ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 | 2020 | Вып. 3

УДК 621.391.1 : 519.17

 С. Ван, В. Чжан

ИССЛЕДОВАНИЕ ДРОБНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПОКРЫТЫХ ГРАФОВ

Граф G называется дробным (g, f)-покрытым, если для любого $e \in E(G)$ граф G допускает дробный (g, f)-фактор, покрывающий e. Граф G называется дробным (g, f, n)-предельным покрытым графом, если для любого $S \subseteq V(G)$, такого что $|S| = n$, граф $G - S$ является (g, f)-покрытым графом. Скажем, что дробный (g, f, n)-предельный покрытый граф является дробным (a, b, n)-предельным покрытым графом, если $g(x) = a$ и $f(x) = b$ для любого $x \in V(G)$. Дробные (a, b, n)-предельные покрытые графы были впервые введены и исследованы в работе [1]. В настоящей статье мы исследуем (g, f, n)-предельные покрытые графы и приводим условие их существования в терминах связующего числа. Таким образом, мы улучшили и обобщили предыдущие результаты, полученные в работе [2].

Ключевые слова: граф, связующее число, дробный (g, f)-фактор, дробный (g, f)-покрытый граф, дробный (g, f, n)-предельный покрытый граф.

DOI: 10.31857/S0555292320030043

§ 1. Введение

Многие реальные сети могут быть естественно смоделированы с помощью графов. Вершины графа в этом случае обозначают узлы сети, а ребра графа служат связями между узлами. Можно привести следующие примеры: коммуникационная сеть с вершинами, обозначающими города, и ребрами, обозначающими каналы коммуникации; социальная сеть, в которой вершины представляют собой людей, а ребра соответствуют личному контакту между ними; сеть Интернет с вершинами, являющимися веб-страницами, и ребрами, моделирующими гиперссылки между ними. Далее мы будем использовать термин “граф” вместо “сеть”. Наука о сетях (также известная как анализ сложных сетей) представляет собой развивающуюся область в парадигме больших данных и соответствует анализу сложных реальных и основанных на теоретических моделях сетей с точки зрения теории графов.

Задача отыскания дробного фактора может рассматриваться как более слабая версия хорошо известной задачи о сопоставлении мощностей и применяться в близких областях, таких как проектирование сетей, планирование и комбинаторика многогранников. Например, допустим, что несколько больших пакетов данных могут быть отправлены различным адресатам несколькими каналами в сети связи. Эффективность данной сети можно повысить, если разделить большие пакеты данных на маленькие части. Возможное переназначение пакетов данных можно рассматривать как задачу дробления потока, и оно становится задачей о дробном факторе, когда множества пунктов назначения и отправки в сети не пересекаются (см. [3]).

В модели теории графов удаляются вершины графа, соответствующие поврежденным участкам сети. Ребра оставшегося графа соответствуют связям в получившейся сети. В настоящей статье мы пытаемся найти дробный фактор с помощью специальных ребер в результирующем графе. Очевидно, что задача передачи данных в коммуникационной сети в заданный момент может быть сведена к задаче о существовании дробного предельного покрытого подграфа в соответствующем графе сети. Условие на связующее число графа часто используется для оценки уязвимости и надежности сети, которые играют ключевую роль в передаче данных и проектировании сетей.

В этой статье мы будем рассматривать только конечные простые графы. Пусть G – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Для вершины x из G обозначим через $d_G(x)$ степень вершины x в G, а через $N_G(x)$ – окрестность x в G. Рассмотрим также окрестность множества вершин. Для множества вершин $S \subseteq V(G)$ определим $N_G(S)$ как $N_G(S) = \bigcup_{x\in S} N_G(x)$. Кроме того, зададим $G[S]$ как подграф G, индуцированный S, и будем обозначать граф $G[V(G) \setminus S]$ через $G - S$. Множество вершин S графа G является независимым, если никакие две вершины из S не смежны. Обозначим минимальную степень в графе G через $\delta(G)$. Связующее число $\operatorname{bind}(G)$ определим как минимум отношения $\dfrac{|N_G(S)|}{|S|}$, взятый по всем $S \subseteq V(G)$, удовлетворяющим условиям $S \neq \varnothing$ и $N_G(S) \neq V(G)$.

Пусть $g, f\colon V(G) \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – функции, удовлетворяющие неравенству $g(x) \leqslant f(x)$ для любого $x \in V(G)$. Остовный подграф F графа G называется (g, f)-фактором, если неравенство $g(x) \leqslant d_F(x) \leqslant f(x)$ выполняется для всех $x \in V(G)$. Пусть h – функция, определенная на $E(G)$ и удовлетворяющая условию $h(e) \in [0, 1]$ для всякого $e \in E(G)$. Мы будем называть h дробной (g, f)-индикаторной функцией, если для любого $x \in V(G)$ верно, что $g(x) \leqslant d^h_G(x) \leqslant f(x)$, где

$$d^h_G(x) = \sum_{e\in E(x)} h(e)$$

– дробная степень x в G, где $E(x) = \{e :\ e = xy \in E(G)\}$. Положим

$$E_h = \{e \in E(G) :\ h(e) > 0\}.$$

Если G_h – остовный подграф G с $E(G_h) = E_h$, то назовем G_h дробным (g, f)-фактором G с индикаторной функцией h. Если $h(e) \in \{0, 1\}$ для любого $e \in E(G)$, то дробный (g, f)-фактор является просто (g, f)-фактором. Граф G называется дробным (g, f)-покрытым графом, если для любого $e \in E(G)$ граф G допускает такой дробный (g, f)-фактор G_h, что $h(e) = 1$. Если $g(x) = f(x) = r$ для любого $x \in V(G)$, то дробный (g, f)-покрытый граф назовем дробным r-покрытым графом. Будем говорить, что G – дробный (g, f, n)-предельный покрытый граф, если для любого $S \subseteq V(G)$, такого что $|S| = n$, граф $G - S$ является (g, f)-покрытым. Дробный (g, f, n)-предельный покрытый граф назовем (a, b, n)-предельным покрытым графом, если $g(x) = a$ и $f(x) = b$ для всякого $x \in V(G)$. Дробный (r, r, n)-предельный покрытый граф называется просто дробным (r, n)-предельным покрытым графом.

Напомним, что k-факторы были введены в 1950 г. в работе [4] и впоследствии были исследованы в работах [5–9]. Обобщение данной задачи, (g, f)-факторы, были введены в работе [10] в 1970 г., а в работах [11–16] были даны достаточные (необходимые) условия их существования в терминах степеней, окрестностей, числа стабильности, связующего числа и т.д. В 1988 г. в работе [17] было впервые введено понятие (g, f)-покрытых графов и получена их характеризация. Дробные (g, f)-факторы были введены в работе [18] в 1985 г. и изучались в работах [19–25]. В 2002 г. в работе [26] были впервые исследованы (g, f)-покрытые графы. Наконец, определение дробных (a, b, n)-предельных покрытых графов было дано в 2019 г. [1], а в [1,27,28] были получены достаточные условия существования данных графов, выраженные в терминах степеней вершин, чисел независимости и связности. Некоторые другие результаты о факторах и дробных факторах в графах представлены в работах [29–33]. В настоящей статье мы изучаем дробные (g,f,n)-предельные покрытые графы и даем условие существования дробных (g,f,n)-предельных покрытых графов, выраженное в терминах связующего числа. Этот результат представляет следующая

Теорема 1. *Рассмотрим целые числа a, b, μ, n, такие что $\mu \geqslant 0$, $n \geqslant 0$, $a \geqslant 1$, $a+\mu \geqslant 2$ и $b-\mu \geqslant \max\{a, 2\}$. Пусть G – граф порядка p, такой что*

$$p \geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a+\mu} + \frac{(a+\mu)n}{a+\mu-1}.$$

Кроме того, пусть $g, f\colon V(G) \to \{0,1,2,3,\ldots\}$ – функции, удовлетворяющие условию $a \leqslant g(x) \leqslant f(x)-\mu \leqslant b-\mu$ для всякого $x \in V(G)$. Если

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b},$$

то G является дробным (g,f,n)-предельным покрытым графом.

При $p \to +\infty$ можно доказать, что

$$\frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b} \to \frac{a+b-1}{a+\mu}$$

и

$$\frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b} < \frac{a+b}{a+\mu},$$

где n – неотрицательное конечное число. В этом случае из теоремы 1 следует, что G является дробным (g,f,n)-предельным покрытым графом, если только

$$\operatorname{bind}(G) \geqslant \frac{a+b}{a+\mu}.$$

Если $n = \dfrac{p}{2}$, то из теоремы 1 вытекает, что G – дробный (g,f,n)-предельный покрытый граф при условии

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{2(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)p-2(a+b)}.$$

В этом случае при $p \to +\infty$

$$\frac{2(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)p-2(a+b)} \to \frac{2(a+b-1)}{a+\mu}$$

и выполняется неравенство

$$\frac{2(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)p-2(a+b)} < \frac{2a+2b-1}{a+\mu}.$$

Тогда из теоремы 1 следует, что G является дробным (g,f,n)-предельным покрытым графом, если

$$\operatorname{bind}(G) \geqslant \frac{2a+2b-1}{a+\mu}.$$

Положим $\mu = 0$ в теореме 1. Тогда мы получим следующее следствие о (g,f,n)-предельных покрытых графах.

Следствие 1. *Рассмотрим целые числа a, b, n, такие что $n \geqslant 0$ и $b \geqslant a \geqslant 2$, и граф G порядка p, такой что*

$$p \geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a} + \frac{an}{a-1}.$$

Пусть $g, f\colon V(G) \to \{0,1,2,3,\ldots\}$ – функции, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant b$ для любого $x \in V(G)$. Если

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(p-1)}{a(p-n)-a-b},$$

то G – дробный (g, f, n)-предельный покрытый граф.

Пусть $g(x) = f(x)$ для любого $x \in V(G)$ в теореме 1. Тогда можно вывести следующее следствие относительно (f, n)-предельного покрытого графа.

Следствие 2. *Рассмотрим целые числа a, b, n, такие что $n \geqslant 0$ и $b \geqslant a \geqslant 2$, и граф G порядка p, такой что*

$$p \geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a} + \frac{an}{a-1}.$$

Пусть $f\colon V(G) \to \{0,1,2,3,\ldots\}$ – функция, удовлетворяющая условию $a \leqslant f(x) \leqslant b$ для всякого $x \in V(G)$. Если

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(p-1)}{a(p-n)-a-b},$$

то G – дробный (f, n)-предельный покрытый граф.

Положим $a = b = r$ и $n = 0$ в теореме 1. Тогда $f(x) = r$ для любого $x \in V(G)$. Мы получаем следующее следствие о дробных r-покрытых графах.

Следствие 3. *Рассмотрим целое число r, такое что $r \geqslant 2$, и граф G порядка p, такой что $p \geqslant 4r - 6 + \frac{3}{r}$. Если*

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(2r-1)(p-1)}{rp-2r},$$

то G – дробный r-покрытый граф.

Из следствия 3 мы сразу получаем следующую теорему, которая была доказана Юанем и Хао в [2]. Следовательно, основной результат данной статьи является улучшением и расширением предыдущего результата Юаня и Хао.

Теорема 2 [2]. *Пусть $r \geqslant 2$ – целое число, а G – граф порядка p, такой что $p \geqslant 4r + 2$. Предположим, что $\delta(G) \geqslant r + 1$. Если G удовлетворяет условию*

$$\operatorname{bind}(G) > \frac{(2r-1)(p-1)}{rp-2r},$$

то G – дробный r-покрытый граф.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 в значительной степени опирается на следующую теорему, представляющую собой критерий того, что граф является дробным (g, f)-покрытым.

Теорема 3 [26]. *Рассмотрим граф G. Пусть $g, f\colon V(G) \to \{0,1,2,3,\ldots\}$ – такие функции, что $g(x) \leqslant f(x)$ для всякого $x \in V(G)$. Тогда G является дробным (g,f)-покрытым, если и только если*

$$\theta_G(X,Y) = f(X) + d_{G-X}(Y) - g(Y) \geqslant \varepsilon(X)$$

для всех $X \subseteq V(G)$ и $Y = \{x : x \in V(G) \setminus X,\ d_{G-X}(x) \leqslant g(x)\}$, где $\varepsilon(X)$ определено следующим образом:

$$\varepsilon(X) = \begin{cases} 2, & \text{если } X \text{ не является независимым множеством,} \\ 1, & \text{если } X \text{ является независимым множеством и есть ребро,} \\ & \text{соединяющее } X \text{ и } V(G)\setminus(X\cup Y), \text{ или есть ребро } e = xy, \\ & \text{соединяющее } X \text{ и } Y, \text{ и при этом } d_{G-X}(y) = g(y) \text{ для } y \in Y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Для любого $N \subseteq V(G)$, такого что $|N| = n$, мы пишем $H = G - N$. Чтобы доказать теорему 1, достаточно показать, что H – дробный (g,f)-покрытый граф. Предположим от противного, что H не является дробным (g,f)-покрытым. Тогда из теоремы 3 получаем соотношение

$$\theta_H(X,Y) = f(X) + d_{H-X}(Y) - g(Y) \leqslant \varepsilon(X) - 1 \tag{1}$$

для некоторого подмножества $X \subseteq V(H)$, где $Y = \{x : x \in V(H) \setminus X,\ d_{H-X}(x) \leqslant \leqslant g(x)\}$.

Если $Y = \varnothing$, то из (1) и условия $\varepsilon(X) \leqslant |X|$ мы получаем, что $\varepsilon(X) - 1 \geqslant \geqslant \theta_H(X,\varnothing) = f(X) \geqslant (a+\mu)|X| \geqslant |X| \geqslant \varepsilon(X)$, что приводит к противоречию. Следовательно, $Y \neq \varnothing$. Таким образом, можно определить

$$h = \min\{d_{H-X}(x) : x \in Y\}.$$

С учетом определения Y выполняется соотношение $0 \leqslant h \leqslant b - \mu$.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 1, мы отыщем противоречие, рассматривая следующие два случая.

Случай 1: $h = 0$.

Пусть $Q = \{x : x \in Y, d_{H-X}(x) = 0\}$. Ясно, что $Q \neq \varnothing$ и $N_G(V(G)\setminus(X\cup N))\cap Q = = \varnothing$, т.е. $|N_G(V(G)\setminus(X\cup N))| \leqslant p - |Q|$. С учетом определения $\mathrm{bind}(G)$ и неравенства

$$\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b}$$

получаем следующее соотношение:

$$\frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b} < \mathrm{bind}(G) \leqslant \frac{|N_G(V(G)\setminus(X\cup N))|}{|V(G)\setminus(X\cup N)|} \leqslant \frac{p-|Q|}{p-n-|X|}. \tag{2}$$

Из (2) и неравенства $p \geqslant \dfrac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a+\mu} + \dfrac{(a+\mu)n}{a+\mu-1}$ следует, что

$$\begin{aligned} &(a+b-1)(p-1)|X| > \\ &> (a+b-1)(p-1)(p-n) - ((a+\mu)(p-n)-a-b)(p-|Q|) > \\ &> (b-\mu-1)(p-1)(p-n) + p - 1 + (p-1)|Q|, \end{aligned}$$

откуда

$$|X| > \frac{(b-\mu-1)(p-n)+|Q|+1}{a+b-1}. \tag{3}$$

С другой стороны, из (1) и неравенств $\varepsilon(X) \leqslant 2$ и $|X| + |Y| + n \leqslant p$ следует цепочка соотношений

$$1 \geqslant \varepsilon(X) - 1 \geqslant \theta_H(X,Y) = f(X) + d_{H-X}(Y) - g(Y) \geqslant$$
$$\geqslant (a+\mu)|X| + |Y| - |Q| - (b-\mu)|Y| = (a+\mu)|X| - (b-\mu-1)|Y| - |Q| \geqslant$$
$$\geqslant (a+\mu)|X| - (b-\mu-1)(p-n-|X|) - |Q| =$$
$$= (a+b-1)|X| - (b-\mu-1)(p-n) - |Q|,$$

из которой вытекает неравенство

$$|X| \leqslant \frac{(b-\mu-1)(p-n)+|Q|+1}{a+b-1},$$

противоречащее (3).

Случай 2: $1 \leqslant h \leqslant b-\mu$.

Существует $x_1 \in Y$ с условием $d_{H-X}(x_1) = h$. Положим $W = (V(H) \setminus X) \setminus N_{H-X}(x_1)$. Очевидно, что $x_1 \in W$ и $x_1 \notin N_G(W)$. Следовательно, $W \neq \varnothing$ и $N_G(W) \neq V(G)$. Заметим, что $|V(H)| = |V(G)| - n = p - n$. Объединяя эти соотношения с определением $\mathrm{bind}(G)$ и неравенством $\mathrm{bind}(G) > \dfrac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b}$, получаем, что

$$\frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b} < \mathrm{bind}(G) \leqslant \frac{|N_G(W)|}{|W|} \leqslant \frac{p-1}{p-n-|X|-h},$$

откуда следует оценка

$$|X| > \frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} - h. \tag{4}$$

Согласно (4) и неравенству $|X| + |Y| + n \leqslant p$ имеем

$$\theta_H(X,Y) = f(X) + d_{H-X}(Y) - g(Y) \geqslant (a+\mu)|X| + h|Y| - (b-\mu)|Y| =$$
$$= (a+\mu)|X| - (b-\mu-h)|Y| \geqslant (a+\mu)|X| - (b-\mu-h)(p-n-|X|) =$$
$$= (a+b-h)|X| - (b-\mu-h)(p-n) >$$
$$> (a+b-h)\left(\frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} - h\right) - (b-\mu-h)(p-n),$$

т.е.

$$\theta_H(X,Y) > (a+b-h)\left(\frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} - h\right) - (b-\mu-h)(p-n). \tag{5}$$

Если $h = 1$, то из (5) и $\varepsilon(X) \leqslant 2$ получаем

$$\theta_H(X,Y) > (a+b-1)\left(\frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} - 1\right) - (b-\mu-1)(p-n) =$$
$$= 1 \geqslant \varepsilon(X) - 1,$$

что противоречит (1). Поэтому далее мы рассматриваем только $2 \leqslant h \leqslant b-\mu$.

Пусть $\varphi(h) = (a+b-h)\Big(\frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} - h\Big) - (b-\mu-h)(p-n)$. Тогда

$$\varphi'(h) = -\frac{(b-\mu-1)(p-n)+a+b}{a+b-1} + h - a - b + h + p - n =$$
$$= \frac{(a+\mu)(p-n)-a-b}{a+b-1} - a - b + 2h \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1-a-b}{a+b-1} - a - b + 2h = 2h - 3 \geqslant 1,$$

поскольку $p \geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a+\mu} + \frac{(a+\mu)n}{a+\mu-1}$ и $2 \leqslant h \leqslant b-\mu$. Отсюда следует, что $\varphi(h)$ достигает своего минимального значения при $h = 2$, т.е. $\varphi(h) \geqslant \varphi(2) = \frac{(a+\mu)(p-n)-(a+b-2)^2}{a+b-1}$. Объединяя полученное соотношение с (5), неравенствами $\varepsilon(X) \leqslant 2$ и $p \geqslant \frac{(a+b-1)(a+b-2)+1}{a+\mu} + \frac{(a+\mu)n}{a+\mu-1}$, получаем оценку

$$\theta_H(X,Y) > \varphi(h) \geqslant \varphi(2) = \frac{(a+\mu)(p-n)-(a+b-2)^2}{a+b-1} \geqslant 1 \geqslant \varepsilon(X) - 1,$$

которая противоречит (1). Таким образом, теорема 1 доказана. ▲

§ 3. Точность теоремы 1

Теперь мы покажем, что оценка $\mathrm{bind}(G) > \frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b}$ в теореме 1 наилучшая возможная. Будем обозначать $G = mR$, если граф G состоит из m ($m \geqslant 2$) непересекающихся копий графа R. Соединение графов $G = A \vee B$ задается соотношениями $V(G) = V(A) \cup V(B)$ и $E(G) = E(A) \cup E(B) \cup \{uv : u \in V(A), v \in V(B)\}$.

Пусть $b = a+\mu$, $g(x) \equiv b-\mu$ и $f(x) \equiv a+\mu$, а β – достаточно большое положительное целое число, для которого $\frac{(a+\mu)\beta-1}{2(b-\mu-1)}$ является целым. Обозначим $\gamma = \frac{(a+\mu)\beta-1}{2(b-\mu-1)}$. Построим граф $G = K_{\beta+n} \vee (\gamma K_2)$ порядка p, где K_t обозначает полный граф порядка t. Легко видеть, что

$$\mathrm{bind}(G) = \frac{|N(V(\gamma K_2) \setminus \{w\})|}{|V(\gamma K_2) \setminus \{w\}|} = \frac{p-1}{2\gamma-1} = \frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+b-1)(2\gamma-1)} =$$
$$= \frac{(a+b-1)(p-1)}{(a+\mu)(p-n)-a-b},$$

где $w \in V(\gamma K_2)$. Положим $H = G - N$ для $N \subseteq V(K_{\beta+n})$, такого что $|N| = n$. Пусть $X = V(K_{\beta+n}) \setminus N$ и $Y = V(\gamma K_2)$. Заметим, что X не является независимым множеством. Следовательно, $\varepsilon(X) = 2$. Таким образом, мы заключаем, что

$$\theta_H(X,Y) = f(X) + d_{H-X}(Y) - g(Y) = (a+\mu)|X| + \frac{(a+\mu)\beta-1}{b-\mu-1} - (b-\mu)|Y| =$$
$$= (a+\mu)\beta + \frac{(a+\mu)\beta-1}{b-\mu-1} - (b-\mu)\frac{(a+\mu)\beta-1}{b-\mu-1} = 1 < 2 = \varepsilon(X).$$

С учетом теоремы 3 граф H не является дробным (g,f)-покрытым, поэтому граф G не является дробным (g,f,n)-предельным покрытым.

Авторы благодарят рецензентов за ценные комментарии и полезные предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhou S., Xu Y., Sun Z.* Degree Conditions for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // Inform. Process. Lett. 2019. V. 152. Article 105838 (5 pp.).
2. *Yuan Y., Hao R.-X.* Neighborhood Union Conditions for Fractional $[a, b]$-Covered Graphs // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2020. V. 43. № 1. P. 157–167.
3. *Liu G., Zhang L.* Characterizations of Maximum Fractional (g, f)-Factors of Graphs // Discrete Appl. Math. 2008. V. 156. № 12. P. 2293–2299.
4. *Belck H.-B.* Reguläre Faktoren von Graphen // J. Reine Angew. Math. 1950. V. 188. P. 228–252.
5. *Enomoto H., Jackson B., Katerinis P., Satio A.* Toughness and the Existence of k-Factors // J. Graph Theory. 1957. V. 9. № 1. P. 87–95.
6. *Katerinis P., Woodall D.R.* Binding Numbers of Graphs and the Existence of k-Factors // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1987. V. 38. № 150. P. 221–228.
7. *Plummer M.D., Saito A.* Toughness, Binding Number and Restricted Matching Extension in a Graph // Discrete Math. 2017. V. 340. № 11. P. 2665–2672.
8. *Kano M., Tokushige N.* Binding Numbers and f-Factors of Graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 1992. V. 54. № 2. P. 213–221.
9. *Cymer R., Kano M.* Generalizations of Marriage Theorem for Degree Factors // Graphs Combin. 2016. V. 32. № 6. P. 2315–2322.
10. *Lovász L.* Subgraphs with Prescribed Valencies // J. Combin. Theory. 1970. V. 8. P. 391–416.
11. *Egawa Y., Kano M.* Sufficient Conditions for Graphs to Have (g, f)-Factors // Discrete Math. 1996. V. 151. № 1–3. P. 87–90.
12. *Matsuda H.* A Neighborhood Condition for Graphs to Have $[a, b]$-Factors // Discrete Math. 2000. V. 224. № 1–3. P. 289–292.
13. *Kouider M., Ouatiki S.* Sufficient Condition for the Existence of an Even $[a, b]$-Factor in Graph // Graphs Combin. 2013. V. 29. № 4. P. 1051–1057.
14. *Zhou S., Zhang T., Xu Z.* Subgraphs with Orthogonal Factorizations in Graphs // Discrete Appl. Math. 2020 (in press). Available online at `https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.12.011`.
15. *Zhou S., Sun Z.* Binding Number Conditions for $P_{\geqslant 2}$-Factor and $P_{\geqslant 3}$-Factor Uniform Graphs // Discrete Math. 2020. V. 343. № 3. Article 111715 (6 pp.).
16. *Zhou S.Z., Sun Z.R.* Some Existence Theorems on Path Factors with Given Properties in Graphs // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2020. V. 36. № 8. P. 917–928.
17. *Liu G.Z.* On (g, f)-Covered Graphs // Acta Math. Sci. (English Ed.). 1988. V. 8. № 2. P. 181–184.
18. *Anstee R.P.* An Algorithmic Proof of Tutte's f-Factor Theorem // J. Algorithms. 1985. V. 6. № 1. P. 112–131.
19. *Liu G., Zhang L.* Toughness and the Existence of Fractional k-Factors of Graphs // Discrete Math. 2008. V. 308. № 9. P. 1741–1748.
20. *Katerinis P.* Fractional ℓ-Factors in Regular Graphs // Australas. J. Combin. 2019. V. 73. Part 3. P. 432–439.
21. *Zhou S., Sun Z., Ye H.* A Toughness Condition for Fractional (k, m)-Deleted Graphs // Inform. Process. Lett. 2013. V. 113. № 8. P. 255–259.
22. *Gao W., Wang W.F., Guirao J.L.G.* The Extension Degree Conditions for Fractional Factor // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2020. V. 36. № 3. P. 305–317.
23. *Zhou S., Xu L., Xu Z.* Remarks on Fractional ID-k-Factor-Critical Graphs // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2019. V. 35. № 2. P. 458–464.
24. *Yuan Y., Hao R.-X.* Toughness Condition for the Existence of All Fractional (a, b, k)-Critical Graphs // Discrete Math. 2019. V. 342. № 8. P. 2308–2314.

25. *Lu H., Yu Q.* General Fractional f-Factor Numbers of Graphs // Appl. Math. Lett. 2011. V. 24. № 4. P. 519–523.
26. *Li Z., Yan G., Zhang X.* On Fractional (g, f)-Covered Graphs // OR Trans. (in Chinese). 2002. V. 6. № 4. P. 65–68.
27. *Zhou S., Wu J., Liu H.* Independence Number and Connectivity for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs, `arXiv:1909.01070 [math.CO]`, 2019.
28. *Lv X.* A Degree Condition for Fractional (g, f, n)-Critical Covered Graphs // AIMS Math. 2020. V. 5. № 2. P. 872–878.
29. *Zhou S.* Remarks on Orthogonal Factorizations of Digraphs // Int. J. Comput. Math. 2014. V. 91. № 10. P. 2109–2117.
30. *Zhou S., Sun Z., Xu Z.* A Result on r-Orthogonal Factorizations in Digraphs // European J. Combin. 2017. V. 65. P. 15–23.
31. *Zhou S., Sun Z., Liu H.* Sun Toughness and $P_{\geqslant 3}$-Factors in Graphs // Contrib. Discrete Math. 2019. V. 14. № 1. P. 167–174.
32. *Zhou S., Yang F., Xu L.* Two Sufficient Conditions for the Existence of Path Factors in Graphs // Sci. Iran. D: Comput. Sci. Eng. Electr. Eng. 2019. V. 26. № 6. P. 3510–3514.
33. *Zhou S.* Remarks on Path Factors in Graphs // RAIRO – Oper. Res. (forthcoming article). 2019. Available online at `https://doi.org/10.1051/ro/2019111`.

Ван Суфан
Школа государственного управления,
Научно-технологический университет Цзянсу,
Чжэньцзян, провинция Цзянсу, КНР
`wangsufangjust@163.com`
Чжан Вэй
Колледж Оуцзян, Университет Вэньчжоу,
Вэньчжоу, провинция Чжэцзян, КНР

Поступила в редакцию
11.11.2019
После доработки
13.05.2020
Принята к публикации
12.06.2020