ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 **2020** **Вып. 1**

УДК 621.391.1 : 519.2

© 2020 г. **Ф.Х. Клебанер**[1] **А.В. Логачев**[2]**, А.А. Могульский**[3]

РАСШИРЕННЫЙ ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ НА ПОЛУОСИ

Для траекторий процесса с независимыми приращениями на полуоси при выполнении моментного условия Крамера установлен расширенный принцип больших уклонений в пространстве функций без разрывов второго рода с метрикой Боровкова.

Ключевые слова: обобщенный пуассоновский процесс, процесс с независимыми приращениями, условие Крамера, функция уклонений, принцип больших уклонений, расширенный принцип больших уклонений, функции с ограниченной вариацией, пространство функций без разрывов второго рода, метрика Боровкова.

DOI: 10.31857/S0555292320010064

§ 1. Введение. Основной результат

1.1. Постановка задачи. Пусть $S(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный процесс с независимыми приращениями, характеристическая функция которого имеет вид (см., например, [1, с. 500])

$$\mathbf{E}\, e^{iuS(t)} = e^{t\beta(u)}, \tag{1.1}$$

где согласно представлению Леви – Хинчина

$$\beta(u) = \beta(u; q, \sigma^2, \mathcal{B}) := iuq - \frac{u^2\sigma^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\Big) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\mathcal{B}(x), \tag{1.2}$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(x)$ – неубывающая функция ограниченной вариации, непрерывная в точке $x = 0$, $q \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geqslant 0$. Будем считать, что всегда выполнено моментное условие Крамера на распределение случайной величины $S(1)$:

$[\mathbf{C}_0]$ *Для некоторого* $\delta > 0$ *при* $|\lambda| \leqslant \delta$ *выполняется*

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}\, e^{\lambda S(1)} < \infty.$$

Во избежание повторений в формулировках основных утверждений условие $[\mathbf{C}_0]$ мы упоминать не будем.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального совета по научным исследованиям Австралии (грант DP150102758).

[2] Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.1.3 (номер проекта 0314-2016-0008).

[3] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 18-01-00101).

Кроме того, в обзорах и доказательствах нам понадобится более сильное моментное условие Крамера:

$[\mathbf{C}_\infty]$ *Для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *выполняется* $\mathbf{E}\, e^{\lambda S(1)} < \infty$.

Мы будем изучать (при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$) вероятности больших уклонений для траекторий семейства процессов

$$s_T = s_T(t) := \frac{1}{x} S(tT), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad x = x_T \sim T \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{1.3}$$

в подходящем функциональном пространстве.

1.2. Пространство $(\mathbb{D}, \boldsymbol{\rho_B})$. Чтобы сформулировать основной результат статьи, нам необходимо определить функциональное метрическое пространство, случайными элементами которого являются процессы s_T, и построить в этом пространстве функционал уклонений, отвечающий семейству s_T. В дальнейшем в качестве такого пространства нам удобно выбрать пространство $\mathbb{D} = \mathbb{D}(-\infty, \infty)$ вещественных функций $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *без разрывов второго рода, непрерывных слева в любой точке разрыва* $t = t_0$ *и таких, что* $f(t) = 0$ *при* $t \leqslant 0$. Если выбрать непрерывную слева версию процесса $S(t)$ и доопределить процесс $s_T = s_T(t)$ при $t < 0$, положив

$$s_T(t) := 0 \quad \text{при} \quad t < 0,$$

то очевидно, что

$$\mathbf{P}(s_T \in \mathbb{D}) = 1 \quad \text{при всех} \quad T > 0.$$

Каждой функции $f \in \mathbb{D}$ поставим в соответствие ее *график* Γ_f – линейно связное множество в пространстве $\mathbb{R}^2$, которое однозначно определяется своими сечениями $\Gamma_f\big|_t$ в каждой точке $t \in \mathbb{R}$. Сечением $\Gamma_f\big|_t$ в точке $t \in \mathbb{R}$ является "вертикальный" отрезок

$$\big[(t, f(t-0)), (t, f(t+0))\big] = \big[(t, f(t)), (t, f(t+0))\big]$$

в $\mathbb{R}^2$, соединяющий точки $(t, f(t))$ и $(t, f(t+0))$. Таким образом, если в точке $t = u$ функция $f(t)$ непрерывна, то сечение в этой точке

$$\Gamma_f\big|_u = (u, f(u))$$

состоит из одной точки $(u, f(u))$. В пространстве $\mathbb{R}^2$, где расположены графики функций $f \in \mathbb{D}$, нам удобно рассматривать метрику, порожденную "квадратичной" нормой $|(t, \beta)| := \max\{|t|, |\beta|\}$ (ε-окрестность $(\alpha)_\varepsilon$ любой точки $\alpha = (t, \beta) \in \mathbb{R}^2$ в этой метрике является открытым квадратом с центром α и сторонами длины 2ε, параллельными осям координат). Для множества $A \subset \mathbb{R}^2$ через $(A)_\varepsilon$ обозначим ε-окрестность этого множества во введенной метрике, т.е.

$$(A)_\varepsilon := \Big\{(t, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \inf_{(s,\gamma) \in A} \max\{|t-s|, |\beta - \gamma|\} < \varepsilon\Big\}.$$

В пространстве $\mathbb{D}$ мы будем использовать *метрику Боровкова* $\rho_B = \rho_B(f, g)$, которая определяется следующим образом: $\rho_B(f, g) < \varepsilon$ *тогда и только тогда, когда одновременно*

$$\Gamma_f \in (\Gamma_g)_\varepsilon \quad \text{и} \quad \Gamma_g \in (\Gamma_f)_\varepsilon. \tag{1.4}$$

Метрика ρ_B была введена в [2] (см. также [3]); топология, порождаемая метрикой ρ_B, совпадает с топологией Скорохода M_2, описанной в [4]. Метрика Боровкова ρ_B эффективно использовалась в работах [5, 6] и монографии [7, гл. 4, 5]. Заметим также, что метрика Боровкова ρ_B является псевдометрикой, для которой "отождествляются" функции, которые в точках разрывов различаются, но так, что у них совпадают графики. Поэтому выбор класса непрерывных слева и имеющих предел справа функций в качестве исходного пространства $\mathbb{D}$ обусловлен соображениями удобства и "не имеет принципиального характера".

Отметим, что метрика ρ_B слабее, чем равномерная метрика

$$\rho_{\mathbb{U}} = \rho_{\mathbb{U}}(f,g) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - g(t)|,$$

т.е.

$$\rho_B(f,g) \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(f,g) \quad \text{для любых} \quad f,g \in \mathbb{D}. \tag{1.5}$$

Действительно, поскольку для любого $t \in \mathbb{R}$ точки $(t,\alpha) = (t,\alpha_{p_1})$ на графике Γ_f и точки $(t,\beta) + (t,\beta_{p_2})$ на графике Γ_g имеют вид, соответственно,

$$(t,\alpha_{p_1}) = (t, p_1 f(t) + (1-p_1) f(t+0)), \quad \text{где} \quad p_1 \in [0,1],$$
$$(t,\beta_{p_2}) = (t, p_2 f(t) + (1-p_2) f(t+0)), \quad \text{где} \quad p_2 \in [0,1],$$

и при этом выполняются неравенства

$$|f(t) - g(t)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(f,g), \quad |f(t+0) - g(t+0)| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(f,g),$$

то справедливо соотношение

$$\rho_B(f,g) \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{p\in[0,1]} |(t,\alpha_p) - (t,\beta_p))| \leqslant \rho_{\mathbb{U}}(f,g).$$

Следовательно, неравенство (1.5) имеет место.

Основной в нашей статье будет следующая метрика $\rho = \rho(f,g)$, которая строится на основе метрики Боровкова ρ_B:

$$\rho = \rho(f,g) := \rho_B(\widehat{f},\widehat{g}), \quad f,g \in \mathbb{D}, \tag{1.6}$$

где

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{1+|t|} f(t), \quad \widehat{g}(t) := \frac{1}{1+|t|} g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

В силу (1.5) выполняется неравенство

$$\rho(f,g) \leqslant \widehat{\rho}(f,g) \quad \text{для любых} \quad f,g \in \mathbb{D}, \tag{1.7}$$

где метрика $\widehat{\rho}$ построена на основе равномерной метрики:

$$\widehat{\rho}(f,g) = \rho_{\mathbb{U}}(\widehat{f},\widehat{g}) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(t) - \widehat{g}(t)|. \tag{1.8}$$

Таким образом, метрика ρ слабее метрики $\widehat{\rho}$, которая использовалась в [8].

1.3. Функционал уклонений $J = J(f)$. Основные утверждения. Наряду с пространством $\mathbb{D}$ определим пространство $\mathbb{V} \subset \mathbb{D}$ функций $f \in \mathbb{D}$ с ограниченной вариацией

$$\mathrm{Var}_{[0,U]} f < \infty \quad \text{для любого} \quad U \in (0,\infty),$$

а также класс $\mathbb{V}_+ \subset \mathbb{V}$ неубывающих функций $f \in \mathbb{V}$. Известно, что любую функцию $f \in \mathbb{V}$ можно представить в виде разности

$$f = f_+ - f_-, \quad \text{где} \quad f_\pm \in \mathbb{V}_+. \tag{1.9}$$

Представление (1.9) единственно, если при этом выполняется

$$\mathrm{Var}_{[0,U]} f = \mathrm{Var}_{[0,U]} f_+ + \mathrm{Var}_{[0,U]} f_- \quad \text{для любого} \quad U \in (0,\infty). \tag{1.10}$$

Для произвольной функции $f \in \mathbb{V}$ через (f_+, f_-) будем обозначать эту единственную пару функций из $\mathbb{V}_+$, для которой выполняется (1.10). Функции f_+ и f_- называют, соответственно, *положительным* и *отрицательным* изменением функции f (см. [9, гл. I, § 1, с. 19]). Наконец, через $\mathbb{C}_a$ обозначим класс абсолютно непрерывных функций $f = f(t) \in \mathbb{V}$, так что справедливы включения

$$\mathbb{C}_a \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{D}, \quad \mathbb{V}_+ \subset \mathbb{V} \subset \mathbb{D}.$$

Определим далее *функцию уклонений* для случайной величины $S(1)$, положив

$$\Lambda(\alpha) := \sup_{\lambda}\{\lambda\alpha - A(\lambda)\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $A(\lambda) := \ln \mathbf{E}\, e^{\lambda S(1)}$ – логарифм преобразования Лапласа над распределением $S(1)$. Функция $\Lambda(\alpha)$ является преобразованием Лежандра над $A(\lambda)$. Как вероятностная характеристика, функция уклонений была определена и изучена в [10] (см. также [7, 11]). Положим

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda :\ \psi(\lambda) < \infty\}, \quad \lambda_- := \inf\{\lambda :\ \psi(\lambda) < \infty\},$$

тогда интервал (λ_-, λ_+) является максимальным интервалом, в точках которого функция $A(\lambda)$ конечна. В силу условия $[\mathbf{C}_0]$ выполняется $\lambda_- < 0$, $\lambda_+ > 0$.

Далее, с помощью функции $\Lambda(\alpha)$ и пары чисел $|\lambda_-|, \lambda_+$ "стандартным" образом можно определить (см. [12; 13; 6; 7, гл. 4]) следующие функционалы (интегралы) уклонений $I^U(f)$ и $J^U(f)$ в пространстве $\mathbb{D}$, где $U > 0$ – произвольное. Положим для $f \in \mathbb{D}$, для любого $U \in (0,\infty)$

$$I^U(f) := \begin{cases} \int\limits_0^U \Lambda(f'(t))\, dt, & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a. \end{cases}$$

Для определения функционала $J^U(f)$ заметим, что любую функцию $f \in \mathbb{V}$ можно единственным образом представить в виде суммы

$$f = f_a + f_s$$

ее абсолютно непрерывной f_a и сингулярной f_s компонент. Затем, как уже было отмечено выше, функцию f_s можно единственным образом представить в виде разности $f_s = f_{s+} - f_{s-}$ неубывающих функций (см. (1.10)). Поэтому произвольная функция $f \in \mathbb{V}$ допускает представление

$$f = f_a + f_{s+} - f_{s-},$$

и для нее положим (см. [12; 13; 7, гл. 4])

$$J^U(f) := I^U(f_a) + \lambda_+ f_{s+}(U+0) + |\lambda_-| f_{s-}(U+0).$$

Для функций $f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{V}$ положим по определению

$$I^U(f) = J^U(f) = \infty.$$

Из определения вытекает, что функции $I^U(f)$, $J^U(f)$ аргумента $U > 0$ не убывают с ростом U, поэтому можно определить функционалы

$$I(f) := \lim_{U\to\infty} I^U(f), \quad J(f) := \lim_{U\to\infty} J^U(f), \quad f \in \mathbb{D}.$$

Таким образом, функционалы уклонений $I(f)$, $J(f)$ имеют вид

$$I(f) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \Lambda(f'(t))\,dt, & \text{если } f \in \mathbb{C}_a, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{C}_a, \end{cases}$$

$$J(f) = \begin{cases} I(f_a) + \lambda_+ f_{s+}(\infty) + |\lambda_-| f_{s-}(\infty), & \text{если } f = f_a + f_{s+} - f_{s-} \in \mathbb{V}, \\ \infty, & \text{если } f \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{V}. \end{cases}$$

Свойства функционалов (интегралов) уклонений $I^U(f)$, $J^U(f)$, $I(f)$, $J(f)$ изучены достаточно полно (см. [12; 13; 7, гл. 4]). Важные свойства функционалов уклонений $I(f)$ и $J(f)$, необходимые нам далее, сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. I. *Функционал уклонений $J(f)$ полунепрерывен снизу в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$, т.е. для любого $f \in \mathbb{D}$*

$$\varliminf_{n\to\infty} J(f_n) \geqslant J(f), \quad \textit{где} \quad \rho(f_n, f) \to 0.$$

II. *Для некоторого $C < \infty$ и любых функций $f = f_a + f_{s+} - f_{s-} \in \mathbb{V}$ для любых значений $U \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$|f_a(U) - aU| \leqslant \big(I(f_a) + \sqrt{I(f_a)}\big), \quad \textit{где} \quad a := \mathbf{E}\, S(1), \tag{1.11}$$

$$|f_{s+}(U+0)| \leqslant \frac{1}{\lambda_+} J(f), \quad |f_{s-}(U+0)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_-|} J(f). \tag{1.12}$$

III. *Для любого $f \in \mathbb{D}$ найдется последовательность $\{f_n\}$ абсолютно непрерывных функций, такая что при $n \to \infty$*

$$\rho(f_n, f) \to 0, \quad I(f_n) \to J(f).$$

Доказательство. Утверждения I и III установлены в [14] (см. [14, лемма 3.1]). Поскольку неравенства (1.12) очевидным образом вытекают из определения функционала уклонений $J(f)$, нам остается доказать неравенство (1.11). Для фиксированного U рассмотрим множество

$$B_U := \{g \in \mathbb{C}_a :\ g(U) = f_a(U)\}.$$

Минимум функционала $I^U(g)$ по классу функций $g \in B_u$ достигается на линейной функции $g_U = g_U(t) := \dfrac{f_a(U)}{U} t$, поэтому

$$I(f_a) \geqslant I^U(f_a) \geqslant I^U(g_U) = U\Lambda\left(\frac{f_a(U)}{U}\right). \tag{1.13}$$

В силу условия $[\mathbf{C}_0]$ для некоторого $c \in (0, \infty)$ выполняется

$$\Lambda(\alpha) \geqslant c \min\big\{|\alpha - a|, |\alpha - a|^2\big\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.14}$$

Используя неравенства (1.13), (1.14), для $g_a(U) := f_a(U) - aU$ получаем

$$I(f_a) \geqslant c \min\left\{|g_a(U)|, \frac{|g_a(U)|^2}{U}\right\}. \tag{1.15}$$

Возможны два случая:

1) $|g_a(U)| \geqslant \dfrac{|g_a(U)|^2}{U}$,

2) $|g_a(U)| < \dfrac{|g_a(U)|^2}{U}$.

В первом случае из (1.15) получаем

$$|g_a(U)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{UI(f_a)},$$

во втором случае из (1.15) получаем

$$|g_a(U)| \leqslant \frac{1}{c}I(f_a).$$

Поэтому для $U \geqslant 1$ и $C := \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{c}$ имеем

$$|g_a(U)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{c}\right)\big(\sqrt{UI(f_a)} + I(f_a)\big) \leqslant C\sqrt{U}\big(\sqrt{I(f_a)} + I(f_a)\big). \quad \blacktriangle$$

1.4. Основная теорема. Сформулируем основное утверждение настоящей статьи. Для непустого измеримого множества $B \subset \mathbb{D}$ положим

$$J(B) := \inf_{f \in B} J(f), \quad J(\varnothing) := \infty.$$

Через (B) и $[B]$ обозначим, соответственно, внутренность и замыкание измеримого множества B в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$, а через $(B)_\varepsilon$ – ε-окрестность множества B в этом пространстве. Наконец, положим

$$J(B+) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} J((B)_\varepsilon).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$(B) \subset B \subset [B] \subset (B)_\varepsilon,$$

поэтому справедливо

$$J((B)) \geqslant J(B) \geqslant J([B]) \geqslant J(B+).$$

Напомним, что для случайной величины $\xi = S(1)$, которая однозначно определяет распределения процессов $s_T(t)$, $t \geqslant 0$, выполнено условие $[\mathbf{C}_0]$.

Теорема. *Семейство $s_T(\cdot)$ удовлетворяет расширенному принципу больших уклонений в пространстве $(\mathbb{D}, \rho)$ с функционалом уклонений $J = J(f)$: для любого измеримого множества $B \subset \mathbb{D}$*

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) \leqslant -J(B+), \tag{1.16}$$

$$\varliminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in B) \geqslant -J((B)). \tag{1.17}$$

Заметим, что частным случаем теоремы является расширенный принцип больших уклонений на полуоси для обобщенного процесса Пуассона со сносом $S(t)$ для случая, когда среднее $\mathbf{E}\,S(1)$ не равно 0. Этот результат дополняет результат работы [14] (см. теорему 3.1 в [14]), где требуется равенство $\mathbf{E}\,S(1) = 0$.

1.5. Краткий исторический обзор. Отправным пунктом настоящего исследования (как и многих других исследований по большим уклонениям в функциональных пространствах) является классическая работа А.А. Боровкова [10]. Мы перечислим сначала работы, предшествующие настоящей, в которых предполагалось, что выполнено моментное условие Крамера $[\mathbf{C}_\infty]$.

$\mathbf{I}_\infty$. В работе [10] впервые установлены принципы больших уклонений на отрезке $[0,1]$ для случайных блужданий и для траекторий некоторых классов процессов с независимыми приращениями. Далее, в [15] результаты работы [10] на отрезке $[0,1]$ были установлены для произвольных процессов с независимыми приращениями (см. также работу [16], где при выполнении условия $[\mathbf{C}_0]$ изучаются умеренно большие уклонения для траекторий процессов с независимыми приращениями). Наконец, в работе [8] установлены принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий и некоторых классов диффузионных процессов на полуоси $[0,\infty)$.

Перечислим теперь аналогичные результаты (предшествовавшие результатам настоящей статьи), установленные при моментном условии Крамера $[\mathbf{C}_0]$.

$\mathbf{I}_0$. В работах [17,18] установлены принципы больших уклонений для обобщенного пуассоновского процесса на отрезке $[0,1]$. Сравним результаты этих работ. В [17] рассматривается пространство $\mathbb{V}[0,1]$ функций с ограниченной вариацией на отрезке $[0,1]$ с топологией слабой сходимости. В [18] установлен расширенный принцип больших уклонений в пространстве $\mathbb{V}[0,1]$ с метрикой Боровкова ρ_B. Теорема 1.1 работы [18] усиливает, в частности, основной результат работы [17] для важного в граничных задачах класса множеств вида

$$B_c := \Big\{ f \in \mathbb{V}[0,1] : \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} f(t) \geqslant c \Big\}, \quad c > 0.$$

Убедимся в этом. Последовательность функций

$$f_n(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \text{ или } \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1, \\ c, & \text{если } \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} < t \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

лежащих в B_c, слабо сходится к функции $f_0(t) = 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$, поэтому f_0 лежит в замыкании $[B_c]$ множества B_c. В случае, когда среднее изучаемого процесса равно 0, получаем $J(f_0) = J([B_c]) = 0$. Поэтому оценка сверху в принципе больших уклонений в [17] для множества B_c тривиальна и не “смыкается” с оценкой снизу. Нетрудно видеть, далее, что в метрическом пространстве $(\mathbb{V}[0,1], \rho_B)$, которое рассмотрено в [18], выполняется

$$J((B_c)) = J(B_c+),$$

поэтому теорема 1.1 этой работы позволяет получить правильную логарифмическую асимптотику для множества B_c. Работа [19] распространяет результаты работы [17] на класс процессов, заданных на полуоси $[0,\infty)$. Поскольку в [19] используется топология, построенная на базе топологии слабой сходимости, то результату работы [19] присущи в полной мере особенности, отмеченные выше в работе [17].

Наконец, работа [14] распространяет результат работы [18] на класс обобщенных пуассоновских процессов, заданных на полуоси $[0,\infty)$, и в этой работе используется метрика, построенная на базе метрики Боровкова.

Отметим, что в настоящей статье существенно используются результаты работ [8,14,18].

1.6. Основная идея доказательства. Идея содержится в следующем утверждении:

Лемма 2 [18]. *В условиях теоремы для процесса $S(t)$ справедливо представление в виде суммы*

$$S(t) = S_1^{(0)}(t) + S_2^{(0)}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.18}$$

независимых процессов $S_1^{(0)}(t)$ и $S_2^{(0)}(t)$, где $S_1^{(0)}(t)$ – обобщенный процесс Пуассона, *удовлетворяющий условию Крамера* $[\mathbf{C}_0]$, *а* $S_2^{(0)}(t)$ *– однородный процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию Крамера* $[\mathbf{C}_\infty]$.

Доказательство теоремы на основе леммы 2 осуществим следующим образом. Наряду с представлением (1.18) рассмотрим представление

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1.19}$$

в котором процесс

$$S_1(t) := S_1^{(0)}(t) - a_1 t, \quad a_1 := \mathbf{E}\, S_1^{(0)}(1), \quad t \geqslant 0,$$

– обобщенный процесс Пуассона со сносом, для которого случайная величина $S_1(1)$ удовлетворяет условию Крамера $[\mathbf{C}_0]$ и имеет нулевое среднее $\mathbf{E}\, S_1(1) = 0$, а процесс

$$S_2(t) := S_2^{(0)}(t) + a_1 t, \quad t \geqslant 0,$$

– не зависящий от $S_1(t)$ процесс с независимыми приращениями, для которого случайная величина $S_2(1)$ удовлетворяет "сильному" условию Крамера $[\mathbf{C}_\infty]$. Определяя семейства

$$s_{i,T}(t) := \frac{1}{x} S_i(tT), \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad i = 1, 2,$$

приходим к представлению

$$s_T(t) = s_{1,T}(t) + s_{2,T}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.20}$$

Доказательство теоремы осуществляется с помощью представления (1.20). Существенным элементом этого доказательства является то обстоятельство, что к семействам $s_{1,T}$ и $s_{2,T}$ применимы результаты работ [14] и [8] соответственно.

§ 2. Доказательство основных утверждений

2.1. Две основные леммы. Обозначим через Δ класс непрерывных неубывающих положительных при $u \in (0,1]$ и равных 0 в точке $u = 0$ функций $\delta = \delta(u)$, так что $\delta(0) = 0$ и $0 < \delta(u_1) \leqslant \delta(u_2)$ при $0 < u_1 < u_2 \leqslant 1$. В основе доказательства теоремы лежат следующие две леммы.

Лемма 3. I. *Для любого* $N < \infty$ *найдется функция* $\delta = \delta_N(\cdot) \in \Delta$, *такая что для любого* $f \in \mathbb{C}_a$ *и любого* $\varepsilon \in (0,1]$ *выполняется*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \leqslant -\min\bigl\{I((f)_{\delta_N(\varepsilon)}), N\bigr\}. \tag{2.1}$$

II. *Для любого* $f \in \mathbb{D}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \geqslant -J(f). \tag{2.2}$$

Лемма 4. *Для любого* $N < \infty$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся целое* $M < \infty$ *и набор* $\{f_1, \dots, f_M\}$ *функций из* $\mathbb{C}_a$, *такие что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\biggl(s_T \notin \bigcup_{i=1}^{M} (f_i)_\varepsilon\biggr) \leqslant -N. \tag{2.3}$$

Леммы 3 и 4 будут доказаны ниже в пп. 2.4 и 2.5 соответственно. Утверждение теоремы очевидным образом вытекает из утверждений этих лемм (см. [20] или [10, п. 4.1]).

2.2. Вспомогательные леммы. Обозначим наряду с $I(f)$, $J(f)$ через $I_1(f)$, $J_1(f)$ и $I_2(f)$, $J_2(f)$ функционалы уклонений, отвечающие процессам $S_1(t)$, $S_2(t)$ соответственно. Сформулируем утверждения, необходимые для доказательства лемм 3 и 4. Через $(f)_{\widehat{\rho},\varepsilon}$ обозначим ε-окрестность функции $f \in \mathbb{D}$ в метрике

$$\widehat{\rho}(f,g) := \rho_{\mathbb{U}}(\widehat{f},\widehat{g}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(t) - \widehat{g}(t)|,$$

где, напомним,

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{1+|t|} f(t), \quad \widehat{g}(t) := \frac{1}{1+|t|} g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{E}\, S_1(1) = 0$. *Тогда для любых* $f \in \mathbb{C}_a$ *и* $\varepsilon \in (0,1]$ *справедливы оценки*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{1,T} \in (f)_\varepsilon) \leqslant -I_1((f)_{2\varepsilon}), \tag{2.4}$$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{2,T} \in (f)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \leqslant -I_2((f)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}), \tag{2.5}$$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_{\widehat{\rho},\varepsilon_1}) \geqslant -I(f). \tag{2.6}$$

Обозначим через $\mathbb{C} \subset \mathbb{D}$ класс непрерывных функций $f = f(\cdot) \in \mathbb{D}$.

Для любой функции $\delta = \delta(u) \in \Delta$ через $\mathcal{K}_\delta$ обозначим класс функций $f \in \mathbb{C}$, таких что их модуль непрерывности $\omega_f(u)$ допускает оценку

$$\omega_f(u) \leqslant \delta(u) \quad \text{при всех} \quad u \in [0,1].$$

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{E}\, S_1(1) = 0$. *Тогда*

I. *Для любых* $N < \infty$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдутся целое* $L = L_{N,\varepsilon} < \infty$ *и набор* $\{f_1, \ldots, f_L\}$ *функций из* $\mathbb{C}_a$, *такие что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\biggl(s_{1,T} \notin \bigcup_{i=1}^{L} (f_i)_\varepsilon\biggr) \leqslant -N. \tag{2.7}$$

II. *Для любых* $N < \infty$ *найдется элемент* $\delta_N \in \Delta$, *такой что для любого* $\varepsilon \in (0,1]$ *найдутся целое* $M = M_{N,\varepsilon} < \infty$ *и набор* $\{g_1, \ldots, g_M\}$ *функций* $g_j \in \mathbb{C}$, $\widehat{g}_j \in \mathcal{K}_{\delta_N}$, *такие что*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\biggl(s_{2,T} \notin \bigcup_{i=1}^{M} (g_i)_{\widehat{\rho},\varepsilon}\biggr) \leqslant -N. \tag{2.8}$$

Леммы 5 и 6 докажем ниже в пп. 2.5 и 2.6 соответственно. Сейчас на основе этих лемм осуществим

2.3. Доказательство леммы 3. Фиксируем $f \in \mathbb{C}_a$, $N < \infty$, $\varepsilon \in (0,1)$. В силу леммы 6 найдутся $L_{N,\varepsilon}$, $M_{N,\varepsilon}$, $\delta_N \in \Delta$ и наборы функций $\{f_1, \ldots, f_L\}$ из $\mathbb{C}_a$, $\{g_1, \ldots, g_M\}$ из $\mathcal{K}_{\delta_N}$, такие что выполняются неравенства (2.7) и (2.8) соответственно. Пусть

$$\mathcal{M}(\varepsilon) := \bigl\{(i,j) \in \{1,\ldots,L\} \times \{1,\ldots,M\} :\ ((f_i)_\varepsilon + (g_j)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \cap (f)_\varepsilon \neq \varnothing\bigr\}.$$

Тогда согласно леммам 5 и 6 получаем

$$-L_+((f)_\varepsilon) := \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant -\min\Big\{\min_{(i,j)\in\mathcal{M}(\varepsilon)}\big\{I_1((f_i)_{2\varepsilon})+I_2((g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon})\big\},N\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant -\min\Big\{\min_{(i,j)\in\mathcal{M}(\varepsilon)}\big\{I_1((f_i)_{4\varepsilon})+I_2((g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon})\big\},N\Big\}. \qquad (2.9)$$

Поскольку случайные величины $S_1(1)$ и $S_2(1)$ независимы, имеем

$$\Lambda(\alpha_1+\alpha_2)\leqslant\Lambda_1(\alpha_1)+\Lambda_2(\alpha_2).$$

Из последнего неравенства вытекает для любых $h_1,h_2\in\mathbb{C}_a$ неравенство

$$I(h_1+h_2)\leqslant I_1(h_1)+I_2(h_2).$$

Следовательно, для

$$(f_i)_{4\varepsilon}+(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}:=\big\{f^*+g^*:\ f^*\in(f_i)_{4\varepsilon},\ g^*\in(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}\big\}$$

имеем

$$I((f_i)_{4\varepsilon}+(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon})\leqslant I((f_i)_{4\varepsilon})+I((g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}).$$

Поэтому

$$-L_+((f)_\varepsilon)\leqslant -\min\Big\{\min_{(i,j)\in\mathcal{M}(\varepsilon)}\big\{I((f_i)_{4\varepsilon}+(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon})\big\},N\Big\}. \qquad (2.10)$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 7. *Если* $f_i\in\mathbb{C}_a$, $g_j\in\mathcal{K}_\delta$, *то*

$$(f_i)_{4\varepsilon}+(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}\subset(f_i+g_j)_{\delta_1(2\varepsilon)}, \qquad (2.11)$$

где $\delta_1(2\varepsilon):=8\varepsilon+\delta(4\varepsilon)$. *Если при этом* $(i,j)\in\mathcal{M}(\varepsilon)$, *то*

$$(f_i)_{4\varepsilon}+(g_j)_{\widehat{\rho},2\varepsilon}\subset(f_i+g_j)_{\delta_1(2\varepsilon)}\subset(f)_{\delta_2(2\varepsilon)}, \qquad (2.12)$$

где $\delta_2(2\varepsilon):=2\delta_1(2\varepsilon)+2\varepsilon$.

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.5 из [18], поэтому мы его опускаем.

Продолжим доказательство утверждения I леммы 3. Применяя к правой части (2.10) лемму 7, получаем искомое неравенство

$$-L_+\leqslant -\min\big\{I((f)_{\gamma_N(\varepsilon)}),N\big\},$$

где $\gamma_N(\varepsilon):=16\varepsilon+2\delta_N(4\varepsilon)$, а функция $\delta_N(\varepsilon)\in\Delta$ выбирается в соответствии с леммой 6. Утверждение I леммы 3 установлено.

II. Если $J(f)=\infty$, то неравенство (2.2) очевидно. Пусть теперь $J(f)<\infty$. Согласно свойству III функционала уклонений $J(f)$ (см. лемму 1) можно выбрать последовательность f_n абсолютно непрерывных функций, такую что

$$\rho(f_n,f)\to 0,\quad I(f_n)\to J(f)\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Поэтому для любого $\delta>0$ найдутся $n_0<\infty$ и $\varepsilon_1>0$, такие что

$$(f)_\varepsilon\supset(f_{n_0})_{\widehat{\rho},\varepsilon_1},\quad -I(f_{n_0})\geqslant -J(f)-\delta.$$

Воспользуемся оценкой снизу в утверждении I леммы 5:

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in(f)_\varepsilon)\geqslant\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(s_T\in(f_{n_0})_{\widehat{\rho},\varepsilon_1})\geqslant -I(f_{n_0})\geqslant -J(f)-\delta.$$

Из последнего неравенства вытекает требуемое неравенство (2.2). Лемма 3 доказана.

2.4. Доказательство леммы 4 выводится из утверждения леммы 6 с использованием леммы 7, полностью повторяя доказательство, приведенное в п. 2.7 работы [18]. Поэтому мы его опускаем.

2.5. Доказательство леммы 5. Неравенство (2.4) следует непосредственно из основной теоремы работы [14].

Для доказательства неравенства (2.5) рассмотрим наряду с процессом $S_2(t)$ процесс ($k \in \mathbb{Z}$)

$$S_2^* = S_2^*(t) := S_2(k) + (S_2(k+1) - S_2(k))(t-k), \quad t \in [k, k+1],$$

– непрерывную случайную ломаную, построенную по узловым точкам

$$(k, S_2(k)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

По процессу $S_2^*(t)$ построим семейство

$$s_{2,T}^* = s_{2,T}^*(t) := \frac{1}{x_{[T]}} S_2^*(t[T]), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $[T]$ – целая часть T. Далее нам понадобится следующий результат.

Л е м м а 8. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widehat{\rho}(s_{2,T}, s_{2,T}^*) > \varepsilon) = -\infty. \tag{2.13}$$

Лемму 8 докажем несколько позже, а сейчас с ее помощью продолжим доказательство неравенства (2.5).

Из теоремы 4.1 в [8] следует справедливость аналога неравенства (2.5) для семейства $s_{2,T}^*$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{2,T}^* \in (f)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \leqslant -I_2((f)_{\widehat{\rho},\frac{3}{2}\varepsilon}). \tag{2.14}$$

Поэтому неравенство (2.5) очевидным образом вытекает из (2.13) и (2.14).

Докажем теперь неравенство (2.6). Для $f \in \mathbb{C}_a$ выберем функции $f_1, f_2 \in \mathbb{C}_a$, такие что

$$f_1 + f_2 = f.$$

Из результата работы [14] вытекает неравенство

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{1,T} \in (f_1)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \geqslant -I_1(f_1). \tag{2.15}$$

Из результата работы [8] вытекает неравенство

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{2,T}^* \in (f_2)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \geqslant -I_2(f_2),$$

поэтому в силу утверждения леммы 8 имеем

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_{2,T} \in (f_2)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \geqslant -I_2(f_2). \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) получаем, что для любых $f_1, f_2 \in \mathbb{C}_a$, удовлетворяющих равенству $f_1 + f_2 = f$, справедливо

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(s_T \in (f)_{\widehat{\rho},\varepsilon}) \geqslant -(I_1(f_1) + I_2(f_2)). \tag{2.17}$$

Далее, очевидно, что неравенство (2.17) сохранится, если его правую часть заменить на

$$-\inf_{\substack{f_1,f_2\in\mathbb{C}_a\\ f_1+f_2=f}}\{I_1(f_1)+I_2(f_2)\}.$$

Поскольку известно, что

$$\inf_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\\ \alpha_1+\alpha_2=\alpha}}\{\Lambda_1(\alpha_1)+\Lambda_2(\alpha_2)\}=\Lambda(\alpha),$$

то справедливо

$$\inf_{\substack{f_1,f_2\in\mathbb{C}_a\\ f_1+f_2=f}}\{I_1(f_1)+I_2(f_2)\}=I(f).$$

Итак, мы доказали неравенство (2.6). Лемма 5 доказана.

2.6. Доказательство леммы 6. Утверждение I получается из результатов работы [14]. Утверждение II следует из работы [8] и леммы 8.

2.7. Доказательство леммы 8. Легко видеть, что случайные процессы $S_2(t)$ и $S_2^*(t)$ могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}&S_2(t)=a^*t+\widetilde{S}(t),\\ &S_2^*(t)=a^*t+\widetilde{S}(k)+(\widetilde{S}(k+1)-\widetilde{S}(k))(t-k),\quad t\in[k,k+1],\end{aligned}$$

где $\widetilde{S}(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условию $[\mathbf{C}_\infty]$ и $\mathbf{E}\,\widetilde{S}(1)=0$.

Рассмотрим случайную ломаную ($k\in\mathbb{Z}$)

$$\widetilde{S}^*=\widetilde{S}^*(t):=\widetilde{S}(k)+(\widetilde{S}(k+1)-\widetilde{S}(k))(t-k),\quad t\in[k,k+1].$$

Введем обозначения

$$\widetilde{s}_T^*=\widetilde{s}_T^*(t):=\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*(t[T]),\quad \widetilde{s}_T^{**}=\widetilde{s}_T^{**}(t):=\frac{1}{x}\widetilde{S}^*(tT),\quad \widetilde{s}_T=\widetilde{s}_T(t):=\frac{1}{x}\widetilde{S}(tT).$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\widehat{\rho}(s_{2,T},s_{2,T}^*)>\varepsilon)=\mathbf{P}(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T,\widetilde{s}_T^*)>\varepsilon)\leqslant\\ &\leqslant\mathbf{P}\Big(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T,\widetilde{s}_T^{**})>\frac{\varepsilon}{2}\Big)+\mathbf{P}\Big(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T^*,\widetilde{s}_T^{**})>\frac{\varepsilon}{2}\Big)=:P_1+P_2.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Оценим сверху P_1. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\Big(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T,\widetilde{s}_T^*)>\frac{\varepsilon}{2}\Big)=\\ &=\mathbf{P}\Bigg(\sup_{k\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in[\frac{k}{T},\frac{k+1}{T}]}\bigg|\frac{\widetilde{S}(tT)-\widetilde{S}(k)-(\widetilde{S}(k+1)-\widetilde{S}(k))(tT-k)}{x(1+t)}\bigg|>\frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\leqslant\\ &\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}\Bigg(2\sup_{t\in[\frac{k}{T},\frac{k+1}{T}]}\bigg|\frac{\widetilde{S}(tT)-\widetilde{S}(k)}{1+t}\bigg|>\frac{\varepsilon x}{2}\Bigg).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Из однородности случайного процесса $\widetilde{S}(t)$ следует, что

$$P_k := \mathbf{P}\left(2 \sup_{t\in[\frac{k}{T},\frac{k+1}{T}]}\left|\frac{\widetilde{S}(tT)-\widetilde{S}(k)}{1+t}\right| > \frac{\varepsilon x}{2}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]}|\widetilde{S}(tT)| > \frac{\varepsilon x}{4}\left(1+\frac{k}{T}\right)\right).$$

Поэтому для любого $b>0$ получаем

$$P_k \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]} e^{b|\widetilde{S}(tT)|} > e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]} e^{b\widetilde{S}(tT)} > e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}\right) +$$
$$+\,\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]} e^{-b\widetilde{S}(tT)} > e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}\right) =: P_{1k}+P_{2k}. \tag{2.20}$$

Оценим сверху P_{1k}. Используя независимость приращений процесса $\widetilde{S}(tT)$, для $s<t$ получаем

$$\mathbf{E}\left(\frac{e^{b\widetilde{S}(tT)}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)}}\;\Big|\;\mathfrak{F}_{sT}\right) = \frac{\mathbf{E}(e^{b\widetilde{S}(sT)}e^{b\widetilde{S}(tT)-b\widetilde{S}(sT)}|\mathfrak{F}_{sT})}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(sT)}\,\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)-b\widetilde{S}(sT)}} =$$
$$= \frac{e^{b\widetilde{S}(sT)}\,\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)-b\widetilde{S}(sT)}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(sT)}\,\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)-b\widetilde{S}(sT)}} = \frac{e^{b\widetilde{S}(sT)}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(sT)}},$$

где $\mathfrak{F}_t$ – естественная фильтрация случайного процесса $\widetilde{S}(t)$. Значит, случайный процесс $M(tT) := \dfrac{e^{b\widetilde{S}(tT)}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)}}$ – мартингал и $\mathbf{E}\,M(tT)=1$.

Так как случайный процесс $\widetilde{S}(t)$ – процесс с независимыми приращениями и $\mathbf{E}\,\widetilde{S}(t)=0$, то он является мартингалом, а следовательно, процесс $e^{b\widetilde{S}(tT)}$ – субмартингал, и значит, для $t\leqslant\dfrac{1}{T}$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(tT)} \leqslant \mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}. \tag{2.21}$$

Используя неравенство (2.21), получаем

$$P_{1k} = \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]}\frac{e^{b\widetilde{S}(tT)}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}} > \frac{e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}}\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,\frac{1}{T}]} M(tT) > \frac{e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}}{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}}\right).$$

Применив неравенство Дуба (см. [21, теорема 3.2, с. 317]) к правой части последнего неравенства, получим

$$P_{1k} \leqslant \frac{\mathbf{E}\,M(1)\,\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}}{e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}} = \frac{\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}}{e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}}. \tag{2.22}$$

Полностью аналогично оценивается сверху P_{2k}, поэтому из неравенств (2.20), (2.22) следует, что

$$P_k \leqslant \frac{2\,\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}}{e^{\frac{\varepsilon bx}{4}(1+\frac{k}{T})}}. \tag{2.23}$$

Из условий $\mathbf{E}\,e^{b\widetilde{S}(1)}<\infty$, $\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{x}{T}=1$ и неравенства (2.23) следует, что для всех достаточно больших T

$$P_k \leqslant e^{-\frac{\varepsilon bx}{8}(1+\frac{k}{T})} \leqslant e^{-\frac{\varepsilon bx}{8}}e^{-\frac{\varepsilon bk}{16}}. \tag{2.24}$$

Используя неравенства (2.19) и (2.24), для достаточно больших T получаем

$$\mathbf{P}\Big(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T, \widetilde{s}_T^{**}) > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon b x}{8}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon b k}{16}} = e^{-\frac{\varepsilon b x}{4}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon b}{16}}}.$$

Значит, для любых $\varepsilon > 0$, $b > 0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P_1 \leqslant -\frac{\varepsilon b}{8}. \tag{2.25}$$

Далее нам понадобится следующий результат.

Лемма 9. *Для любого $\varepsilon > 0$ справедливо*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T^{*}, \widetilde{s}_T^{**}) > \varepsilon) = -\infty.$$

Лемму 9 мы докажем ниже, а сейчас с ее помощью продолжим доказательство леммы 8.

Из неравенств (2.18), (2.25) и леммы 9 следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $b > 0$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\widehat{\rho}(s_{2,T}, s_{2,T}^{*}) > \varepsilon) \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln(P_1 + P_2) \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln(2\max\{P_1, P_2\}) \leqslant -\frac{\varepsilon b}{8}.$$

Предельный переход $b \to \infty$ завершает доказательство.

2.8. Доказательство леммы 9. Имеем

$$\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T^{*}, \widetilde{s}_T^{**}) = \sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{x}\widetilde{S}^{*}(tT) - \frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^{*}(t[T])\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_{[T]}}\right)\widetilde{S}^{*}(t[T])\right| + \sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\frac{1}{x}\big(\widetilde{S}^{*}(tT) - \widetilde{S}^{*}(t[T])\big)\right| =$$
$$= \sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\left(1 - \frac{x_{[T]}}{x}\right)\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^{*}(t[T])\right| + \sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\frac{1}{x}\big(\widetilde{S}^{*}(tT) - \widetilde{S}^{*}(t[T])\big)\right|. \tag{2.26}$$

Из неравенства (2.26) следует, что для $U \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(\widehat{\rho}(\widetilde{s}_T^{*}, \widetilde{s}_T^{**}) > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\left(1 - \frac{x_{[T]}}{x}\right)\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^{*}(t[T])\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\frac{1}{x}\big(\widetilde{S}^{*}(tT) - \widetilde{S}^{*}(t[T])\big)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\left|\frac{1}{1+t}\left(1 - \frac{x_{[T]}}{x}\right)\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^{*}(t[T])\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,U]}\left|\frac{1}{x}\big(\widetilde{S}^{*}(tT) - \widetilde{S}^{*}(t[T])\big)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}\left|\frac{1}{x}\big(\widetilde{S}^{*}(tT) - \widetilde{S}^{*}(t[T])\big)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right) =: P_1 + P_2 + P_3. \tag{2.27}$$

Оценим сверху P_1. В силу того, что $\lim\limits_{T\to\infty}\left(1-\dfrac{x_{[T]}}{x}\right)=0$ при достаточно больших T, для любого $d>0$ имеем

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0}\frac{1}{1+t}\frac{1}{x_{[T]}}|\widetilde{S}^*(t[T])|>d\right)=\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in A_d), \tag{2.28}$$

где $A_d := \left\{f\in\mathbb{C}:\ \sup\limits_{t\geqslant 0}\dfrac{1}{1+t}|f(t)|>d\right\}$.

Из теоремы 4.1 работы [8] следует, что для любого N найдется компакт $K_N\subset\mathbb{C}$, такой что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})\leqslant -N.$$

Очевидно, что при достаточно больших d выполнено включение $A_d\subset\overline{K_N}$, поэтому из неравенства (2.28) следует

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}_1\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})\leqslant -N. \tag{2.29}$$

Оценим сверху P_2. Последовательность процессов $\widetilde{s}^*_T(t)$, $t\in[0,2U]$, удовлетворяет принципу больших уклонений в пространстве $(\mathbb{C}[0,2U],\rho_{\mathbb{U}})$. Значит, для любого N найдется компакт $K_N\subset\mathbb{C}[0,2U]$, такой что

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})\leqslant -N.$$

В силу теоремы Асколи – Арцела найдется $\delta>0$, такое что для любой функции $f\in K_N$ выполнено неравенство

$$\sup_{\substack{0\leqslant t,s\leqslant 2U\\ |t-s|\leqslant\delta}}|f(t)-f(s)|\leqslant\frac{\varepsilon}{8}.$$

Пусть $\{T\}:=T-[T]$ – дробная часть T. При достаточно больших T имеем

$$\begin{aligned}
P_2 &\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,U]}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\left(\widetilde{S}^*\left(t[T]\left(1+\frac{\{T\}}{[T]}\right)\right)-\widetilde{S}^*(t[T])\right)\right|>\frac{\varepsilon}{8}\right)\leqslant\\
&\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{\substack{t\in[0,U]\\ u\in[0,\delta]}}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\left(\widetilde{S}^*((t+u)[T])-\widetilde{S}^*(t[T])\right)\right|>\frac{\varepsilon}{8},\ \widetilde{s}^*_T\in K_N\right)+\\
&+\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})\leqslant\mathbf{P}\left(\sup_{\substack{0\leqslant t,s\leqslant 2U\\ |t-s|\leqslant\delta}}|\widetilde{s}^*_T(t)-\widetilde{s}^*_T(s)|>\frac{\varepsilon}{8},\ \widetilde{s}^*_T\in K_N\right)+\\
&+\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})=0+\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N})=\mathbf{P}(\widetilde{s}^*_T\in\overline{K_N}).
\end{aligned}\tag{2.30}$$

Оценим сверху P_3. Имеем

$$\begin{aligned}
P_3 &\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*(tT)\right|>\frac{\varepsilon}{16}\right)+\\
&+\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*(t[T])\right|>\frac{\varepsilon}{16}\right).
\end{aligned}\tag{2.31}$$

Оценим первое слагаемое правой части неравенства (2.31). Для достаточно больших T имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*\left(t[T]\left(1+\frac{\{T\}}{[T]}\right)\right)\right|>\frac{\varepsilon}{16}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t\left(1+\frac{\{T\}}{[T]}\right)}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*\left(t[T]\left(1+\frac{\{T\}}{[T]}\right)\right)\right|>\frac{\varepsilon}{32}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}\left|\frac{1}{x_{[T]}}\widetilde{S}^*(t[T])\right|>\frac{\varepsilon}{32}\right). \tag{2.32}$$

Из неравенств (2.31), (2.32) следует, что

$$P_3\leqslant 2\,\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant U}\frac{1}{1+t}|\widetilde{s}^*_T(t)|>\frac{\varepsilon}{32}\right). \tag{2.33}$$

Из (2.33) и доказательства теоремы 4.1 работы [8] следует, что для любого N найдется U_N, такое что для всех $U>U_N$ выполнено неравенство

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P_3\leqslant -N. \tag{2.34}$$

Из неравенств (2.27), (2.29), (2.30) и (2.34) следует, что для любого N

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(\widehat{\rho}(\widetilde{s}^*_T,\widetilde{s}^{**}_T)>\varepsilon)\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln(P_1+P_2+P_3)\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln(3\max\{P_1,P_2,P_3\})\leqslant -N.$$

Предельный переход $N\to\infty$ завершает доказательство.

Авторы благодарят Е.А. Печерского за полезные обсуждения и весьма ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Либроком, 2009.
2. *Боровков А.А.* Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // УМН. 1972. Т. 27. № 1. С. 3–41.
3. *Боровков А.А.* О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятн. и ее примен. 1973. Т. 18. № 2. С. 217–234.
4. *Скороход А.В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 3. С. 289–319.
5. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II, III // Теория вероятн. и ее примен. 2011. Т. 56. № 4. С. 627–655; 2012. Т. 57. № 1. С. 3–34; 2013. Т. 58. № 1. С. 37–52.
6. *Могульский А.А.* Принцип больших уклонений для обобщенного пуассоновского процесса // Матем. тр. 2016. Т. 19. № 2. С. 119–157.
7. *Боровков А.А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: Физматлит, 2013.
8. *Klebaner F.C., Logachov A.V., Mogulskii A.A.* Large Deviations for Processes on Half-line // Electron. Commun. Probab. 2015. V. 20. Paper no. 75 (14 pp.).
9. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

10. *Боровков А.А.* Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. № 4. С. 635–654.

11. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. Новосибирск: Наука, 1992.

12. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Свойства функционала от траекторий, возникающего при анализе вероятностей больших уклонений случайных блужданий // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52. № 4. С. 777–795.

13. *Могульский А.А.* Теорема о разложении интеграла уклонений // Матем. тр. 2012. Т. 15. № 2. С. 127–145.

14. *Klebaner F.C., Mogulskii A.A.* Large Deviations for Processes on Half-line: Random Walk and Compound Poisson Process // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1–20. Available at `http://semr.math.nsc.ru/v16/p1-20.pdf`.

15. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Неравенства и принципы больших уклонений для траекторий процессов с независимыми приращениями // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54. № 2. С. 286–297.

16. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Принципы умеренно больших уклонений для траекторий случайных блужданий и процессов с независимыми приращениями // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58. № 4. С. 648–671.

17. *Lynch J., Sethuraman J.* Large Deviations for Processes with Independent Increments // Ann. Probab. 1987. V. 15. № 2. P. 610–627.

18. *Могульский А.А.* Расширенный принцип больших уклонений для процесса с независимыми приращениями // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 3. С. 660–672.

19. *Добрушин Р.Л., Печерский Е.А.* Большие уклонения для случайных процессов с независимыми приращениями на бесконечном интервале // Пробл. передачи информ. 1998. Т. 34. № 4. С. 76–108.

20. *Боровков А.А., Могульский А.А.* О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 6. С. 1251–1269.

21. *Дуб Д.Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.

Клебанер Фима Хаимович
Школа математики, Университет Монаша,
Мельбурн, Австралия
`fima.klebaner@monash.edu`
Логачёв Артём Васильевич
Новосибирский государственный университет, лаборатория
прикладной вероятности, Новосибирск
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
лаборатория теории вероятностей и математической
статистики, Новосибирск
Новосибирский государственный университет экономики
и управления, кафедра статистики, Новосибирск
Сибирский государственный университет геосистем
и технологий, Новосибирск
`omboldovskaya@mail.ru`
Могульский Анатолий Альфредович
Новосибирский государственный университет, лаборатория
прикладной вероятности, Новосибирск
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
лаборатория теории вероятностей и математической
статистики, Новосибирск
`mogul@math.nsc.ru`

Поступила в редакцию
26.12.2019
После доработки
28.01.2020
Принята к публикации
29.01.2020