

УДК 621.391.1 : 519.21, 519.872

© 2020 г. А.В. Горбунова, А.В. Лебедев

ДВУМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ОСТАТОЧНЫХ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С РАЗДЕЛЕНИЕМ ЗАЯВОК

Исследуется максимальное остаточное время обслуживания в системах типа $M^{(2)}|G_2|\infty$ с разделением заявок при поступлении на две подзаявки, каждая из которых обслуживается в одной из двух подсистем с бесконечным числом приборов. Рассмотрены случаи интенсивности входящего потока: 1) не зависящей от времени, 2) заданной функцией от времени, 3) заданной случайным процессом. В качестве примеров распределений времен обслуживания рассмотрены показательное, гиперэкспоненциальное, Парето и равномерное. В ряде случаев найдены копула-функции и коэффициент Бломквиста. Доказана асимптотическая независимость максимальных остаточных времен обслуживания при высокой загрузке.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система массового обслуживания, система с разделением заявок, максимальное остаточное время обслуживания, копула, коэффициент Бломквиста, распределенные вычисления, облачные технологии.

DOI: 10.31857/S0555292320010076

§ 1. Введение

Изучение систем с параллельным обслуживанием заявок является довольно актуальной задачей в настоящее время, поскольку организация вычислений подобным образом приносит существенный результат с точки зрения увеличения скорости и, соответственно, сокращения времени обработки информации, улучшая таким образом качество обслуживания пользователей таких систем. Это в значительной степени объясняет то, что подход, основанный на параллельности процессов обработки данных, при построении современных компьютерных и информационно-вычислительных сетей получил достаточно широкое распространение [1, 2].

Одним из наиболее ярких примеров описанных систем с точки зрения высокой востребованности в силу наличия целого ряда преимуществ являются облачные вычисления. Однако распределенная природа данной технологии приводит к проблемам, связанным с надежностью и доступностью предоставляемых ею услуг [3, 4]. Речь может идти о нескольких типах сбоев, которые могут приводить к снижению производительности, поломке или даже отключению системы. Кроме того, в облачной среде существует понятие частичных отказов. Возможны также ситуации преднамеренного выключения вычислительной системы в связи с нарушением информационной безопасности.

Всевозможные сбои должны эффективно обрабатываться надлежащими механизмами отказоустойчивости, поэтому время, необходимое для корректного завершения работы системы после отключения входящего потока заявок, является одним

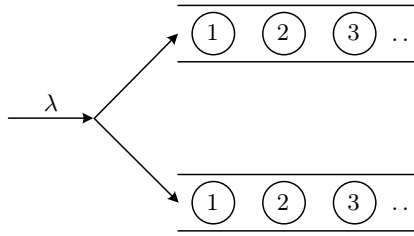


Рис. 1. Схема СМО

из важнейших показателей, используемых при разработке эффективных методов повышения работоспособности распределенных систем и, соответственно, требует глубокого анализа.

Предположим, что в начальный момент система свободна от заявок. Под максимальным остаточным временем обслуживания будем понимать максимум из остаточных времен обслуживания по всем занятым приборам на момент времени T . С практической точки зрения это как раз и есть время, необходимое для корректного завершения работы системы после отключения входящего потока заявок (например, при компьютерной обработке данных или передаче информации в телекоммуникациях).

Итак, рассмотрим систему массового обслуживания типа $M^{(2)}|G_2|\infty$, в которую с интенсивностью λ поступает пуассоновский поток заявок. В момент поступления заявка мгновенно разделяется на две идентичные подзаявки, каждая из которых поступает на обслуживание в первый и второй блоки (подсистемы) соответственно. Каждый блок обслуживания содержит бесконечное число приборов, обслуживание в каждом блоке имеет произвольное распределение с функцией распределения $B_1(x)$ на приборах первого блока и $B_2(y)$ на приборах второго блока (см. рис. 1).

Нас будет интересовать совместное (двумерное) распределение максимальных остаточных времен обслуживания по двум блокам.

Вообще говоря, бесконечнолинейные системы массового обслуживания $M|G|\infty$ изучаются еще со времен работы [5]. Основные результаты для них изложены в учебниках [6, 7]. Дальнейшие обобщения были в основном связаны с рассмотрением более сложного входящего потока. Одним из авторов (см., например, [8–10]) изучались системы с групповым поступлением $M^{[X]}|G|\infty$ с точки зрения максимального числа заявок.

Другая современная область исследований – системы с разделением заявок (fork-join), где предполагается, что каждая заявка при поступлении в систему разделяется на несколько подзаявок, каждая из которых направляется на обслуживание в соответствующий блок. При этом традиционно рассматривалось обслуживание одиночными приборами с неограниченной очередью. Тогда время пребывания заявки в системе (время отклика) представляет собой максимум из времен пребывания подзаявок, причем эти времена зависимы. В классической работе [11] был получен точный результат для среднего времени отклика в случае двух очередей с показательным временем обслуживания одинаковой интенсивности. Обзор работ и результатов можно найти, например, в [12]. В последнее время модели с разделением заявок активно используются применительно к технологиям облачных вычислений [13].

В работах [14–19] исследовались системы с параллельным обслуживанием кратных заявок в блоках, подобные той, что рассматривается в настоящей статье. При этом в [14–17] используется несколько иная терминология, но понятно, что поступление в систему “сдвоенных” или “кратных” заявок эквивалентно разделению одной заявки на несколько подзаявок. В [14–17] были получены аналитические выражения

для производящих функций распределения вероятностей состояний цепи Маркова, характеризующей число заявок в каждом блоке, а в [18, 19] представлен обзор основных результатов и основных методов исследования СМО с параллельным обслуживанием заявок.

Что касается такой характеристики, как максимальное остаточное время обслуживания, то оно изучалось в сравнительно меньшей степени. Так, в работах [20, 21] были рассмотрены бесконечнолинейные системы с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком, предполагалось, что время обслуживания распределено показательно, а интенсивность входящего потока переключается между значениями λ_1 и λ_2 через показательно распределенные промежутки времени с параметрами α_1 и α_2 . Были выведены рекуррентные формулы, позволяющие оценивать плотность распределения численно. В [22] максимальное остаточное время обслуживания изучалось в бесконечнолинейных системах типа $M|G|\infty$ на данный момент и в стационарном режиме в условиях различных вариантов интенсивностей входящего потока.

Поскольку данная статья продолжает исследования, начатые в [22], но в условиях параллельного обслуживания заявок в двух блоках, здесь также будут проанализированы случаи интенсивности, не зависящей от времени, заданной функцией от времени и заданной случайным процессом. Кроме того, в силу двумерности рассматриваемых распределений отдельное внимание уделено вычислению копула-функций и коэффициентов Бломквиста. В этой связи сошлемся на учебник [23].

§ 2. Случай постоянной интенсивности

Рассмотрим сначала случай интенсивности входящего потока, не зависящей от времени (имеет место стационарный пуассоновский поток). Оценим двумерную случайную величину максимумов остаточных времен обслуживания в такой системе, а точнее ее функцию распределения $G_T(x, y)$ в момент времени T (где $T = +\infty$ соответствует стационарному режиму). В результате будет справедлива следующая

Теорема 1. При $\lambda = \text{const}$, $0 < T < \infty$ верно

$$G_T(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^T (1 - B_1(t+x)B_2(t+y)) dt \right\},$$

и

$$G_\infty(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^\infty (1 - B_1(t+x)B_2(t+y)) dt \right\},$$

если интеграл сходится.

Далее выражение для $G_T(x, y)$ можем представить следующим образом¹:

$$G_T(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^T \bar{B}_1(t+x) dt - \lambda \int_0^T \bar{B}_2(t+y) dt + \lambda \int_0^T \bar{B}_1(t+x)\bar{B}_2(t+y) dt \right\} = G_{1,T}(x)G_{2,T}(y)D_T(x, y), \quad (1)$$

¹ Далее с помощью верхней черты обозначаются хвосты распределений: $\bar{B}(x) = 1 - B(x)$, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

где

$$G_{1,T}(x) = \exp\left\{-\lambda \int_0^T \bar{B}_1(t+x) dt\right\}, \quad G_{2,T}(y) = \exp\left\{-\lambda \int_0^T \bar{B}_2(t+y) dt\right\}$$

– частные функции распределения максимальных остаточных времен обслуживания в первом и втором блоках согласно [22], а

$$D_T(x, y) = \exp\left\{\lambda \int_0^T \bar{B}_1(t+x)\bar{B}_2(t+y) dt\right\}$$

– множитель, отражающий их зависимость (в его отсутствие они были бы независимы). Затем введем функции распределения

$$F_{1,T}(x) = 1 - \frac{1}{\mu_{1,T}} \int_0^T \bar{B}_1(t+x) dt, \quad F_{2,T}(y) = 1 - \frac{1}{\mu_{2,T}} \int_0^T \bar{B}_2(t+y) dt, \quad (2)$$

где

$$\mu_{1,T} = \int_0^T \bar{B}_1(t) dt, \quad \mu_{2,T} = \int_0^T \bar{B}_2(t) dt.$$

Тогда

$$G_T(x, y) = D_T(x, y) \exp\{-\lambda\mu_{1,T}\bar{F}_{1,T}(x)\} \exp\{-\lambda\mu_{2,T}\bar{F}_{2,T}(y)\}.$$

Для описания зависимости используем современный математический аппарат теории копул [23].

Копулой C называется функция многомерного распределения на $[0, 1]^d$, $d \geq 2$, если все частные распределения являются равномерными на $[0, 1]$. Согласно знаменитой теореме Склера любая функция многомерного распределения в \mathbb{R}^d представима в виде

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),$$

где F_i , $1 \leq i \leq d$, – функции частных распределений. Таким образом, всякому многомерному распределению можно поставить в соответствие его копулу. Если частные распределения непрерывны, то такое представление единственно.

Если рассматривать только двумерные копулы $C(u, v)$ случайных векторов (X, Y) с непрерывными функциями распределения компонент F_X , F_Y , то для совместной функции распределения X и Y существует и единственно представление

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)).$$

В нашем случае имеется такой нюанс: частные функции распределения $G_{1,T}(x)$ и $G_{2,T}(y)$ не являются непрерывными, они имеют скачки в нуле, от нуля до положительных значений (имеющих смысл вероятностей того, что первый и второй блоки свободны). Поэтому копулу имеет смысл определять только при $u \geq G_{1,T}(0)$, $v \geq G_{2,T}(0)$.

Из (1) следует, что

$$C_T(u, v) = uv \cdot D_T(G_{1,T}^{-1}(u), G_{2,T}^{-1}(v)). \quad (3)$$

На практике удобно описывать зависимость каким-то числом (коэффициентом). Обычно для этого используется коэффициент корреляции Пирсона. Иногда используются также коэффициенты корреляции Кендалла и Спирмена. Нам же удобнее оказывается использовать коэффициент Бломквиста [23, с. 182], поскольку в ряде дальнейших примеров он может быть найден в явном виде.

Коэффициент корреляции Бломквиста случайных величин X и Y определяется как

$$\beta_{X,Y} = \mathbf{E} \operatorname{sign}(X - X_m)(Y - Y_m),$$

где X_m и Y_m – медианы X и Y соответственно. Поэтому коэффициент Бломквиста называют также *медиальным коэффициентом корреляции*. Он выражается через копулу следующим образом:

$$\beta_C = 4C(1/2, 1/2) - 1.$$

Отметим, что в нашей модели коэффициент Бломквиста имеет смысл, только когда медианы максимальных остаточных времен обслуживания положительны, т.е. при условиях $G_{1,T}(0) < 1/2$ и $G_{2,T}(0) < 1/2$.

Пример 1. Если предположить, что времена обслуживания заявок на приборах каждого из блоков имеют показательное распределение, т.е.

$$B_1(x) = 1 - e^{-\beta_1 x}, \quad B_2(y) = 1 - e^{-\beta_2 y}, \quad x, y \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad (4)$$

то тогда

$$G_T(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{e^{-\beta_1 x}(1 - e^{-\beta_1 T})}{\beta_1} + \frac{e^{-\beta_2 y}(1 - e^{-\beta_2 T})}{\beta_2} - \frac{e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y)}(1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)T})}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right\}, \quad x, y \geq 0, \quad 0 < T \leq \infty,$$

$$G_\infty(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{\beta_1} e^{-\beta_1 x} + \frac{1}{\beta_2} e^{-\beta_2 y} - \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} e^{-(\beta_1 x + \beta_2 y)} \right) \right\}, \quad x, y \geq 0.$$

Частные функции распределения равны

$$G_{1,T}(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\beta_1} e^{-\beta_1 x}(1 - e^{-\beta_1 T}) \right\}, \quad G_{2,T}(y) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{\beta_2} e^{-\beta_2 y}(1 - e^{-\beta_2 T}) \right\}.$$

Функции, обратные частным функциям распределения, имеют вид

$$G_{1,T}^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta_1} \ln \left(-\frac{\beta_1 \ln u}{\lambda(1 - e^{-\beta_1 T})} \right), \quad G_{2,T}^{-1}(v) = -\frac{1}{\beta_2} \ln \left(-\frac{\beta_2 \ln v}{\lambda(1 - e^{-\beta_2 T})} \right).$$

Тогда копула (см. рис. 2) определяется следующими выражениями:

$$C_T(u, v) = G_T(G_1^{-1}(u), G_2^{-1}(v)) =$$

$$= u \cdot v \cdot \exp \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda(\beta_1 + \beta_2)} \frac{1 - e^{-\beta_1 T - \beta_2 T}}{(1 - e^{-\beta_1 T})(1 - e^{-\beta_2 T})} \ln u \ln v \right\}, \quad (5)$$

$$C_\infty(u, v) = u \cdot v \cdot \exp \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda(\beta_1 + \beta_2)} \ln u \ln v \right\},$$

а коэффициент Бломквиста равен

$$\beta_C = 4C_\infty \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - 1 = \exp \left\{ \frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda(\beta_1 + \beta_2)} \ln^2 \frac{1}{2} \right\} - 1 = 2^{\frac{\beta_1 \beta_2}{\lambda(\beta_1 + \beta_2)}} \ln^2 - 1.$$

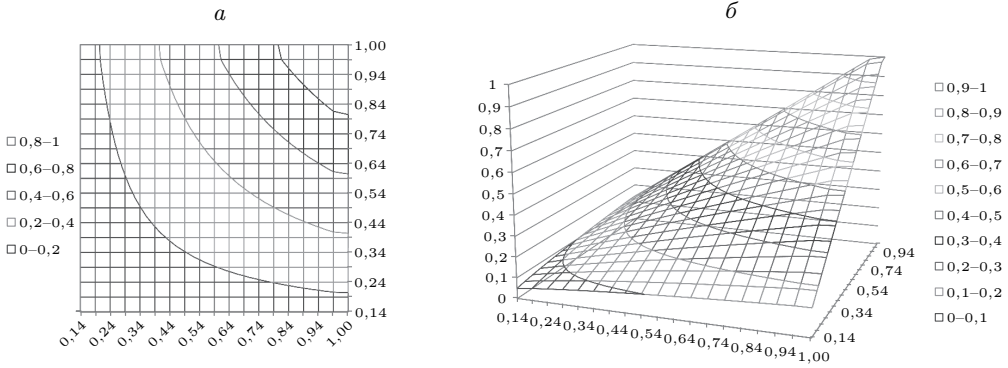


Рис. 2. Копула для случая показательного распределения, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\lambda = 2$:
 а – контурный график; б – трехмерный график

Заметим, что полученная формула копулы (5) похожа на известную формулу семейства Гумбеля – Барнетта [23, § 4.3, формула (4.2.9)]

$$C(u, v) = uv \exp\{-\theta \ln u \ln v\}, \quad \theta \in (0, 1],$$

но с неподходящим (отрицательным) параметром θ . Это объясняется тем, что (как уже было ранее упомянуто) мы рассматриваем копулы только при $u \geq G_{1,T}(0)$, $v \geq G_{2,T}(0)$. На всем единичном квадрате формула (5) и не задает копулу (т.е. не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к копуле [23, §2.2]).

Пример 2. Если предположить, что времена обслуживания на приборах каждого из блоков имеют гиперэкспоненциальное распределение, т.е.

$$B_1(x) = 1 - \sum_{i=1}^n c_{1i} e^{-\beta_{1i} x}, \quad x \geq 0, \quad \beta_{1i} > 0, \quad c_{1i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n c_{1i} = 1,$$

$$B_2(y) = 1 - \sum_{i=1}^n c_{2i} e^{-\beta_{2i} y}, \quad y \geq 0, \quad \beta_{2i} > 0, \quad c_{2i} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n c_{2i} = 1,$$

то тогда

$$G_T(x, y) = \exp\left\{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_{1i}}{\beta_{1i}} e^{-\beta_{1i} x} (1 - e^{-\beta_{1i} T}) + \sum_{i=1}^n \frac{c_{2i}}{\beta_{2i}} e^{-\beta_{2i} y} (1 - e^{-\beta_{2i} T}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{c_{1i} c_{2i}}{\beta_{1i} + \beta_{2i}} e^{-\beta_{1i} x - \beta_{2i} y} (1 - e^{-(\beta_{1i} + \beta_{2i}) T}) \right)\right\}, \quad x, y \geq 0, \quad 0 < T \leq \infty,$$

$$G_\infty(x, y) = \exp\left\{-\lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{c_{1i}}{\beta_{1i}} e^{-\beta_{1i} x} + \sum_{i=1}^n \frac{c_{2i}}{\beta_{2i}} e^{-\beta_{2i} y} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{c_{1i} c_{2i}}{\beta_{1i} + \beta_{2i}} e^{-\beta_{1i} x - \beta_{2i} y} \right)\right\}, \quad x, y \geq 0.$$

К сожалению, здесь в общем случае нельзя получить копулу и коэффициент Бломквиста в явном виде.

Пример 3. Если предположить, что времена обслуживания на приборах каждого из блоков имеют распределение Парето с параметром $\alpha = 2$, т.е.

$$B_1(x) = 1 - (x + 1)^{-2}, \quad B_2(y) = 1 - (y + 1)^{-2}, \quad x, y \geq 0,$$

то тогда

$$G_T(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{(x - y + 1)(x - y - 1)}{(x - y)^2} \left(\frac{T}{(x + T + 1)(x + 1)} + \frac{T}{(y + T + 1)(y + 1)} \right) - \frac{2}{(x - y)^3} \ln \frac{(x + T + 1)(y + 1)}{(y + T + 1)(x + 1)} \right) \right\}, \quad x, y \geq 0, \\ 0 < T \leq \infty, \quad x \neq y,$$

$$G_\infty(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{(x - y + 1)(x - y - 1)}{(x - y)^2} \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{y + 1} \right) - \frac{2}{(x - y)^3} \ln \frac{y + 1}{x + 1} \right) \right\}, \quad x, y \geq 0, \quad x \neq y.$$

Частные функции распределения:

$$G_{1,T}(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda T}{(x + T + 1)(x + 1)} \right\}, \quad G_{2,T}(y) = \exp \left\{ -\frac{\lambda T}{(y + T + 1)(y + 1)} \right\},$$

$$G_{1,\infty}(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(x + 1)} \right\}, \quad G_{2,\infty}(y) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(y + 1)} \right\}.$$

Функции, обратные частным функциям распределения, имеют вид

$$G_{1,\infty}^{-1}(u) = -\frac{\lambda}{\ln u} - 1, \quad G_{2,\infty}^{-1}(v) = -\frac{\lambda}{\ln v} - 1,$$

тогда копула (см. рис. 3) определяется следующим выражением:

$$C_\infty(u, v) = uv \exp \left\{ \frac{\ln^2 u \ln^2 v \left(2 \ln u \ln v \ln \left(\frac{\ln u}{\ln v} \right) - \ln(uv) \ln \left(\frac{u}{v} \right) \right)}{\lambda^2 (\ln u - \ln v)^3} \right\}, \quad u \neq v.$$

При $x = y$ получим

$$G_T(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{3(x + T + 1)^3} - \frac{2}{(x + T + 1)} - \frac{1}{3(x + 1)^3} + \frac{2}{(x + 1)} \right) \right\}, \\ x \geq 0, \quad 0 < T \leq \infty,$$

$$G_\infty(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{2}{(x + 1)} - \frac{1}{3(x + 1)^3} \right) \right\}, \quad x \geq 0,$$

$$C_\infty(u, u) = u^2 \exp \left\{ -\frac{\ln^3 u}{3\lambda^2} \right\}.$$

Следовательно, коэффициент Бломквиста равен

$$\beta_C = 4C_\infty \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - 1 = \exp \left\{ -\frac{\ln^3 \frac{1}{2}}{3\lambda^2} \right\} - 1 = 2^{\frac{\ln^2 2}{3\lambda^2}} - 1.$$

Пример 4. В случае, когда параметр в распределении Парето $\alpha = 3$, т.е.

$$B_1(x) = 1 - (x + 1)^{-3}, \quad B_2(y) = 1 - (y + 1)^{-3}, \quad x, y \geq 0,$$

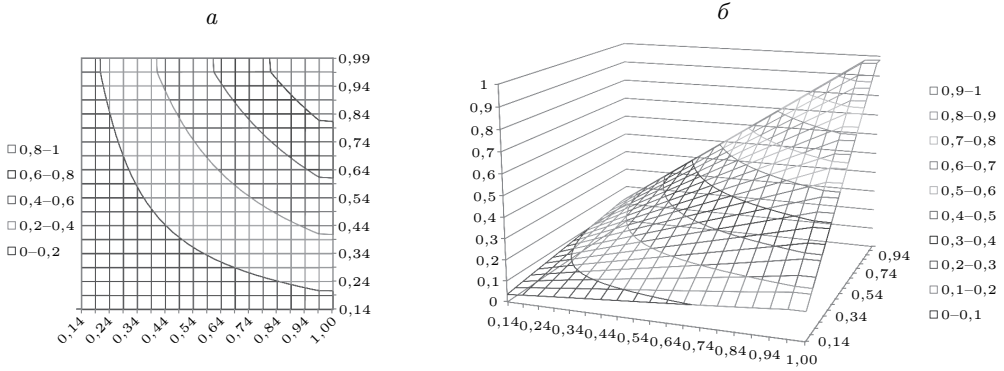


Рис. 3. Копула для случая распределения Парето, $\alpha = 2$, $\lambda = 2$: *a* – контурный график; *б* – трехмерный график

имеем

$$G_T(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(y+1)^2} + \frac{1}{(x-y)^3} \left(\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(y+1)^2} \right) + \frac{3}{(x-y)^4} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) - \frac{1}{2(x+T+1)^2} - \frac{1}{2(y+T+1)^2} - \frac{1}{(x-y)^3} \left(\frac{1}{2(x+T+1)^2} - \frac{1}{2(y+T+1)^2} \right) - \frac{3}{(x-y)^4} \left(\frac{1}{x+T+1} + \frac{1}{y+T+1} \right) + \frac{6}{(x-y)^5} \ln \frac{(x+T+1)(y+1)}{(y+T+1)(x+1)} \right\}, \quad x, y \geq 0, \quad 0 < T \leq \infty, \quad x \neq y,$$

тогда

$$G_\infty(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{2(y+1)^2} + \frac{1}{(x-y)^3} \left(\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(y+1)^2} \right) + \frac{3}{(x-y)^4} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) - \frac{6}{(x-y)^5} \ln \frac{x+1}{y+1} \right) \right\}, \quad x, y \geq 0, \quad x \neq y.$$

Частные функции распределения:

$$G_{1,T}(x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+T+1)^2} \right) \right\}, \quad x \geq 0,$$

$$G_{2,T}(y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{2(y+1)^2} - \frac{1}{2(y+T+1)^2} \right) \right\}, \quad y \geq 0.$$

При $x = y$ получим

$$G_T(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{5(x+T+1)^5} - \frac{1}{(x+T+1)^2} - \frac{1}{5(x+1)^5} + \frac{1}{(x+1)^2} \right) \right\}, \quad x \geq 0, \quad 0 < T \leq \infty,$$

$$G_\infty(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{5(x+1)^5} \right) \right\}, \quad x \geq 0,$$

а копула при $u = v$ примет вид

$$C_\infty(u, u) = u^2 \exp \left\{ \frac{4 \ln^2 u}{5\lambda} \sqrt{-\frac{2 \ln u}{\lambda}} \right\}.$$

Тогда коэффициент Бломквиста равен

$$\beta_C = 4C_\infty \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - 1 = \exp \left\{ \frac{2 \ln 2}{5} \left(\frac{\lambda}{2 \ln 2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right\} - 1 = 2^{\frac{2}{5}} \left(\frac{\lambda}{2 \ln 2} \right)^{-\frac{3}{2}} - 1.$$

Пример 5. Если предположить, что времена обслуживания на приборах каждого из блоков имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, т.е.

$$B_1(x) = x, \quad B_2(y) = y, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1],$$

то тогда

$$G_\infty(x, y) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-y^2)}{2} - \frac{(1 - \max\{x, y\})^2}{6} [3|x-y| + 2(1 - \max\{x, y\})] \right) \right\}, \quad x, y \in [0, 1],$$

так как при $T > 1$, если $x \leq y$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T (1 - B_1(t+x)B_2(t+y)) dt &= \int_0^{1-y} (1 - (t+x)(t+y)) dt + \int_{1-y}^{1-x} (1 - (t+x)) dt = \\ &= \frac{(1-y)^2}{2}(1+x-y) + \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-y)^3}{3}, \end{aligned}$$

а если $x > y$, то

$$\begin{aligned} \int_0^T (1 - B_1(t+x)B_2(t+y)) dt &= \int_0^{1-x} (1 - (t+x)(t+y)) dt + \int_{1-x}^{1-y} (1 - (t+y)) dt = \\ &= \frac{(1-x)^2}{2}(1+y-x) + \frac{(1-y)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}. \end{aligned}$$

Частные функции распределения имеют вид

$$G_{1,T}(x) = \exp \left\{ -\lambda \frac{(1-x)^2}{2} \right\}, \quad G_{2,T}(y) = \exp \left\{ -\lambda \frac{(1-y)^2}{2} \right\}, \quad x, y \in [0, 1],$$

а функции, обратные частным функциям распределения, равны

$$G_1^{-1}(u) = 1 - \sqrt{-\frac{2 \ln u}{\lambda}}, \quad G_2^{-1}(v) = 1 - \sqrt{-\frac{2 \ln v}{\lambda}}.$$

Тогда копула (см. рис. 4) примет вид

$$\begin{aligned} C_\infty(u, v) &= uv \cdot (\max\{u, v\})^{\left(\frac{1}{3} \sqrt{-2 \ln(\max(u, v))} - \sqrt{-2 \ln(\min(u, v))} \right) / \sqrt{\lambda}}, \\ C_\infty(u, u) &= u^2 u^{-\frac{2}{3}} \sqrt{-\frac{2 \ln u}{\lambda}}, \end{aligned}$$

а коэффициент Бломквиста –

$$\beta_C = 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\lambda}} - 1.$$

Для примеров 1, 3 и 5 выше были построены графики копула-функций (рис. 2–4). Теперь проиллюстрируем поведение коэффициента Бломквиста (см. рис. 5) в зави-

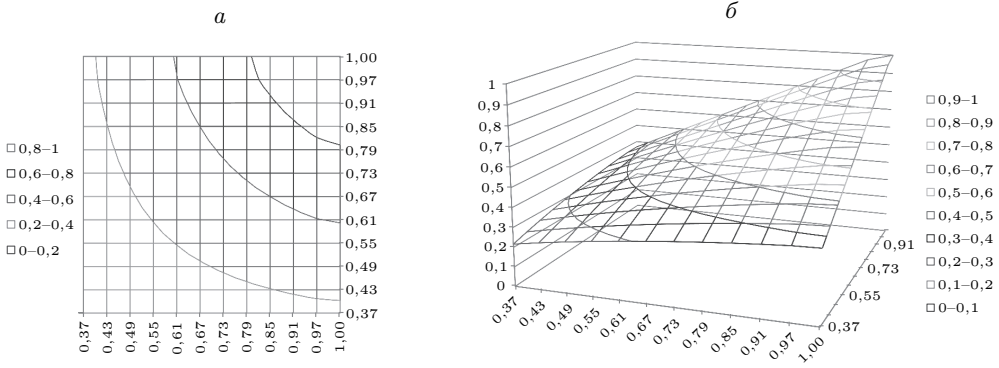


Рис. 4. Копула для случая равномерного распределения на $[0, 1]$, $\lambda = 2$: *a* – контурный график; *б* – трехмерный график

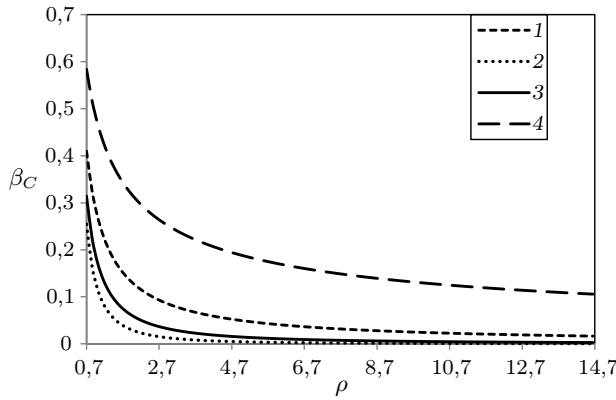


Рис. 5. Коэффициент Бломквиста: 1 – показательное распределение; 2 – распределение Парето, $\alpha = 2$; 3 – распределение Парето, $\alpha = 3$; 4 – равномерное распределение

симости от загрузки ρ для тех же распределений (чтобы учесть различия в средних временах обслуживания).

Формулы зависимости коэффициента Бломквиста от загрузки имеют вид: для показательного распределения

$$\beta_C = 2^{\ln 2 / 2\rho} - 1,$$

для распределения Парето с $\alpha = 2$

$$\beta_C = 2^{\ln^2 2 / 3\rho^2} - 1,$$

для распределения Парето с $\alpha = 3$,

$$\beta_C = 2^{(\ln^2 2 / 5\rho)\sqrt{\ln 2 / \rho}} - 1,$$

для равномерного распределения

$$\beta_C = 2^{(2/3)\sqrt{\ln 2 / \rho}} - 1.$$

Пример 6. В общем случае для распределения Парето, когда параметр $\alpha > 1$, т.е.

$$B_1(x) = 1 - (x + 1)^{-\alpha}, \quad B_2(y) = 1 - (y + 1)^{-\alpha}, \quad x \geq 0,$$

имеем

$$G_\infty(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{2}{(\alpha - 1)(x + 1)^{\alpha - 1}} - \frac{1}{(2\alpha - 1)(x + 1)^{2\alpha - 1}} \right) \right\}, \quad x \geq 0,$$

частная функция распределения равна

$$G_{1, \infty}(x) = \exp \left\{ -\frac{\lambda}{(\alpha - 1)(x + 1)^{\alpha - 1}} \right\},$$

а функция, обратная частной функции распределения, имеет вид

$$G_{1, \infty}^{-1}(u) = \left(-\frac{\lambda}{(\alpha - 1) \ln u} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}} - 1,$$

следовательно, копула при $u = v$ будет определяться выражением

$$C_\infty(u, u) = u^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2\alpha - 1} \left(-\frac{(\alpha - 1) \ln u}{\lambda} \right)^{\frac{2\alpha - 1}{\alpha - 1}} \right\} = u^2 u^{\frac{(\alpha - 1)^2 \ln u}{\lambda(2\alpha - 1)}} \left(-\frac{(\alpha - 1) \ln u}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}},$$

а коэффициент Бломквиста –

$$\beta_C = \exp \left\{ \frac{(\alpha - 1) \ln 2}{(2\alpha - 1)} \left(\frac{\lambda}{(\alpha - 1) \ln 2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha - 1}} \right\} - 1 = 2^{\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}} \left(\frac{\lambda}{(\alpha - 1) \ln 2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha - 1}} - 1.$$

Пример 7. Если предположить, что времена обслуживания на приборах каждого из блоков имеют распределение вида

$$B_1(x) = 1 - (1 - x)^\alpha, \quad B_2(y) = 1 - (1 - y)^\alpha, \quad x, y \in [0, 1], \quad \alpha > 0,$$

то тогда

$$G_\infty(x, x) = \exp \left\{ -\lambda \left(\frac{2(1 - x)^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} - \frac{(1 - x)^{2\alpha + 1}}{2\alpha + 1} \right) \right\},$$

а частная функция распределения

$$G_{1, \infty}(x) = \exp \left\{ -\lambda \frac{(1 - x)^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} \right\},$$

следовательно, копула для случая $u = v$ будет равна

$$C_\infty(u, u) = u^2 \exp \left\{ \frac{\lambda}{2\alpha + 1} \left(-\frac{(\alpha + 1) \ln u}{\lambda} \right)^{\frac{2\alpha + 1}{\alpha + 1}} \right\} = u^2 u^{\frac{(\alpha + 1)^2 \ln u}{\lambda(2\alpha + 1)}} \left(-\frac{(\alpha + 1) \ln u}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\alpha + 1}},$$

а коэффициент Бломквиста –

$$\beta_C = \exp \left\{ \frac{(\alpha + 1) \ln 2}{2\alpha + 1} \left(\frac{\lambda}{(\alpha + 1) \ln 2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha + 1}} \right\} - 1 = 2^{\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1}} \left(\frac{\lambda}{(\alpha + 1) \ln 2} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha + 1}} - 1.$$

Теперь сформулируем предельную теорему общего характера в условиях большой загрузки.

Теорема 2. Пусть функции $F_{i,T}$ из (2) принадлежат области притяжения максимум-устойчивых распределений H_i , т.е. существуют нормирующие константы $a_i(s) > 0$ и $b_i(s)$, $s > 0$, $i = 1, 2$, такие что

$$F_{1,T}^s(a_1(s)x + b_1(s)) \rightarrow H_1(x), \quad F_{2,T}^s(a_2(s)x + b_2(s)) \rightarrow H_2(y), \quad s \rightarrow \infty,$$

тогда

$$G_T(a_1(\lambda)x + b_1(\lambda), a_2(\lambda)y + b_2(\lambda)) \rightarrow H_1^{\mu_{1,T}}(x)H_2^{\mu_{2,T}}(y), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом, максимальные остаточные времена обслуживания в блоках оказываются асимптотически независимы при высокой нагрузке.

Далее рассмотрим случай бесконечного среднего времени обслуживания (при степенных хвостах). Такие случаи рассматривались в [24, 25].

Теорема 3. Пусть

$$\bar{B}_1(x) \sim c_1 x^{-\alpha_1}, \quad \bar{B}_2(y) \sim c_2 y^{-\alpha_2}, \quad x, y \rightarrow \infty, \quad c_1, c_2 > 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1],$$

тогда при $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ справедливо, что

$$G_T(T^{1/\alpha_1}x, T^{1/\alpha_2}y) \rightarrow \exp\{-c_1 \lambda x^{-\alpha_1}\} \exp\{-c_2 \lambda y^{-\alpha_2}\}, \quad x, y > 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

а при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

$$G_T(Tx, Ty) \rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^{c_1 \lambda} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{c_2 \lambda}, \quad x, y > 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Таким образом, нормированные максимальные остаточные времена обслуживания в блоках оказываются асимптотически независимы.

§ 3. Случай интенсивности, заданной функцией от времени

Теперь рассмотрим случай, когда интенсивность входящего потока задана ограниченной неотрицательной функцией $\lambda(t)$, $t \leq 0$, т.е. имеет место нестационарный пуассоновский поток. Тогда будет справедлива

Теорема 4. Пусть $\lambda = \lambda(t)$, $0 < T < \infty$, тогда

$$G_T(x, y) = \exp\left\{-\int_0^T \lambda(t)(1 - B_1(T - t + x)B_2(T - t + y)) dt\right\}.$$

Пример 8. Если времена обслуживания имеют показательное распределение (4), то

$$G_T(x, y) = \exp\left\{-A_1(T)e^{-\beta_1 x} - A_2(T)e^{-\beta_2 y} + A_3(T)e^{-\beta_1 x - \beta_2 y}\right\}, \quad x, y \geq 0,$$

где

$$A_1(T) = \int_0^T \lambda(T-t)e^{-\beta_1 t} dt, \quad A_2(T) = \int_0^T \lambda(T-t)e^{-\beta_2 t} dt,$$

$$A_3(T) = \int_0^T \lambda(T-t)e^{-(\beta_1 + \beta_2)t} dt.$$

§ 4. Случай интенсивности, заданной случайным процессом

Далее проанализируем ситуацию, когда интенсивность входящего потока задана случайным процессом $\lambda(t)$, $t \leq 0$, т.е. имеет место дважды стохастический пуассоновский поток. Тогда будет верна

Теорема 5. Пусть $\lambda = \lambda(t)$, $0 < T < \infty$, тогда справедливо

$$G_T(x, y) = \mathbf{E} \exp \left\{ - \int_0^T \lambda(t) (1 - B_1(T - t + x) B_2(T - t + y)) dt \right\}.$$

Эта теорема следует из теоремы 4, если провести усреднение по всем возможным траекториям процесса $\lambda(t)$.

Допустим, что интенсивность имеет вид

$$\lambda(t) = \max\{\gamma(t), 0\}, \quad \gamma(t) = \lambda_0 + \sigma \xi(t), \quad \lambda_0, \sigma > 0,$$

где $\xi(t)$, $t \geq 0$, – стационарный гауссовский процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $R(t)$, $t \geq 0$; $R(0) = 1$, тогда будет выполняться

Следствие. При сделанных предположениях справедливо неравенство

$$G_T(x, y) \leq \exp \left\{ -\lambda_0 \int_0^T (1 - B_1(t + x) B_2(t + y)) dt + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u - v) (1 - B_1(u + x) B_2(u + y)) (1 - B_1(v + x) B_2(v + y)) du dv \right\}.$$

В этой связи отметим, что точное описание интенсивности гауссовским процессом невозможно, поскольку тогда интенсивность должна принимать иногда отрицательные значения. Однако вероятность таких значений и их вклад в результат при $\sigma \ll \lambda_0$ будут очень малы, а значит, G_T должна быть близка к указанной верхней границе (оценку погрешности в одномерном случае см. в [22]).

Пример 9. Пусть времена обслуживания имеют показательное распределение (4), тогда

$$G_T(x, y) \leq \exp \left\{ -A_1(T) e^{-\beta_1 x} - A_2(T) e^{-\beta_2 y} + A_3(T) e^{-\beta_1 x - \beta_2 y} + D_1(T) e^{-2\beta_1 x} + D_2(T) e^{-2\beta_2 y} + D_3(T) e^{-\beta_1 x - \beta_2 y} - D_4(T) e^{-2\beta_1 x - \beta_2 y} - D_5(T) e^{-\beta_1 x - 2\beta_2 y} + D_6(T) e^{-2\beta_1 x - 2\beta_2 y} \right\}, \quad x, y \geq 0,$$

где

$$A_1(T) = \frac{\lambda_0}{\beta_1} (1 - e^{-\beta_1 T}), \quad A_2(T) = \frac{\lambda_0}{\beta_2} (1 - e^{-\beta_2 T}),$$

$$A_3(T) = \frac{\lambda_0}{\beta_1 + \beta_2} (1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2) T}),$$

$$D_1(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u - v) e^{-\beta_1(u+v)} du dv,$$

$$D_2(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) e^{-\beta_2(u+v)} du dv,$$

$$D_3(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) (e^{-(\beta_1 u + \beta_2 v)} + e^{-(\beta_2 u + \beta_1 v)}) du dv,$$

$$D_4(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) (e^{-(\beta_1 u + (\beta_1 + \beta_2) v)} + e^{-((\beta_1 + \beta_2) u + \beta_1 v)}) du dv,$$

$$D_5(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) (e^{-(\beta_2 u + (\beta_1 + \beta_2) v)} + e^{-((\beta_1 + \beta_2) u + \beta_2 v)}) du dv,$$

$$D_6(T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \int_0^T R(u-v) (e^{-(\beta_1 + \beta_2)(u+v)}) du dv.$$

Далее, пусть, например, $R(t) = e^{-\delta|t|}$, $\delta > 0$, тогда

$$D_1(\infty) = \frac{\sigma^2}{2\beta_1(\delta + \beta_1)}, \quad D_2(\infty) = \frac{\sigma^2}{2\beta_2(\delta + \beta_2)},$$

$$D_3(\infty) = \sigma^2 \frac{\beta_1 + \beta_2 + 2\delta}{(\delta + \beta_1)(\delta + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)},$$

$$D_4(\infty) = \sigma^2 \frac{2\beta_1 + \beta_2 + 2\delta}{(\delta + \beta_1)(\delta + \beta_1 + \beta_2)(2\beta_1 + \beta_2)},$$

$$D_5(\infty) = \sigma^2 \frac{\beta_1 + 2\beta_2 + 2\delta}{(\delta + \beta_2)(\delta + \beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + 2\beta_2)},$$

$$D_6(\infty) = \frac{\sigma^2}{2(\delta + \beta_1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}.$$

§ 5. Заключение

В статье изучены максимальные остаточные времена обслуживания в бесконечнолинейных системах типа $M^{(2)}|G_2|\infty$, понимаемые как максимумы остаточных времен обслуживания по всем занятым приборам в двух блоках на данный момент времени или в стационарном режиме. С практической точки зрения это время, необходимое для корректного завершения работы каждой подсистемы после отключения входящего потока заявок. Рассмотрены случаи интенсивности входящего потока: 1) не зависящей от времени, 2) заданной функцией от времени, 3) заданной случайным процессом. В последнем случае конкретные результаты получены для стационарного гауссовского процесса. В качестве примеров распределений времен обслуживания рассмотрены показательное, гиперэкспоненциальное, Парето и равномерное. При этом найдены копула-функции и коэффициенты Бломквиста. Доказана асимптотическая независимость максимальных остаточных времен обслуживания при высокой загрузке, а также в случае бесконечного среднего времени обслуживания.

Наиболее интересным среди полученных результатов представляется явление зависимости между распределением времени обслуживания и скоростью убывания коэффициента Бломквиста с ростом интенсивности входного потока (или загрузки с учетом среднего времени обслуживания). В рассмотренных примерах эта скорость

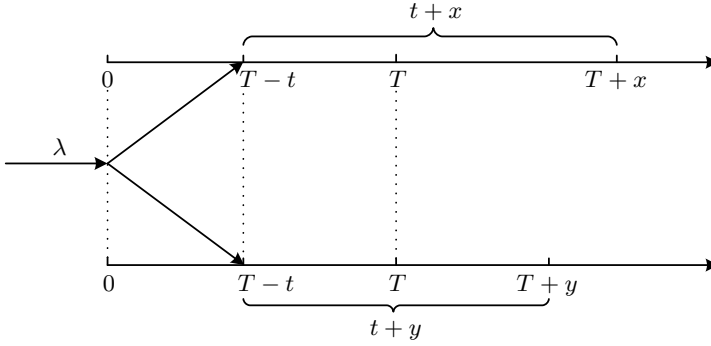


Рис. 6. Временная схема

оказалась имеющей степенной характер, т.е. $\beta_C = O(\lambda^{-s})$, $s \rightarrow \infty$, где s принимало любые значения на $(0, +\infty)$.

Для семейства распределений Парето $B(x) = 1 - (x+1)^{-\alpha}$, $x \geq 0$, $\alpha > 1$, получаем $s = \alpha/(\alpha - 1)$, так что чем тяжелее хвост, тем больше скорость убывания. Имеем $s \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 1$ и $s \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. Далее, для показательного распределения (хвост которого легче всех Парето), $s = 1$.

Для семейства распределений $B(x) = 1 - (1 - x)^\alpha$, $x \in [0, 1]$, $\alpha > 0$, получаем $s = \alpha/(\alpha + 1)$, так что чем ближе время обслуживания к постоянному (единице при $\alpha \rightarrow 0$), тем медленнее происходит убывание ($s \rightarrow 0$). Для равномерного распределения, как частного случая ($\alpha = 1$), получаем $s = 1/2$. Верно также $s \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow +\infty$.

В принципе, чего-то подобного можно было ожидать. Зависимость между максимальными остаточными временами в блоках порождается синхронным поступлением туда подзаявок. Так, при постоянном времени обслуживания возникает совершенная зависимость (идентичность). Напротив, различия в состояниях блоков порождаются разнообразием во временах обслуживания подзаявок. Чем это разнообразие больше (например, в смысле тяжести хвоста), тем меньше должна быть зависимость. Наконец, при бесконечном среднем времени обслуживания (теорема 3) для этого даже высокая загрузка не нужна.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Будем использовать свойство стационарного пуассоновского потока: при известном числе k заявок, поступивших на отрезке $[0, T]$, моменты их поступления (без учета порядка) независимы и равномерно распределены на этом отрезке. Пусть заявка поступила в момент времени $(T - t)$. В нашем случае в систему фактически поступают две заявки одновременно, т.е. по одной заявке в каждую из подсистем, где они немедленно начинают обслуживаться, и обслуживаются независимо. Вероятность того, что пара таких заявок на момент T будет обслужена до нужных моментов, т.е. первая – до момента $(T + x)$, а вторая – до момента $(T + y)$, будет равна $B_1(t + x)B_2(t + y)$ (см. рис. 6).

Следовательно, совместное распределение максимальных остаточных времен обслуживания по двум подсистемам можно найти следующим образом:

$$G_T(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T B_1(t + x) B_2(t + y) dt \right)^k =$$

$$= \exp \left\{ -\lambda \int_0^T (1 - B_1(t+x)B_2(t+y)) dt \right\}.$$

Распределение G_∞ в стационарном режиме (если оно существует) получается предельным переходом при $T \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 2 в [22] следует, что

$$G_{1,T}(a_1(\lambda)x + b_1(\lambda)) \rightarrow H_1^{\mu_{1,T}}(x), \quad G_{2,T}(a_2(\lambda)y + b_2(\lambda)) \rightarrow H_2^{\mu_{2,T}}(y), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

в силу того, что

$$\bar{F}_{1,T}(a_1(\lambda)x + b_1(\lambda)) \sim -\frac{\ln H_1(x)}{\lambda}, \quad \bar{F}_{2,T}(a_2(\lambda)y + b_2(\lambda)) \sim -\frac{\ln H_2(y)}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $x^* = \sup\{x : B_1(x) < 1\}$, $y^* = \sup\{y : B_2(y) < 1\}$ крайние правые точки распределений B_1 и B_2 (возможно, равные $+\infty$), тогда $a_1(\lambda)x + b_1(\lambda) \rightarrow x^*$, $a_2(\lambda)y + b_2(\lambda) \rightarrow y^*$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим множитель $D_T(x, y)$. При $x \rightarrow x^*$, $y \rightarrow y^*$ верно

$$\int_0^T \bar{B}_1(t+x)\bar{B}_2(t+y) dt = o\left(\int_0^T \bar{B}_1(t+x) dt\right)$$

в силу того, что

$$\int_0^T \bar{B}_1(t+x)\bar{B}_2(t+y) dt \leq \bar{B}_2(y) \int_0^T \bar{B}_1(t+x) dt.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} D_T(a_1(\lambda)x + b_1(\lambda), a_2(\lambda)y + b_2(\lambda)) &\rightarrow \exp \left\{ \lambda \cdot o\left(\int_0^T \bar{B}_1(t + a_1(\lambda)x + b_1(\lambda)) dt\right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \lambda \cdot o\left(\frac{-\ln G_{1,T}(a_1(\lambda)x + b_1(\lambda))}{\lambda}\right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \lambda \cdot o\left(\frac{-\mu_{1,T} \ln H_1(x)}{\lambda}\right) \right\} \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3. Сперва рассмотрим случай $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$. Из теоремы 3 в [22] следует, что

$$\begin{aligned} G_{1,T}(T^{1/\alpha_1}x) &\rightarrow \exp\{-c_1\lambda x^{-\alpha_1}\}, \\ G_{2,T}(T^{1/\alpha_2}y) &\rightarrow \exp\{-c_2\lambda y^{-\alpha_2}\}, \end{aligned} \quad x, y > 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Поскольку $G_T(x, y) = D_T(x, y)G_{1,T}(x)G_{2,T}(y)$, остается рассмотреть только выражение

$$\int_0^T \bar{B}_1(t + T^{1/\alpha_1}x)\bar{B}_2(t + T^{1/\alpha_2}y) dt \sim c_1c_2 \int_0^T (t + T^{1/\alpha_1}x)^{-\alpha_1}(t + T^{1/\alpha_2}y)^{-\alpha_2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_1 c_2}{x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} T^2} \int_0^T \left(1 + \frac{t}{T^{1/\alpha_1} x}\right)^{-\alpha_1} \left(1 + \frac{t}{T^{1/\alpha_2} y}\right)^{-\alpha_2} dt \sim \\
&\sim \frac{c_1 c_2}{x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} T^2} \int_0^T \left(1 - \frac{\alpha_1 t}{T^{1/\alpha_1} x}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2 t}{T^{1/\alpha_2} y}\right) dt = \\
&= \frac{c_1 c_2}{x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} T^2} \left(T - \frac{\alpha_1 T}{2T^{1/\alpha_1} x} - \frac{\alpha_2 T}{2T^{1/\alpha_2} y} + \frac{\alpha_1 \alpha_2 T^3}{3T^{1/\alpha_1} T^{1/\alpha_2} xy}\right) = \\
&= \frac{c_1 c_2}{x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}} \left(\frac{1}{T} - \frac{\alpha_1}{2T^{1/\alpha_1} x} - \frac{\alpha_2}{2T^{1/\alpha_2} y} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{3T^{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 - 1} xy}\right) \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что множитель $D_T(T^{1/\alpha_1} x, T^{1/\alpha_2} y) \rightarrow 1$, $T \rightarrow \infty$.

Аналогично, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ согласно теореме 3 из [22] имеем

$$G_{1,T}(Tx) \rightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right)^{c_1 \lambda}, \quad G_{2,T}(Ty) \rightarrow \left(\frac{y}{y+1}\right)^{c_2 \lambda}, \quad x, y > 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Как и раньше, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \bar{B}_1(t+Tx) \bar{B}_2(t+Ty) dt \sim c_1 c_2 \int_0^T (t+Tx)^{-1} (t+Ty)^{-1} dt = \\
&= \frac{c_1 c_2}{T(x-y)} \int_0^T \left(\frac{1}{t+Ty} - \frac{1}{t+Tx}\right) dt = \frac{c_1 c_2}{T(x-y)} \left(\ln(t+Ty) - \ln(t+Tx)\right) \Big|_0^T = \\
&= \frac{c_1 c_2}{T(x-y)} \ln \frac{(1+y)x}{(1+x)y} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $D_T(Tx, Ty) \rightarrow 1$, $T \rightarrow \infty$, что и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 4. Будем использовать свойство нестационарного пуассоновского потока, которое заключается в том, что при известном числе k заявок, поступивших на отрезке времени $[0, T]$, моменты их поступления (без учета порядка) независимы и имеют плотность распределения $\lambda(t)/\Lambda(T)$, $t \in [0, T]$, где

$$\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(t) dt.$$

Если заявка поступила в момент времени t , то вероятность обслуживания ее первой подзаявки до момента $(T+x)$, а второй – до момента $(T+y)$ равна произведению $B_1(T-t+x)B_2(T-t+y)$. Обслуживание заявок происходит независимо, следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
G_T(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\Lambda(T))^k}{k!} e^{-\Lambda(T)} \left(\frac{1}{\Lambda(T)} \int_0^T \lambda(t) B_1(T-t+x) B_2(T-t+y) dt \right)^k = \\
&= \exp \left\{ - \int_0^T \lambda(t) (1 - B_1(T-t+x) B_2(T-t+y)) dt \right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство следствия. Введем случайную величину

$$\begin{aligned}\zeta &= -\int_0^T \gamma(t)(1 - B_1(T - t + x)B_2(T - t + y)) dt = \\ &= -\int_0^T \gamma(T - t)(1 - B_1(t + x)B_2(t + y)) dt.\end{aligned}\quad (6)$$

Эта случайная величина будет иметь нормальное распределение с параметрами

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \zeta &= -\lambda_0 \int_0^T (1 - B_1(t + x)B_2(t + y)) dt, \\ \mathbf{D} \zeta &= \sigma^2 \int_0^T \int_0^T R(u - v)(1 - B_1(u + x)B_2(u + y))(1 - B_1(v + x)B_2(v + y)) du dv.\end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись формулой для математического ожидания экспоненты от нормальной случайной величины, получаем, что

$$\mathbf{E} e^\zeta = \exp\left\{\mathbf{E} \zeta + \frac{1}{2} \mathbf{D} \zeta\right\}.$$

Поскольку интенсивность входящего потока не может принимать отрицательных значений, рассмотрим случайную величину ζ_1 , которая получается из выражения (6) заменой $\gamma(t)$ на $\lambda(t) = \max\{\gamma(t), 0\}$. Из того, что $\zeta_1 \leq \zeta$, следует $G_T(x, y) = \mathbf{E} e^{\zeta_1} \leq \mathbf{E} e^\zeta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrews G.R.* Foundations of Multithreaded, Parallel, and Distributed Programming. Reading, MA: Addison-Wesley, 1999.
2. *Топорков В.В.* Модели распределенных вычислений. М.: Физматлит, 2004.
3. *Alkasetm A., Liu H.* A Survey of Fault-Tolerance in Cloud Computing: Concepts and Practice // Res. J. Appl. Sci. Eng. Tech. 2015. V. 11. № 12. P. 1365–1377.
4. *Kumari P., Kaur P.* A Survey of Fault Tolerance in Cloud Computing // J. King Saud Univ., Comp. & Info. Sci. (in press, corrected proof, 2018). Available online at <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2018.09.021>.
5. *Riordan J.* Telephone Traffic Time Averages // Bell Syst. Tech. J. 2018. V. 30. № 4. P. 1129–1144.
6. *Афнасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. М.: Изд-во МГУ, 1980.
7. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
8. *Лебедев А.В.* Асимптотика максимумов в бесконечнолинейной системе с ограниченным размером групп // Фундамент. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 4. С. 1107–1115.
9. *Лебедев А.В.* Экстремумы некоторых процессов массового обслуживания: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 1997.
10. *Лебедев А.В.* Максимумы в системе $M^{[X]}|G|_\infty$ с “тяжелыми хвостами” размеров групп // Автомат. и телемех. 2000. № 12. С. 115–121.
11. *Nelson R., Tantawi A.N.* Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues // IEEE Trans. Comput. 1988. V. 37. № 6. P. 739–743.
12. *Thomasian A.* Analysis of Fork-Join and Related Queueing Systems // ACM Comput. Surv. 2014. V. 47. № 2. Article no. 17 (71 pp.).

13. Горбунова А.В., Зарядов И.С., Матюшенко С.И., Самуйлов К.Е., Шоргин С.Я. Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений // Информ. и ее примен. 2015. Т. 9. № 3. С. 32–38.
14. Жидкова Л.А., Моисеева С.П. Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 49–54.
15. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автотметрия. 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.
16. Ивановская И.А., Моисеева С.П. Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // Изв. Том. политехнич. ун-та. 2010. Т. 317. № 5. С. 32–34.
17. Сняжкова И.А. Математические модели и методы исследования систем параллельного обслуживания двояных заявок случайных потоков: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Томск: Томский гос. ун-т, 2013.
18. Горбунова А.В., Зарядов И.С., Самуйлов К.Е., Сопин Э.С. Обзор систем параллельной обработки заявок // Вестн. РУДН. Сер. мат., инф., физ. 2017. Т. 25. № 4. С. 350–362.
19. Горбунова А.В., Зарядов И.С., Самуйлов К.Е. Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II // Вестн. РУДН. Сер. мат., инф., физ. 2018. Т. 26. № 1. С. 13–27.
20. Глухова Е.В., Орлов А.Б. Средняя длительность периода занятости бесконечно линейной системы массового обслуживания с дважды стохастическим входящим потоком // Изв. вузов. Физика. 2003. № 3. С. 62–68.
21. Орлов А.Б. Плотность вероятностей максимального остаточного времени обслуживания на занятых приборах // Вычисл. технол. 2008. Т. 13. Спец. вып. 5: Избр. докл. VI Междунар. научн.-практ. конф. "Информационные технологии и математическое моделирование". Анжеро-Судженск, Россия. 9–10 ноября, 2007. С. 93–98.
22. Лебедев А.В. Максимальное остаточное время обслуживания в бесконечнолинейных системах // Пробл. передачи информ. 2018. Т. 54. № 2. С. 86–102.
23. Nelsen R.B. An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006.
24. Чернавская Е.А. Предельные теоремы для системы массового обслуживания с бесконечным числом приборов // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 4. С. 590–605.
25. Чернавская Е.А. Предельные теоремы для бесконечноканальных систем с тяжелыми хвостами распределений времен обслуживания: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.05. М.: МГУ, 2017.

Горбунова Анастасия Владимировна
 Институт проблем управления
 им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
 avgorbunova@list.ru

Лебедев Алексей Викторович
 Московский государственный университет
 им. М.В. Ломоносова, механико-математический
 факультет, кафедра теории вероятностей
 avlebed@yandex.ru

Поступила в редакцию
 15.11.2019
 После доработки
 15.01.2020
 Принята к публикации
 28.01.2020