ и $D_f(P \,\|\, \widehat{Q}) > D_f(P \,\|\, Q)$. Для этого рассмотрим распределение вероятностей $Q(x) = \{q_i(x),\ i \in \mathcal{N}\}$, зависящее от параметра x, где

$$q_i(x) = \begin{cases} q_i & \text{при } i \in \mathcal{N} \setminus \{k, j\}, \\ q_k + x & \text{при } i = k, \\ q_j - x & \text{при } i = j, \end{cases} \tag{П.2}$$

причем параметр x удовлетворяет условиям $p_k - q_k \leqslant x \leqslant q_j - p_j$. Очевидно, что $V(P, Q(x)) = v$ при любом x, и нетрудно проверить, что разность $\Delta(x) = D_f(P \,\|\, Q(x)) - D_f(P \,\|\, Q)$ является выпуклой функцией x, а $\Delta(0) = 0$. Действительно, легко убедиться, что

$$\Delta''(x) = \frac{p_k^2}{(q_k + x)^3} f''\Big(\frac{p_k}{q_k + x}\Big) + \frac{p_j^2}{(q_j - x)^3} f''\Big(\frac{p_j}{q_j - x}\Big) > 0,$$

так как по условию $f(\cdot)$ – выпуклая функция. Поэтому существует $x \in (p_k - q_k, q_j - p_j)$, для которого распределение $\widehat{Q} = Q(x)$ удовлетворяет условию $D_f(P \,\|\, \widehat{Q}) > D_f(P \,\|\, Q(0)) = D_f(P \,\|\, Q)$. Отсюда немедленно следует, что существует оптимальное распределение $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, для которого $V(P, Q) = v$ и $q_s = p_s + \dfrac{v}{2}$ при некотором s.

Аналогично доказывается, что существует оптимальное распределение $Q = \{q_i, i \in \mathcal{N}\}$, для которого не только $q_s = p_s + \dfrac{v}{2}$ при некотором s, но и $q_\ell = p_\ell - \dfrac{v}{2}$ при некотором $\ell \neq s$. Действительно, для доказательства этого утверждения достаточно показать, что любое распределение $Q = \{q_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, для которого $V(P, Q) = v$ и существуют по крайней мере две его компоненты q_k и q_j, $k \neq j$, такие что $q_k < p_k$ и $q_j < p_j$, не может быть оптимальным. Снова, рассматривая распределение вероятностей $Q(x) = \{q_i(x),\ i \in \mathcal{N}\}$, зависящее от параметра x, компоненты которого задаются формулами (П.2), а параметр x удовлетворяет ограничениям $\max\{-q_k, q_j - p_j\} \leqslant x \leqslant \min\{q_j, p_k - q_k\}$, обнаруживаем, что разность $\Delta(x) = D_f(P \,\|\, Q(x)) - D_f(P \,\|\, Q)$ является выпуклой функцией x, а этого достаточно для доказательства сформулированного выше утверждения, поскольку отсюда следует, что оптимальное распределение имеет лишь одну компоненту (скажем, q_ℓ), меньшую соответствующего p_ℓ, а так как по условию $v < 2p_n$, то эта компонента равна $p_\ell - \dfrac{v}{2}$.

Поэтому, если $v < 2p_n$, то

$$D_f^{\max}(P, v) = \max_{s, \ell:\, s \neq \ell} \left\{ \Big(p_s + \frac{v}{2}\Big) f\left(\frac{p_s}{p_s + \frac{v}{2}}\right) + \Big(p_\ell - \frac{v}{2}\Big) f\left(\frac{p_\ell}{p_\ell - \frac{v}{2}}\right) \right\}. \tag{П.3}$$

Теперь, учитывая (П.3), для доказательства второго равенства в (19) достаточно показать, что обе функции $\left(p_s+\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_s}{p_s+v/2}\right)$ и $\left(p_\ell-\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_\ell}{p_\ell-v/2}\right)$ убывают по p_s и p_ℓ соответственно. Для этого покажем, что функция $g(x)=(x+a)f\left(\dfrac{x}{x+a}\right)$ убывает по x. Имеем

$$g'(x)=f\left(1-\frac{a}{x+a}\right)+\frac{a}{x+a}f'\left(1-\frac{a}{x+a}\right).$$

Полагая $u=\dfrac{a}{x+a}$, рассмотрим функцию $\widetilde{g}(u)=f(1-u)+uf'(1-u)$ при $0\leqslant u\leqslant 1$. Теперь, замечая, что $\widetilde{g}'(u)=-uf''(1-u)<0$, а $\widetilde{g}(0)=f(1)+0f'(1)=0$, мы видим, что $g'(x)<0$, что и доказывает наше утверждение об убывании функций $\left(p_s+\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_s}{p_s+v/2}\right)$ и $\left(p_\ell-\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_\ell}{p_\ell-v/2}\right)$ по p_s и p_ℓ соответственно. Второе равенство в (19) доказано.

2. Переходим к рассмотрению случая, когда $f^*=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}<\infty$. В этом случае, когда $v<2p_n$, применимы все рассуждения первого пункта доказательства, показывающие, что для $D_f^{\max}(P,v)$ справедлива формула (22). Если же $2p_n\leqslant v\leqslant 2(1-p_n)$, то эти рассуждения показывают, что существует оптимальное распределение $Q=\{q_i, i\in\mathcal{N}\}$, для которого $V(P,Q)=v$ и которое имеет ровно одну компоненту (скажем, q_s), строго большую соответствующей компоненты p_s, и поэтому $q_s=p_s+\dfrac{v}{2}$, и не более одной ненулевой компоненты (скажем, q_ℓ, $\ell\neq s$), строго меньшей соответствующей компоненты p_ℓ, такой что $q_\ell=p_\ell-\beta$, где $0<\beta<p_\ell$. При этом часть компонент оптимального распределения $Q=\{q_i,\ i\in\mathcal{N}\}$ может равняться нулю, например, $q_i=0$ при $i\in I_s\subseteq\mathcal{N}_s$. В этом случае очевидно, что $\dfrac{v}{2}=\sum\limits_{i\in I_s}p_i+\beta$. Отсюда сразу следует, что

$$D_f^{\max}(P,v)=\max\left\{\left(p_s+\frac{v}{2}\right)f\left(\frac{p_s}{p_s+\frac{v}{2}}\right)+(p_j-\beta)f\left(\frac{p_j}{p_j-\beta}\right)+\left(\frac{v}{2}-\beta\right)f^*\right\},$$

где максимум берется по всем s, $t\leqslant s\leqslant n$, где $t=\min\left\{i:\ p_i+\dfrac{v}{2}\leqslant 1\right\}$, всем допустимым (P,I_s)-представлениям $\dfrac{v}{2}$ и всем j, таким что $j\in\mathcal{N}_s\setminus I_s$, $\beta<p_j$. Поэтому для доказательства формулы (21) следует лишь заметить, что функция $(p_j-\beta)f\left(\dfrac{p_j}{p_j-\beta}\right)$ убывает по p_j и поэтому ее максимум достигается при минимальном возможном ($j\in\mathcal{N}_s\setminus I_s$) значении p_j, для которого $p_j>\beta$.

Докажем теперь неравенство (23). Для этого ввиду (21) достаточно заметить, что $\left(p_s+\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_s}{p_s+v/2}\right)\leqslant\left(p_n+\dfrac{v}{2}\right) f\left(\dfrac{p_n}{p_n+v/2}\right)$ и что при любых p_k и β, $0\leqslant\beta\leqslant p_k$, справедливо неравенство

$$(p_k-\beta)\,f\left(\frac{p_k}{p_k-\beta}\right)-\beta f^*\leqslant 0. \tag{П.4}$$

Неравенство (П.4) следует из того, что его левая часть является выпуклой функцией β при $0\leqslant\beta\leqslant p_k$, а при $\beta=0$ и при $\beta=p_k$ она равна нулю ввиду условий на функцию f при определении f-дивергенции. Если же $\dfrac{v}{2}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ip_i$ при некоторых $a_i\in\{0,1\}$, т.е. $\dfrac{v}{2}=\sum\limits_{i\in I_n}p_i$, где $I_n\subseteq\mathcal{N}_n$, то очевидно, что имеет место равенство (24), так как

$$D_f(P\,\|\,Q)=\Bigl(p_n+\frac{v}{2}\Bigr)\,f\Biggl(\frac{p_n}{p_n+\dfrac{v}{2}}\Biggr)+\frac{vf^*}{2},$$

если $Q=\{q_i,\ i\in\mathcal{N}\}$, где $q_n=p_n+\dfrac{v}{2}$, $q_i=0$ при $i\in I_n$ и $q_j=p_j$ при $j\in\mathcal{N}_n\setminus I_n$. ▲

Доказательство теоремы 2. Это доказательство во многом аналогично приведенному выше доказательству теоремы 1.

1. В данном случае предполагается, что распределение $Q=\{q_i,\ i\in\mathcal{N}\}$ задано и $q_i>0$ для всех $i\in\mathcal{N}$, поэтому вместо (П.1) имеет место равенство

$$D_f(P\,\|\,Q)=\sum_{i\colon p_i>0}q_if\left(\frac{p_i}{q_i}\right)+f(0)\sum_{i\colon p_i=0}q_i, \tag{П.5}$$

где $f(0)=\lim\limits_{u\downarrow 0}f(u)$. Поэтому величина $D_f^{\max}(Q,v)$, определенная в (11), равна бесконечности тогда и только тогда, когда $f(0)=\infty$ и существует распределение $P=\{p_i,\,i\in\mathcal{N}\}$, такое что $V(P,Q)=v$ и хотя бы одна из его компонент $p_i=0$, а это возможно лишь в случае, когда $v\geqslant 2q_n$, откуда и следует первое равенство в (25).

Доказательство второго равенства в (25) проводится полностью аналогично доказательству второго равенства в формуле (19) из теоремы 1. А именно, доказательство того, что в случае, когда $v<2q_n$, существует оптимальное распределение $P=\{p_i,\ i\in\mathcal{N}\}$, такое что $V(P,Q)=v$ и при некоторых k и ℓ, $k\neq\ell$, его компоненты имеют вид $p_k=q_k+\dfrac{v}{2}$, $p_\ell=q_\ell-\dfrac{v}{2}$ и $p_i=q_i$ при остальных i, основано на том, что в данном случае функция $\Delta(x)=D_f(P(x)\,\|\,Q)-D_f(P\,\|\,Q)$ (где распределение $P(x)$ определяется аналогично распределению $Q(x)$ при доказательстве теоремы 1) является выпуклой функцией x, так как в данном случае

$$\Delta''(x)=\frac{1}{q_k}f''\biggl(\frac{p_k-x}{q_k}\biggr)+\frac{1}{q_j}f''\biggl(\frac{p_j+x}{q_j}\biggr)>0.$$

Поэтому, если $v<2p_n$, то

$$D_f^{\max}(Q,v)=\max_{s,\ell\colon s\neq\ell}\left\{q_sf\Biggl(\frac{p_s+\dfrac{v}{2}}{q_s}\Biggr)+q_\ell f\Biggl(\frac{q_\ell-\dfrac{v}{2}}{q_\ell}\Biggr)\right\}. \tag{П.6}$$

Для доказательства второго равенства в (25) теперь достаточно убедиться, что функция $xf\Bigl(\dfrac{x+a}{x}\Bigr)$ убывает по x.

2. Доказательство формул (27), (29) и (30) проводится аналогично доказательству формул (21), (23) и (24) из теоремы 1. Заметим только, что для доказательства верхней границы (23) необходимо показать, что

$$q_kf\biggl(\frac{q_k-\beta}{q_k}\biggr)-\beta f(0)\leqslant 0$$

при любых q_k и β, $0\leqslant\beta\leqslant q_k$. Это неравенство следует из того, что его левая часть является выпуклой функцией β, а при $\beta=0$ и $\beta=q_k$ она равна нулю. ▲

Доказательство следствия. Верхняя граница (31) является очевидным следствием (23), если $f^*<\infty$, а если $f^*=\infty$, то она тривиальна.

Для доказательства равенства (32) в соответствии с утверждением теоремы 1 о том, что справедливо равенство (24) (а значит, и (32)), достаточно доказать, что если параметры $p_{\min}$ и v удовлетворяют одному из следующих трех условий:

1) $p_{\min} < \frac{v}{2} < 1 - 2p_{\min}$ и $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n+1}$, или

2) $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$ и $\frac{v}{2} = 1 - p_{\min}$, или

3) $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$ и $\frac{v}{2} = kp_{\min}$, где k – целое, такое что $1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{1-p_{\min}}{p_{\min}} \right\rfloor$,

то существует распределение $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, для которого $\min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i = p_n = p_{\min}$ и $\frac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i p_i$ при некоторых $a_i \in \{0, 1\}$.

Действительно, покажем, что при указанных выше условиях подобное распределение $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$ существует.

1) Если $kp_{\min} < \frac{v}{2} < (k+1)p_{\min}$, где k – целое, такое что $k \geqslant 1$, $(k+1)p_{\min} \leqslant 1 - 2p_{\min}$, то очевидно, что $\frac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ для распределения $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, компоненты p_i которого задаются равенствами

$$p_i = \begin{cases} p_{\min} & \text{при } i = 1, 2, \ldots, k-1, \\ \frac{v}{2} - (k-1)p_{\min} & \text{при } i = k, \\ p_{\min} & \text{при } i = k+1, \\ \dfrac{1 - \frac{v}{2} - p_{\min}}{n-k-1} & \text{при } i = k+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что, действительно, в случае, когда $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n+1}$, все компоненты p_i этого распределения не меньше заданного $p_{\min}$.

2) Если $\frac{v}{2} = 1 - p_{\min}$ и $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$, то очевидно, что $\frac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i$ для распределения $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, компоненты p_i которого задаются равенствами

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{1 - p_{\min}}{n-1} & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ p_{\min} & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Здесь также очевидно, что в случае, когда $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$, все компоненты p_i этого распределения не меньше заданного $p_{\min}$.

3) Если $\frac{v}{2} = kp_{\min}$, где k – целое число, такое что $1 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{1-p_{\min}}{p_{\min}} \right\rfloor$, то снова очевидно, что $\frac{v}{2} = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$ для распределения $P = \{p_i, i \in \mathcal{N}\}$, компоненты p_i которого задаются равенствами

$$p_i = \begin{cases} p_{\min} & \text{при } i = 1, 2, \ldots, k+1, \\ \dfrac{1 - (k+1)p_{\min}}{n-k-1} & \text{при } i = k+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Снова очевидно, что в случае, когда $p_{\min} \leqslant \frac{1}{n}$, все компоненты p_i этого распределения не меньше заданного $p_{\min}$.

Для доказательства равенства (33) сначала заметим, что для величины m_P, определенной в (20), любого распределения $P = \{p_i,\ i \in \mathcal{N}\}$, для которого $\min\limits_{i\in\mathcal{N}} p_i = p_{\min}$, справедливо неравенство

$$m_P \leqslant \left(p_n + \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_n}{p_n + \frac{v}{2}}\right) + \left(p_n - \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_n}{p_n - \frac{v}{2}}\right),$$

так как функция $(x+a)f\left(\dfrac{x}{x+a}\right)$ убывает по x. С другой стороны, если $\mathcal{N} = n \geqslant 3$, то всегда существует распределение $P = \{p_i,\, i \in \mathcal{N}\}$, для которого $p_{n-1} = p_n = p_{\min}$, а для такого распределения

$$m_P = \left(p_n + \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_n}{p_n + \dfrac{v}{2}}\right) + \left(p_n - \frac{v}{2}\right) f\left(\frac{p_n}{p_n - \dfrac{v}{2}}\right).$$

Поэтому равенство (33) следует из (22).

Неравенство (34) и равенства (35), (36) доказываются аналогично приведенным выше доказательствам неравенства (31) и равенств (32), (33). ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Csiszár I.* Eine Informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Bewis der Ergodizität von Markoffschen Ketten // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. Ser. A. 1963. V. 8. P. 85–108.
2. *Csiszár I.* Information-type Measures of Difference of Probability Distributions and Indirect Observations // Studia Sci. Math. Hungar. 1967. V. 2. P. 299–318.
3. *Ali S.M., Silvey S.D.* A General Class of Coefficients of Divergence of One Distribution from Another // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1966. V. 28. № 1. P. 131–142.
4. *Ziv J., Zakai M.* On Functionals Satisfying a Data-Processing Theorem // IEEE Trans. Inform. Theory. 1973. V. 19. № 3. P. 275–283.
5. *Rényi A.* On Measures of Entropy and Information // Proc. 4th Berkeley Sympos. on Mathematical Statistics and Probability 1961. V. 1. P. 547–561.
6. *van Erven T., Harremoës P.* Rényi Divergence and Kullback–Leibler Divergence // IEEE Trans. Inform. Theory. 2014. V. 60. № 7. P. 3797–3820.
7. *Liese F., Vajda I.* On Divergences and Information in Statistics and Information Theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 10. P. 4394–4412.
8. *Aczél J., Daróczy Z.* On Measures of Information and Their Characterizations. New York: Academic Press, 1975.
9. *Gilardoni G.L.* On Pinsker's and Vajda's Type Inequalities for Csiszár's f-Divergences // IEEE Trans. Inform. Theory. 2010. V. 56. № 11. P. 5377–5386.
10. *Guntuboyina A., Saha S., Schiebinger G.* Sharp Inequalities for f-Divergences // IEEE Trans. Inform. Theory. 2014. V. 60. № 1. P. 104–121.
11. *Sason I.* Tight Bounds for Symmetric Divergence Measures and a Refined Bound for Lossless Source Coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. № 2. P. 701–707.
12. *Sason I., Verdú S.* f-Divergence Inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 11. P. 5973–6006.
13. *Gilardoni G.L.* On the Minimum f-Divergence for Given Total Variation // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2006. V. 343. № 11–12. P. 763–766.
14. *Прелов В.В.* Оптимальные верхние границы для дивергенции конечномерных распределений при заданном вариационном расстоянии // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 3. С. 21–29.
15. *Sason I., Verdú S.* Upper Bounds on the Relative Entropy and Rényi Divergence as a Function of Total Variation Distance for Finite Alphabets // Proc. 2015 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2015). Jeju, South Korea. October 11–15, 2015. P. 214–218.

Прелов Вячеслав Валерьевич
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
`prelov@iitp.ru`

Поступила в редакцию
28.01.2020
После доработки
28.01.2020
Принята к публикации
05.02.2020