ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 **2020** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.1

© 2020 г. **Ю. Гуань, М. Ши✉, Д.С. Кротов**

СИСТЕМЫ ТРОЕК ШТЕЙНЕРА ПОРЯДКА 21 С ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМ ПОДДИЗАЙНОМ TD(3, 6)[1]

Система троек Штейнера (STS) содержит трансверсальный поддизайн $\mathrm{TD}(3,w)$, если в множестве ее точек имеются три попарно непересекающихся подмножества A, B, C размера w, такие что w^2 блоков этой STS пресекаются с каждым из множеств A, B, C (эти w^2 блоков и образуют $\mathrm{TD}(3,w)$). Доказываются некоторые структурные свойства систем троек Штейнера порядка $3w+3$, содержащих один или несколько трансверсальных поддизайнов $\mathrm{TD}(3,w)$. Полным перебором установлено, что имеется 2004720 классов изоморфизма систем STS(21), содержащих поддизайн TD(3, 6) (или, что эквивалентно, латинский квадрат порядка 6×6).

Ключевые слова: система троек Штейнера, поддизайн, трансверсальный дизайн, латинский квадрат.

DOI: 10.31857/S0555292320010039

§ 1. Введение

Система троек Штейнера порядка v, или $\mathrm{STS}(v)$, – это пара $(S,\mathcal{B})$, состоящая из конечного множества S (называемого носителем, или множеством точек системы STS) мощности v и набора $\mathcal{B}$ трехэлементных подмножеств множества S, называемых *блоками*, таких что любые два различных элемента множества S встречаются ровно в одном блоке. *Трансверсальным дизайном* $\mathrm{TD}(k,w)$ (в настоящей статье рассматривается только случай $k=3$) называется тройка $(S,\mathcal{G},\mathcal{B})$, состоящая из множества точек S мощности kw, разбиения $\mathcal{G}$ множества S на k подмножеств (*групп*) мощности w и набора $\mathcal{B}$ подмножеств размера k множества S (*блоков*), таких что каждый блок пересекает каждую группу ровно в одной точке, а любые две точки из разных групп содержатся ровно в одном блоке. Поскольку как носитель, так и (в случае TD) группы однозначно определяются множеством блоков, удобно отождествлять систему STS или дизайн TD с ее (его) множеством блоков. При таком соглашении корректно говорить, что STS $\mathcal{B}$ может включать в себя некоторую STS или некоторый TD $\mathcal{C}$ как подмножество, и в этом случае $\mathcal{C}$ называется *подсистемой STS* или *поддизайном TD* системы $\mathcal{B}$ соответственно. Две системы STS или два дизайна TD называются *изоморфными*, если существует биекция между их носителями (*изоморфизм*), переводящая блоки одной системы в блоки другой. Изоморфизм системы $\mathcal{B}$ на себя называется *автоморфизмом*; множество всех автоморфизмов $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (номер проекта 61672036), Фонда поддержки выдающихся молодых ученых Фонда естественных наук провинции Аньхой (номер проекта 1808085J20), Академического фонда для выдающихся талантов в университетах (грант gxbjZD03), и Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (номер проекта 0314-2019-0016).

Трансверсальные дизайны $\mathrm{TD}(3, w)$ эквивалентны латинским квадратам размера $w \times w$, и известно, что они существуют для любого натурального w. Классы изоморфизма дизайнов $\mathrm{TD}(3, w)$ соответствуют так называемым главным классам латинских квадратов; их число известно для значений w вплоть до 11 (см. [1]). Системы троек Штейнера $\mathrm{STS}(v)$ существуют тогда и только тогда, когда $v \equiv 1, 3 \bmod 6$ (см., например, [2]), причем необходимое условие вытекает из простых соображений мощности.

Число классов изоморфизма систем троек Штейнера известно [3] для порядков вплоть до 19. Классификация STS больших порядков возможна лишь при дополнительных ограничениях на структуру STS. Среди таких ограничений наиболее популярными являются ограничения на автоморфизмы (см., например, [4–10]), на максимальный ранг системы [11, 12], и требование, чтобы система содержала подсистему с некоторыми заданными параметрами.

В работе [13] было установлено, что всего имеется 284457 систем STS(19) с подсистемой STS(9). В [14] получена классификация систем STS(19) с подсистемами STS(7) и систем STS(21), содержащих три подсистемы STS(7) с непересекающимися носителями (последний класс совпадает с классом STS(21), имеющих 3-ранг не выше 19). Недавно в [15] было найдено число всех STS(21) с подсистемой STS(9) (а также систем STS(27) с подсистемой STS(13)). Число 12661527336 (соответственно, 1356574942538935943268083236) классов изоморфизма таких систем слишком велико, чтобы было возможно какое-либо их эффективное перечисление; в частности, невозможно вычислительными методами проверить какое бы то ни было требуемое свойство этих классов.

В настоящей статье проведена классификация систем STS(21) с поддизайнами $\mathrm{TD}(3, 6)$, или, другими словами, систем STS(21), содержащих латинский квадрат порядка 6×6. Установлено, что всего существует 2004720 классов изоморфизма систем троек Штейнера порядка 21 с трансверсальными поддизайнами на трех группах размера 6, в том числе 599 систем ровно с тремя поддизайнами $\mathrm{TD}(3, 6)$ и 12 систем ровно с семью поддизайнами $\mathrm{TD}(3, 6)$. Рассматриваемый класс содержит 393 неизоморфные разрешимые STS; ни одна из них не является дважды разрешимой.

В § 2 доказываются некоторые факты о системах троек Штейнера порядка $3w+3$, имеющих трансверсальный поддизайн на трех группах размера w, причем в основном мы сконцентрируемся на случае $w = 6$. В § 3 представлены результаты компьютерной классификации систем STS(21) с поддизайном $\mathrm{TD}(3, 6)$, в том числе в таблице приведено количество найденных классов изоморфизма, классифицированных по числу поддизайнов $\mathrm{TD}(3, 6)$, подсистем STS(9) и числу автоморфизмов. В § 4 результаты этих вычислений подтверждены с помощью подсчета мощностей двумя способами. В § 5 обсуждается разрешимость найденных STS и показано, что системы STS(21) с поддизайном $\mathrm{TD}(3, 6)$ и ровно одной подсистемой STS(9) не могут быть разрешимыми.

§ 2. Системы троек Штейнера с трансверсальными поддизайнами

Начнем с некоторых теоретических рассуждений. Если система $\mathrm{STS}(v)$ имеет поддизайн $\mathrm{TD}(3, w)$, то $v = 3w + u$, где $u \equiv 1$ или 3, когда w четно, и $u \equiv 0$ или 4, когда w нечетно. Случай $u = 0$ соответствует $\mathrm{STS}(3w)$ типа Уилсона [16]; нетрудно видеть, что такая система является объединением трех $\mathrm{STS}(w)$ со взаимно непересекающимися носителями и трансверсального дизайна $\mathrm{TD}(3, w)$. Случай $u = 1$ соответствует $\mathrm{STS}(3w + 1)$ типа Уилсона [16]; снова нетрудно видеть, что такая система является объединением трех $\mathrm{STS}(w+1)$, носители которых имеют одну общую точку, и трансверсального дизайна $\mathrm{TD}(3, w)$.

Следующий случай – это $u = 3$. Введем связанное с ним понятие. Подмножество $\mathcal{C}$ системы троек Штейнера $\mathcal{B}$ называется *почти подсистемой STS*, если $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \setminus \{T\}$

для некоторой STS $\mathcal{C}'$ и некоторой тройки T из $\mathcal{C}'$ (заметим, что T не обязательно должна быть блоком из $\mathcal{B}$); эта тройка называется *недостающей* для почти подсистемы STS $\mathcal{C}$.

Лемма 1. *Пусть* $(A \cup B \cup C \cup D, \mathcal{B})$ – *это* STS$(3w+3)$ *с поддизайном TD* $(A \cup B \cup C, \{A, B, C\}, \mathcal{T})$, *где* $|A| = |B| = |C| = w$ *и* $|D| = 3$. *Тогда* $\mathcal{B} = \mathcal{T} \cup \mathcal{B}_A \cup \mathcal{B}_B \cup \mathcal{B}_C$, *где системы* $\mathcal{B}_A$, $\mathcal{B}_B$ *и* $\mathcal{B}_C$ *имеют носители* $A \cup D$, $B \cup D$ *и* $C \cup D$ *соответственно, причем две из них являются почти подсистемами STS с недостающей тройкой* D, *а третья – подсистемой STS (в частности,* $w + 3 \equiv 1, 3 \bmod 6$*).*

Доказательство. Предположим вначале, что D – один из блоков системы $\mathcal{B}$. В этом случае нетрудно видеть, что $\mathcal{B}$ имеет подсистему STS$(w+3)$ с носителем $A \cup D$. Выберем ее в качестве $\mathcal{B}_A$. Аналогично, $\mathcal{B}$ имеет подсистему STS$(w+3)$ с носителем $B \cup D$. Удаляя блок D, получаем почти подсистему STS $\mathcal{B}_B$. Аналогично находим почти подсистему STS $\mathcal{B}_C$.

Остается рассмотреть случай $D \notin \mathcal{B}$. В этом случае разделим $\mathcal{B} \setminus \mathcal{T}$ на три подмножества: $\mathcal{B}_A$ состоит из блоков, являющихся подмножествами $A \cup D$, $\mathcal{B}_B$ – из блоков, являющихся подмножествами $B \cup D$, а $\mathcal{B}_C$ – из подмножеств $C \cup D$ (заметим, что любой другой блок содержит точки по крайней мере двух множеств из A, B, C, и поэтому обязательно принадлежит $\mathcal{T}$). Блоки из $\mathcal{B}_A$, $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_C$ покрывают

$$\frac{1}{2}|A| \cdot (|A|-1) + \frac{1}{2}|B| \cdot (|B|-1) + \frac{1}{2}|C| \cdot (|C|-1) + 3|A| + 3|B| + 3|C| + 3 = \\ = \frac{3}{2}w^2 + \frac{15}{2}w + 3$$

пар точек, причем блоки из $\mathcal{B}_A$ (аналогично, из $\mathcal{B}_B$ или из $\mathcal{B}_C$) покрывают не менее

$$\frac{1}{2}|A| \cdot (|A|-1) + 3|A| = \frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w,$$

но не более

$$\frac{1}{2}|A| \cdot (|A|-1) + 3|A| + 3 = \frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w + 3$$

из них. Поскольку число пар, покрываемых системой $\mathcal{B}_A$, должно делиться на 3, оно равно

$$\frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w + 3, \quad \text{если} \quad w \equiv 0, 1 \bmod 3,$$

и равно

$$\frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w + 2, \quad \text{если} \quad w \equiv 2 \bmod 3.$$

Последний случай невозможен, поскольку $3\Big(\frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w + 2\Big) > \frac{3}{2}w^2 + \frac{15}{2}w + 3$. Следовательно, одна из систем $\mathcal{B}_A$, $\mathcal{B}_B$ и $\mathcal{B}_C$, скажем, $\mathcal{B}_A$, имеет

$$\frac{1}{3} \cdot \Big(\frac{1}{2}w^2 + \frac{5}{2}w + 3\Big) = \frac{(w+3)(w+2)}{6}$$

блоков, а две другие – на один меньше. Это означает, что $(A \cup D, \mathcal{B}_A)$ является STS$(w+3)$, а $(A \cup D, \mathcal{B}_B \cup \{D\})$ и $(A \cup D, \mathcal{B}_B \cup \{D\})$ – также STS$(w+3)$, что и доказывает утверждение. ▲

Итак, мы видим, что если STS$(3w+3)$ имеет поддизайн TD$(3, w)$, то она разбивается на этот поддизайн TD$(3, w)$, одну подсистему STS$(w+3)$ и две почти подсистемы STS$(w+3)$. В общем случае может существовать более чем один такой поддизайн

$\mathrm{TD}(3,w)$, и поэтому более чем одно такое разбиение. Таким образом, важно понимать, как такие подсистемы могут пересекаться. Следующая лемма о пересечении двух почти подсистем STS обобщает хорошо известный и очевидный факт, что пересечение двух подсистем STS всегда является подсистемой STS.

Лемма 2. *Пусть STS $\mathcal{B}$ имеет две почти подсистемы STS $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$ с носителями S' и S'' соответственно. Тогда*

- *либо* $|S'\cap S''|=2$, *а пересечение* $\mathcal{B}'\cap\mathcal{B}''$ *пусто,*
- *либо* $|S'\cap S''|\equiv 1$ *или* $3 \bmod 6$, *а пересечение* $\mathcal{B}'\cap\mathcal{B}''$ *можно дополнить до* $\mathrm{STS}(|S'\cap S''|)$ *путем добавления* 0, 1 *или* 2 *блоков.*

Доказательство. Обозначим $D := S'\cap S''$ и $\mathcal{D} := \mathcal{B}'\cap\mathcal{B}''$. Пусть $\mathcal{B}'\cup\{a',b',c'\}$ и $\mathcal{B}'\cup\{a'',b'',c''\}$ являются STS. Таким образом, любая пара точек из S', кроме $\{a',b'\}$, $\{a',c'\}$ и $\{b',c'\}$, содержится в одном блоке системы $\mathcal{B}'$. Аналогично для S'' и $\mathcal{B}''$. Следовательно,

($*$) *Любая пара точек из D, отличная от $\{a',b'\}$, $\{a',c'\}$, $\{b',c'\}$, $\{a'',b''\}$, $\{a'',c''\}$ и $\{b'',c''\}$, содержится в одном блоке системы $\mathcal{D}$.*

Кроме того,

($**$) *Для любой точки t из D число $\ell(t)$ пар точек из D, содержащих t и отличных от $\{a',b'\}$, $\{a',c'\}$, $\{b',c'\}$, $\{a'',b''\}$, $\{a'',c''\}$ и $\{b'',c''\}$, четно.*

Действительно, это число вдвое больше числа блоков $\mathcal{D}$, содержащих t.

Непосредственной проверкой всех случаев пересечений множеств D, $\{a',b',c'\}$ и $\{a'',b'',c''\}$ нетрудно убедиться, что если оба условия ($*$) и ($**$) выполнены, то имеет место одно из следующих утверждений.

(i) Множество D содержит не более одной из точек a',b',c' и не более одной из a'',b'',c''. В этом случае $\mathcal{D}$ является STS.

(ii) Множество D состоит из двух точек из a',b',c' или из двух из a'',b'',c''. Таким образом, $|D|=2$.

(iii) Множество D содержит точки a',b',c' и не более одной из a'',b'',c'', или же D содержит a',b',c' и две или три точки из a'',b'',c'', которые совпадают с некоторыми из a',b',c'. Либо, аналогично, D содержит a'',b'',c'' и не более одной из a',b',c', или же D содержит a'',b'',c'' и две или три точки из a',b',c', которые совпадают с некоторыми из a'',b'',c''. В этом случае $\mathcal{D}$ можно дополнить до STS добавлением тройки $\{a',b',c'\}$ или $\{a'',b'',c''\}$ соответственно.

(iv) Множество D включает оба множества $\{a',\ b',\ c'\}$ и $\{a'',\ b'',\ c''\}$, причем эти множества пересекаются не более чем по одной точке. В этом случае $\mathcal{D}$ можно дополнить до STS добавлением двух троек $\{a',b',c'\}$ и $\{a'',b'',c''\}$.

(v) $|D|=4$, причем две точки e',f' из D входят в $\{a',b',c'\}$, а две другие e'',f'' входят в $\{a'',b'',c''\}$. Нетрудно видеть, что четыре пары $\{e',e''\}$, $\{e',f''\}$, $\{f',e''\}$ и $\{f',f''\}$ не могут правильным образом покрываться блоками из $\mathcal{D}$.

Мы убедились, что в каждом непротиворечивом случае утверждение леммы выполнено. ▲

Замечание. В отличие от случая подсистем STS, носители двух почти подсистем STS могут пресекаться ровно по двум точкам. Такой пример нетрудно построить, используя известные теоремы о вложении: любой набор трехэлементных множеств, таких что никакая пара точек не встречается более чем в одном множестве, всегда можно вложить как подмножество в некоторую систему троек Штейнера, носитель которой, вообще говоря, может быть больше носителя исходного набора троек [17, 18].

Следствие. (i) *Различные носители двух почти подсистем* STS(9) *одной и той же STS пересекаются не более чем по трем точкам.*

(ii) *Различные носители двух почти подсистем* STS(9) *одной и той же* STS(21) *пересекаются по трем точкам. Эти три точки образуют либо блок каждой из* *этих почти подсистем* STS(9), *либо недостающую тройку одной или обеих из этих почти подсистем* STS(9).

Доказательство. Для доказательства утверждения (i) согласно лемме 2 остается проверить, что носители не могут пересекаться по семи точкам. Действительно, в такой ситуации по лемме 2 найдутся STS(7) и STS(9), имеющие по крайней мере пять общих блоков. Непосредственной проверкой легко убедиться, что это невозможно.

(ii) Остается проверить, что носители, скажем, S' и S'' этих подсистем, скажем, $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$, не могут пересекаться по двум, одной или нулю точек. Предположим вначале, что $|S' \cap S''| = 2$. Блок, содержащий $S' \cap S''$, не принадлежит по крайней мере одной из подсистем $\mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}''$. Без ограничения общности будем считать, что он не принадлежит $\mathcal{B}''$, тогда пара $S' \cap S''$ лежит в недостающей тройке почти подсистемы STS $\mathcal{B}''$. Следовательно, шесть точек $a_1, \ldots, a_6$ из $S'' \setminus S'$ не принадлежат недостающей тройке. Возьмем также точку b из $S' \setminus S''$, не принадлежащую недостающей тройке подсистемы $\mathcal{B}'$, и рассмотрим блок, содержащий b и a_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Этот блок не входит ни в $\mathcal{B}'$, ни в $\mathcal{B}''$, и поэтому он пересекается как с S', так и с S'' только по одной точке. Таким образом, третья точка c_i этого блока не лежит в $S' \cup S''$. Но вне $S' \cup S''$ есть всего пять точек, что немедленно приводит к противоречию с определением STS. Аналогичные противоречия можно найти и в случаях $|S' \cap S''| = 1$ и $|S' \cap S''| = 0$. ▲

Теперь сосредоточимся на порядке 21. Пусть имеется STS(21) $(S, \mathcal{B})$. Разбиение множества S на четыре множества A, B, C, D размера 6, 6, 6 и 3 соответственно называется *цветком* со *стеблем* D и *лепестками* A, B, C, если $\mathcal{B}$ имеет подсистему STS(9) и две почти подсистемы STS(9) с носителями $A \cup D$, $B \cup D$ и $C \cup D$, где недостающей тройкой каждой из этих почти подсистем является D (вне зависимости от того, принадлежит оно $\mathcal{B}$ или нет). Из леммы 1 легко выводится следующая

Лемма 3. *Система* STS(21) *содержит цветок* $\{A, B, C, D\}$ *со стеблем* D *тогда и только тогда, когда она имеет поддизайн* TD$(3, 6)$ *с группами* A, B *и* C.

Если имеется только один цветок $\{A, B, C, D\}$ (и только один поддизайн TD$(3, 6)$), то возможны два подслучая в зависимости от того, является ли стебель D блоком или нет. В первом подслучае система STS(21) имеет три подсистемы STS(9) с носителями $A \cup D$, $B \cup D$ и $C \cup D$. Во втором подслучае система STS(21) имеет только одну подсистему STS(9). Следующая наша цель – охарактеризовать ситуацию, когда STS(21) имеет более одного поддизайна TD$(3, 6)$.

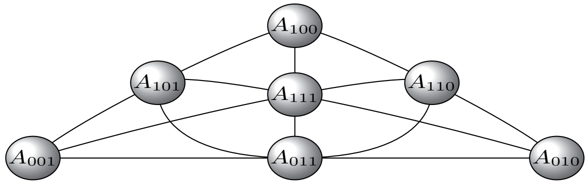
Лемма 4. *Пусть система* STS(21) *имеет два различных цветка* $\{A, B, C, D\}$ *и* $\{A', B', C', D'\}$ *со стеблями* D *и* D'. *Тогда*

(i) D *и* D' *не пересекаются*;

(ii) $D \cup E = D' \cup E'$ *для некоторых* $E \in \{A, B, C\}$ *и* $E' \in \{A', B', C'\}$;

(iii) *Система* STS(21) *имеет подсистему* STS(9) *с носителем* $D \cup E$, *где* E *– множество из п.* (ii).

Доказательство. Рассмотрим точку d из D и предположим без ограничения общности, что она лежит в $D' \cup A'$. Каждая точка из $D' \cup A'$ лежит в одном из множеств $D \cup A$, $D \cup B$ и $D \cup C$, и по крайней мере одна точка лежит во всех трех. Следовательно, множество $D' \cup A'$ пересекается с этими тремя множествами в среднем по более чем трем точкам. По следствию оно совпадает с одним из них, скажем, с $D \cup A$; таким образом, утверждение (ii) доказано. Если D и D' пересекаются, то это же можно сказать про $D' \cup B'$ и $D' \cup C'$, т.е. цветки совпадают. Таким образом, справедливо (i). Последнее утверждение также несложно, поскольку объединение двух различных почти подсистем троек Штейнера с одинаковым носителем $D \cup A$ с необходимостью является подсистемой троек Штейнера. ▲



Система STS(7) (*плоскость Фано*) на множестве точек $\{A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$. Видно, что каждый из семи носителей (почти) подсистем STS(9), описанных в лемме 5, является объединением трех множеств из $A_{001}, \ldots, A_{111}$, соответствующих прямой на плоскости Фано

Лемма 5. *Пусть система* STS(21) $\mathcal{B}$ *имеет два различных цветка* $\{A, B, C, D\}$ *и* $\{A', B', C', D'\}$ *со стеблями* D *и* D'. *Без ограничения общности предположим, что* $D \cup A = D' \cup A'$. *Обозначим*

$$A_{100} := B \cap B',$$

$$A_{101} := B \cap C', \qquad A_{111} := C \cap C', \qquad A_{110} := C \cap B',$$

$$A_{001} := D, \qquad A_{011} := A \setminus D', \qquad A_{010} := D'$$

(*см. рисунок, мотивирующий расположение этих формул*). *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если как* D, *так и* D' *являются блоками* $\mathcal{B}$, *то* $\mathcal{B}$ *содержит ровно семь поддизайнов* TD(3, 6) *с цветками*

$$\{A_{001},\ A_{010} \cup A_{011},\ A_{100} \cup A_{101},\ A_{110} \cup A_{111}\}, \tag{1}$$
$$\{A_{010},\ A_{001} \cup A_{011},\ A_{100} \cup A_{110},\ A_{101} \cup A_{111}\}, \tag{2}$$
$$\{A_{011},\ A_{001} \cup A_{010},\ A_{100} \cup A_{111},\ A_{101} \cup A_{110}\}, \tag{3}$$
$$\{A_{100},\ A_{001} \cup A_{101},\ A_{010} \cup A_{110},\ A_{011} \cup A_{111}\}, \tag{4}$$
$$\{A_{101},\ A_{001} \cup A_{100},\ A_{010} \cup A_{111},\ A_{011} \cup A_{110}\}, \tag{5}$$
$$\{A_{110},\ A_{001} \cup A_{111},\ A_{010} \cup A_{100},\ A_{011} \cup A_{101}\}, \tag{6}$$
$$\{A_{111},\ A_{001} \cup A_{110},\ A_{010} \cup A_{101},\ A_{011} \cup A_{100}\}, \tag{7}$$

а также ровно семь подсистем STS(9).

(ii) *Если не более чем одно из множеств* D *и* D' *является блоком* $\mathcal{B}$, *то* $\mathcal{B}$ *содержит ровно три поддизайна* TD(3, 6) *с цветками* (1)–(3). *Если при этом* D *или* D' *является блоком, то* $\mathcal{B}$ *имеет ровно три подсистемы* STS(9), *а в противном случае – равно одну.*

Доказательство. Отметим вначале, что согласно п. (ii) следствия множества A_{101}, A_{111}, A_{110} и A_{100} являются блоками $\mathcal{B}$. Далее, мы утверждаем, что

($*$) *Существует почти подсистема троек Штейнера с носителем* $A_{011} \cup A_{100} \cup A_{111}$ *и недостающей тройкой* A_{011}.

Действительно, рассмотрим блок, содержащий точку a из A_{100} и точку b из A_{111}. Третья точка c этого блока может принадлежать только A_{011} (например, если $c \in A_{001}$, то пара $\{a, c\}$ уже покрыта блоком из почти STS на $A_{001} \cup A_{101} \cup A_{100}$; остальные случаи приводят к аналогичным противоречиям). Таким образом, девять таких блоков образуют TD(3, 3); дополняя блоками A_{100} и A_{111}, получаем почти подсистему STS(9). Аналогично

($**$) *Существует почти подсистема троек Штейнера с носителем* $A_{011} \cup A_{101} \cup A_{110}$ *и недостающей тройкой* A_{011}.

Итак, имеется набор из подсистемы STS(9) и шести почти подсистем STS(9) с различными носителями, соответствующими цветкам (1)–(3). Нетрудно видеть, что

(∗∗∗) *Не существует подсистем* STS(9) *или почти подсистем* STS(9) *с любыми другими носителями.*

Действительно, если множество B – носитель подсистемы STS(9), то оно пересекается по крайней мере по четырем точкам в общей сложности с двумя из множеств $A_{001}, \ldots, A_{110}$; объединение этих двух множеств содержится в носителе некоторой из семи подсистем STS(9), и по следствию множество B совпадает с этим носителем.

Теперь рассмотрим следующие подслучаи.

Если оба множества D и D' входят в $\mathcal{B}$, то также и $A_{011} \in \mathcal{B}$, и все эти шесть почти подсистем троек Штейнера дополняются до подсистемы STS(9), образуя таким образом в общей сложности семь различных цветков. Из леммы 5 и следствия получаем, что больше цветков нет. Согласно (∗∗∗) имеется только семь подсистем STS(9).

Если $D \notin \mathcal{B}$ или $D' \notin \mathcal{B}$, то множества (4)–(7) не являются цветками. Рассуждая, как и выше, получаем, что имеется только три цветка (1)–(3).

Если $D \in \mathcal{B}$ и $D' \notin \mathcal{B}$, то всегда $A_{011} \notin \mathcal{B}$ (в любой STS(9) дополнение двух непересекающихся блоков обязательно также является блоком). В этом случае имеются только три подсистемы STS(9) с носителями $A_{001} \cup A_{011} \cup A_{010}$, $A_{001} \cup A_{101} \cup A_{100}$ и $A_{001} \cup A_{111} \cup A_{110}$. Подслучай $D \notin \mathcal{B}$ и $D' \in \mathcal{B}$ аналогичен.

Если $D \notin \mathcal{B}$ и $D' \notin \mathcal{B}$, то недостающая тройка любой из данных шести почти подсистем троек Штейнера не входит в $\mathcal{B}$, и в $\mathcal{B}$ имеется только одна подсистема STS(9) – с носителем $A_{001} \cup A_{011} \cup A_{010}$. ▲

В дальнейших рассуждениях мы будем использовать следующие два хорошо известных несложных факта.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если трансверсальный дизайн* TD(3, 6) $(S, \{A, B, C\}, \mathcal{T})$ *содержит поддизайн* TD(3, 3) *с группами* $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$ *и* $C_0 \subset C$, *то* $\mathcal{T}$ *содержит ровно три других поддизайна* TD(3, 3): *с группами* A_0, B_1, C_1, A_1, B_0, C_1 *и* A_1, B_1, C_0, *где* $A_1 := A \setminus A_0$, $B_1 := B \setminus B_0$ *и* $C_1 := C \setminus C_0$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* D *– блок системы* STS(9) $(S, \mathcal{B})$, *то* $\mathcal{B}$ *содержит ровно два блока, не пересекающихся с* D. *Более того, эти два блока не пересекаются между собой, а остальные девять блоков образуют поддизайн* TD(3, 3).

Л е м м а 6. *Пусть* STS(21) $(S, \mathcal{B})$ *содержит цветок* $\{A, B, C, D\}$, *а* $\mathcal{T}$ *– трансверсальный поддизайн* $\mathcal{B}$ *на лепестках* A, B, C *в качестве групп. Пусть* D' *– трехэлементное подмножество* A. *Система* $\mathcal{B}$ *имеет второй поддизайн* TD(3, 6) $\mathcal{T}'$ *с носителем* $S \setminus D'$ *тогда и только тогда, когда она содержит непересекающиеся блоки* $B_0, B_1 \subset B$ *и непересекающиеся блоки* $C_0, C_1 \subset C$, *такие что* $\mathcal{T}$ *разбивается на четыре поддизайна* TD(3, 3) *с группами из* D', $A \setminus D'$, B_0, B_1, C_0 *и* C_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует такой поддизайн $\mathcal{T}'$. В этом случае имеется цветок $\{D', A', B', C'\}$, где $D' \cup A' = D \cup A$. Обозначим $B_0 := B \cap B'$, $B_1 := B \cap C'$, $C_0 := C \cap B'$ и $C_1 := C \cap C'$. По следствию множества B_0, B_1, C_0, C_1 являются блоками $\mathcal{B}$. Так как система $\mathcal{B}$ содержит подсистему троек Штейнера с носителем $D' \cup A'$, то по определению цветка она имеет две почти подсистемы троек Штейнера с носителями $D' \cup B'$ и $D' \cup C'$. Удаляя блоки B_0, B_1, C_0, C_1 из этих почти подсистем, получаем два TD(3, 3). Остальные два поддизайна TD(3, 3) в $\mathcal{T}$ гарантированы предложением 1.

В обратную сторону утверждение проверяется столь же просто с учетом леммы 3. Если B разбивается на два блока B_0, B_1, то из определения цветка и предложения 2 видно, что имеется почти подсистема троек Штейнера с носителем $B \cup D$ и недостающей тройкой D (которая может быть или не быть блоком системы $\mathcal{B}$). Это же верно и для носителя $C \cup D$. Тогда из определения цветка следует, что $\mathcal{B}$ содержит полную подсистему троек Штейнера с носителем $A \cup D$. Чтобы получить цветок со стеблем D', остается найти еще два лепестка. По условию имеется трансверсальный поддизайн с группами D', B_0 и C_0 для некоторого блока $C_0 \subset C$. Дополняя его блоками B_0 и C_0, получаем почти подсистему троек Штейнера. Аналогично находим почти подсистему троек Штейнера с носителем $D' \cup B_1 \cup C_1$, $C_1 := C \setminus C_0$. Таким образом, набор $\{D', D \cup A \setminus D', B_0 \cup C_0, B_1 \cup C_1\}$ является цветком, и по лемме 3 имеется требуемый трансверсальный поддизайн. ▲

§ 3. Классификация систем STS(21) с поддизайном TD(3, 6)

Теперь на основе вышеприведенных лемм мы готовы представить наш метод компьютерной классификации и его результаты. Начнем с описания того, как подсчитать число классов изоморфизма систем STS(21) с единственным поддизайном TD(3, 6).

Вначале зафиксируем цветок $\{A_{001},\ A_{010} \cup A_{011},\ A_{100} \cup A_{101},\ A_{110} \cup A_{111}\}$, где все множества $A_{001}, \dots, A_{111}$ имеют размер 3. Пусть $\boldsymbol{A}$ – множество всех 840 систем STS(9) на $A_{001} \cup A_{010} \cup A_{011}$. Обозначим через $\boldsymbol{A}'$ подмножество $\boldsymbol{A}$, состоящее из 120 систем STS(9) с блоком A_{001}; удаляя этот блок из всех этих STS, получаем множество $\boldsymbol{A}^*$ из 120 почти STS(9) с недостающим блоком A_{001}. Через $\boldsymbol{A}''$ обозначим подмножество $\boldsymbol{A}'$, состоящее из двенадцати систем STS(9) с блоками $A_{001}, A_{010}, A_{011}$. Аналогично определим наборы $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{B}'', \boldsymbol{B}^*$ систем троек на $A_{001} \cup A_{100} \cup A_{101}$ и наборы $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}'', \boldsymbol{C}^*$ систем троек на $A_{001} \cup A_{110} \cup A_{111}$.

Теперь выберем представителя $\mathcal{T}$ из одного из двенадцати (см. [19]) классов изоморфизма дизайнов TD(3, 6) с группами $A_{010} \cup A_{011}$, $A_{100} \cup A_{101}$, $A_{110} \cup A_{111}$. Кроме того, потребуем, чтобы если этот представитель разбивался на поддизайны TD(3, 3), то эти трансверсальные поддизайны имели бы наборы групп $\{A_{010}, A_{100}, A_{110}\}$, $\{A_{010}, A_{101}, A_{111}\}$, $\{A_{011}, A_{100}, A_{111}\}$ и $\{A_{011}, A_{101}, A_{110}\}$ (см. предложение 1).

Далее, по лемме 3 любая система STS(21) с трансверсальным поддизайном $\mathcal{T}$ разбивается на $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, где

– либо $\mathcal{A} \in \boldsymbol{A}'$, $\mathcal{B} \in \boldsymbol{B}^*$, $\mathcal{C} \in \boldsymbol{C}^*$,
– либо $\mathcal{A} \in \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{A}'$, $\mathcal{B} \in \boldsymbol{B}^*$, $\mathcal{C} \in \boldsymbol{C}^*$,
– либо $\mathcal{A} \in \boldsymbol{A}^*$, $\mathcal{B} \in \boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{B}'$, $\mathcal{C} \in \boldsymbol{C}^*$,
– либо $\mathcal{A} \in \boldsymbol{A}^*$, $\mathcal{B} \in \boldsymbol{B}^*$, $\mathcal{C} \in \boldsymbol{C} \setminus \boldsymbol{C}'$.

Более того, по леммам 5, 6 такая STS(21) имеет ровно семь поддизайнов TD(3, 6) тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ разбивается на поддизайны TD(3, 3) и при этом

$$\mathcal{A} \cup A_{001} \in \boldsymbol{A}'', \quad \mathcal{B} \cup A_{001} \in \boldsymbol{B}'', \quad \mathcal{C} \cup A_{001} \in \boldsymbol{C}'', \tag{8}$$

и имеет ровно три поддизайна TD(3, 6) тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ разбивается на поддизайны TD(3, 3) и выполнены ровно два из условий (8). Исключая эти случаи, окончательно получаем не более $120^3 + 3 \cdot 720 \cdot 120^2$ систем STS(21) с единственным поддизайном TD(3, 6), равным $\mathcal{T}$. С помощью программного средства для определения изоморфности графов [20] можно проверять их всех на изоморфность и сохранять соответствующие представители. Очевидным образом, любая STS(21), имеющая трансверсальный поддизайн, изоморфный $\mathcal{T}$, изоморфна некоторой STS(21), содержащей $\mathcal{T}$. Повторяя указанные шаги для всех двенадцати неизоморфных выборов $\mathcal{T}$, находим все классы эквивалентности систем STS(21) с только одной подсистемой STS(9).

Аналогично можно классифицировать системы STS(21) с тремя или семью подсистемами STS(9). Единственное отличие состоит в том, что требуется также проверять изоморфность представителей, полученных из разных $\mathcal{T}$.

Результаты вычислений отражены в таблице. Последний столбец таблицы был вычислен путем сравнения данных из остальных столбцов с результатами рабо-

Таблица

Количество классов изоморфизма систем STS(21) с поддизайном TD(3, 6), отсортированных по числу τ_6 поддизайнов TD(3, 6), числу σ_9 подсистем STS(9) и числу автоморфизмов (в скобках приведено количество неизоморфных разрешимых систем, если оно известно)

$\lvert\mathrm{Aut}\rvert$	$\tau_6 = 7$ $\sigma_9 = 7$	$\tau_6 = 3$ $\sigma_9 = 3$	$\tau_6 = 3$ $\sigma_9 = 1$	$\tau_6 = 1$ $\sigma_9 = 3$	$\tau_6 = 1$ $\sigma_9 = 1$	$\tau_6 = 0$ $\sigma_9 = 1$
1		98 (0)	171 (0)	101621 (355)	1865036 (0)	12656035473
2		45 (0)	36 (0)	5271 (14)	30771 (0)	3461498
3		37 (0)	66 (0)	103 (8)	52 (0)	14932
4		18 (0)	14 (0)	321 (1)	786 (0)	10328
6	1 (1)	31 (0)	45 (0)	24 (1)	8 (0)	157
8	1 (0)	7 (0)	1 (0)	60 (5)	23 (0)	130
9	1 (1)		9 (0)			12
12	1 (1)	6 (0)	8 (0)	5 (0)	5 (0)	60
14	1 (0)					
16	1 (0)	2 (0)		9 (1)		
18	2 (1)		3 (0)	1 (0)		6
24				7 (3)	1 (0)	11
27						3
36			1 (0)	1 (0)		3
48				2 (0)		
54	1 (0)					
72			1 (0)	1 (0)		3
108	1 (0)					
144				1 (0)		
504	1 (0)					
1008	1 (1)					
Итого	12 (5)	244 (0)	355 (0)	107427 (388)	1896682 (0)	12659522616

ты [15]. Все вычисления заняли несколько часов процессорного времени на современном персональном компьютере. Полученные результаты обобщает следующая

Теорема. *Всего существует* 2004720 *систем троек Штейнера порядка* 21 *с трансверсальными поддизайнами на трех группах размера* 6. *При этом* 2004109 *из них имеют ровно один такой поддизайн* TD(3, 6), 599 *имеют ровно три поддизайна* TD(3, 6), *а* 12 – *семь поддизайнов* TD(3, 6) (*по лемме* 5 *последняя группа совпадает с двенадцатью системами* STS(21), *имеющими семь подсистем* STS(7), *найденными в* [15]).

§ 4. Подтверждение результатов

В этом параграфе рассматривается подсчет двумя способами, подтверждающий результаты вычислений.

Предложение 3. *Для заданного множества точек S размера* 21 *существует ровно*

$$\frac{21!}{3!^2 \cdot 6!^3} \cdot (120^3 + 3 \cdot 720 \cdot 120^2) \cdot 812851200 = 1014734232786378424320000000$$

пар $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$, *где* $(S, \mathcal{B})$ – *система* STS(21), *а* $\mathcal{T}$ – *поддизайн* TD(3, 6) *системы* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Напомним вначале, что всего есть 840 различных STS(9) с данным носителем (см., например, [21]), причем заданная тройка точек принадлежит ровно 120 из них.

Количество способов разбить множество мощности 21 на цветки $\{A, B, C, D\}$ равно $21! \cdot 3!^{-2} \cdot 6!^{-3}$. В предположении, что D – блок, есть 120 способов выбрать почти подсистему троек Штейнера с каждым из носителей $A \cup D$, $B \cup D$ и $C \cup D$. В предположении, что D – *не* блок, можно тремя способами выбрать, какое из множеств $A \cup D$, $B \cup D$ и $C \cup D$ является носителем подсистемы, затем $840 - 120 = 720$ способами выбрать эту подсистему, и после этого 120 способами выбрать каждую из двух остальных почти подсистем троек Штейнера. Наконец, число способов выбрать трансверсальный дизайн с группами A, B, C равно 812851200 (общее число различных латинских квадратов размера 6×6 [22]). ▲

С другой стороны, это же число можно подсчитать с помощью полученных представителей классов изоморфизма.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* S *– множество из* 21 *точек, а* $\boldsymbol{S}$ *– множество представителей всех классов изоморфизма систем* STS(21) *на* S. *Число пар* $(\mathcal{B}, \mathcal{T})$, *где* $(S, \mathcal{B})$ *– система* STS(21), *а* $\mathcal{T}$ *– поддизайн* TD(3, 6) *системы* $\mathcal{B}$, *задается формулой*

$$\sum_{\mathcal{B} \in \boldsymbol{S}} N(\mathcal{B}) \cdot \frac{21!}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{B})|}, \tag{9}$$

где $N(\mathcal{B})$ *– число поддизайнов* TD(3, 6) *в* $\mathcal{B}$.

Используя данные из таблицы, можно вычислить ненулевые (имеющие $N(\mathcal{B}) > 0$) слагаемые в сумме (9), что приводит к такому же значению суммы, что и в предложении 3. Это подтверждает результаты наших вычислений.

§ 5. Разрешимость

Система троек Штейнера $(S, \mathcal{B})$ называется *разрешимой*, если $\mathcal{B}$ можно разбить на параллельные классы, где *параллельный класс* – это разбиение S на блоки. Мы проверили все найденные системы на разрешимость и обнаружили 393 класса изоморфизма разрешимых STS рассматриваемого типа. Как видно из таблицы, не существует разрешимых STS(21) с поддизайном TD(3, 6) и только одной подсистемой STS(9). Этот факт можно доказать теоретически.

П р е д л о ж е н и е 5. *Если* STS(21) *имеет поддизайн* TD(3, 6) *и только одну подсистему* STS(9), *то эта система* $\mathcal{D}$ *неразрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(S, \mathcal{D})$ – система STS(21), $(A \cup B \cup C, \{A, B, C\}, \mathcal{T})$ – поддизайн TD(3, 6), соответствующий цветку $\{A, B, C, D\}$, и пусть $\mathcal{A}$ – единственная подсистема троек Штейнера. Без ограничения общности будем считать, что носителем $\mathcal{A}$ является $A \cup D$. Таким образом, имеется две почти подсистемы троек Штейнера с носителями $B \cup D$ и $C \cup D$ соответственно, а также недостающая тройка D. По условию $D \notin \mathcal{D}$.

Пусть $D = \{a, b, c\}$. Рассуждая от противного, предположим, что система имеет разрешение. Рассмотрим блок U, содержащий a и b, и параллельный класс $\mathcal{P}$, содержащий этот блок. Обозначим $t := |\mathcal{P} \cap \mathcal{T}|$. Мы утверждаем, что

(∗) *Блок* V *из* $\mathcal{P}$, *содержащий* c, *принадлежит* $\mathcal{A}$.

Действительно, коль скоро он принадлежит $\mathcal{B}$, то $|B \setminus V| = 4$, причем t из этих четырех точек покрываются блоками из $\mathcal{T} \cap \mathcal{P}$, а остальные $4 - t$ – блоками из $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}$. Следовательно, $4 - t \equiv 0 \bmod 3$. С другой стороны, t из шести точек множества C покрыты блоками из $\mathcal{T} \cap \mathcal{P}$, а остальные $6 - t$ – блоками из $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$. Таким образом, $6 - t \equiv 0 \bmod 3$, противоречие. Аналогично получаем $V \notin \mathcal{C}$, т.е. утверждение (∗) справедливо.

Так как $|A \setminus U \setminus V| = 3$, то $t \leqslant 3$. Поэтому $\mathcal{P}$ содержит хотя бы один блок из $\mathcal{B}$ и хотя бы один блок из $\mathcal{C}$, причем эти блоки не имеют точек из D. То же самое можно сказать о параллельном классе, содержащем блок с a и c. Аналогично для параллельного класса, содержащего блок с b и c. Отсюда получаем, что $\mathcal{B}$ имеет по крайней мере три блока, не пересекающихся с D. Это противоречит предложению 2. ▲

Авторы выражают благодарность Светлане Топаловой за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hulpke A., Kaski P., Östergård P.R.J.* The Number of Latin Squares of Order 11 // Math. Comp. 2011. V. 80. № 274. P. 1197–1219.
2. *Colbourn C.J., Mathon R.* Steiner Systems // Handbook of Combinatorial Designs. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC. 2007. P. 102–110.
3. *Kaski P., Östergård P.R.J.* The Steiner Triple Systems of Order 19 // Math. Comp. 2004. V. 73. № 248. P. 2075–2092.
4. *Bays S.* Recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n + 1$ // J. Math. Pures Appl. (9). 1923. V. 2. P. 73–98.
5. *Colbourn M.J.* An Analysis Technique for Steiner Triple Systems // Proc. 10th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1979). Congress. Numer. V. 23–24. Winnipeg, Man.: Utilitas Math., 1979. P. 289–303.
6. *Denniston R.H.F.* Nonisomorphic Reverse Steiner Triple Systems of Order 19 // Ann. Discrete Math. 1980. V. 7. P. 255–264.
7. *Mathon R.A., Phelps K.T., Rosa A.* A Class of Steiner Triple Systems of Order 21 and Associated Kirkman Systems // Math. Comp. 1981. V. 37. № 155. P. 209–222; 1995. V. 64. № 211. P. 1355–1356.
8. *Phelps K.T., Rosa A.* Steiner Triple Systems with Rotational Automorphisms // Discrete Math. 1981. V. 33. № 1. P. 57–66.
9. *Tonchev V.D.* Steiner Triple Systems of Order 21 with Automorphisms of Order 7 // Ars Combin. 1987. V. 23. P. 93–96; 1995. V. 39. P. 3.
10. *Kapralov S.N., Topalova S.* On the Steiner Triple Systems of Order 21 with Automorphisms of Order 3 // Proc. 3rd Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory. Voneshta Voda, Bulgaria. June 22–28, 1992. P. 105–108.
11. *Osuna O.P.* There Are 1239 Steiner Triple Systems STS(31) of 2-rank 27 // Des. Codes Cryptogr. 2006. V. 40. № 2. P. 187–190.
12. *Jungnickel D., Magliveras S.S., Tonchev V.D., Wassermann A.* The Classification of Steiner Triple Systems on 27 Points with 3-Rank 24 // Des. Codes Cryptogr. 2019. V. 87. № 4. P. 831–839.
13. *Stinson D.R., Seah E.* 284 457 Steiner Triple Systems of Order 19 Contain a Subsystem of Order 9 // Math. Comp. 1968. V. 46. № 174. P. 717–729.
14. *Kaski P., Östergård P.R.J., Topalova S., Zlatarski R.* Steiner Triple Systems of Order 19 and 21 with Subsystems of Order 7 // Discrete Math. 2008. V. 308. № 13. P. 2732–2741.
15. *Kaski P., Östergård P.R.J., Popa A.* Enumeration of Steiner Triple Systems with Subsystems // Math. Comp. 2015. V. 84. № 296. P. 3051–3067.
16. *Wilson R.M.* Nonisomorphic Steiner Triple Systems // Math. Z. 1974. V. 135. № 4. P. 303–313.
17. *Lindner C.C.* A Survey of Embedding Theorems for Steiner Systems // Topics on Steiner Systems. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 175–202.
18. *Bryant D., Horsley D.* A Proof of Lindner's Conjecture on Embeddings of Partial Steiner Triple Systems // J. Combin. Des. 2009. V. 17. № 1. P. 63–89.
19. Number of Species (or "Main Classes" or "Paratopy Classes") of Latin Squares of Order n. Sequence A003090 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at `http://oeis.org`, 2004.
20. *McKay B.D., Piperno A.* Practical Graph Isomorphism, II // J. Symbolic Comput. 2014. V. 60. P. 94–112.

21. Steiner Triple Systems (STS's) on n Elements. Sequence A030128 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at `http://oeis.org`, 2004.

22. Number of Latin Squares of Order n; or Labeled Quasigroups. Sequence A002860 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Published electronically at `http://oeis.org`, 2004.

Гуань Юе
Ши Миньцзя
Школа математических наук, Университет Аньхой,
Хэфэй, провинция Аньхой, КНР
`guanyueeee@163.com`
`smjwcl.good@163.com`
Кротов Денис Станиславович
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
`krotov@math.nsc.ru`

Поступила в редакцию
20.05.2019
После доработки
23.08.2019
Принята к публикации
29.08.2019