

УДК 621.391 : 519.723

© 2020 г. М. Ковачевич

**ПЕРЕДАЧА СИГНАЛОВ РЕЛЯТИВИСТСКИМ НАБЛЮДАТЕЛЯМ:  
ТАМ, ГДЕ ВСТРЕЧАЮТСЯ ЭЙНШТЕЙН, ШЕННОН И РИМАН<sup>1</sup>**

Описывается сценарий связи, включающий в себя серию событий, инициируемых передатчиком и наблюдаемых приемником, испытывающим релятивистское замедление времени. Предполагается, что сообщение, выбранное передатчиком, кодируется согласно хронометражу событий и должно быть безошибочно восстановлено приемником независимо от разницы в шкалах времени в двух системах отсчета. Показано, что максимальная доля пространства всех  $k$ -событийных сигналов, которые могут быть выбраны в качестве кода, обеспечивающего безошибочную передачу информации в этой постановке, равна  $\zeta(k)^{-1}$ , где  $\zeta$  – дзета-функция Римана.

*Ключевые слова:* замедление времени, дрейф часов, канал синхронизации, теория Шеннона, передача данных, исправление ошибок, код с нулевой ошибкой, дзета-функция Римана.

DOI: 10.31857/S0555292320040014

**§ 1. Введение**

Теория информации [1, 2] – одно из главных научных достижений второй половины XX века – была разработана Шенноном как формальная основа для изучения передачи и обработки информации в классической области. В настоящей статье вводится и изучается задача, которая выводит теорию информации в релятивистский контекст и, в частности, призвана проиллюстрировать влияние замедления времени [3, 4] на фундаментальные пределы передачи информации.

**1.1. Описание модели.** Рассмотрим следующую модель передачи между двумя участниками: Алиса инициирует  $k$  событий в моменты времени  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_k$ , которые выбираются из множества целых чисел  $\{1, 2, \dots, N\}$  согласно показаниям часов в ее системе отсчета, т.е.  $\tilde{t}_i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $1 \leq \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_k \leq N$ , и эти события обнаруживаются Бобом в моменты времени  $\alpha\tilde{t}_1, \alpha\tilde{t}_2, \dots, \alpha\tilde{t}_k$  согласно его собственным часам. Множитель  $\alpha$ , моделирующий разницу в скорости хода часов в двух системах отсчета, заранее не известен ни одной стороне. (Предполагается, что обе стороны синхронизованы в том смысле, что они согласовали нулевой момент времени; этого можно добиться, инициируя дополнительное событие в момент времени  $\tilde{t} = 0$  в системе отсчета Алисы, при обнаружении которого Боб также устанавливает свои часы на  $\tilde{t} = 0$ .) Нам будет удобнее описывать сигналы, указывая интервалы между последовательными событиями, а не время, прошедшее от момента  $\tilde{t} = 0$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке научно-исследовательской и инновационной программы “Горизонт 2020” Европейского союза (грант № 856967) и Министерства образования, науки и технологического развития республики Сербия (номер проекта 451-03-68/2020-14/200156).

до каждого из событий. В этих обозначениях множество всех возможных сигналов, который может передавать Алиса, имеет вид

$$T_{N,k} = \left\{ (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^k t_i \leq N \right\}, \quad (1)$$

где  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  – множество натуральных чисел.

Восстановление “переданного  $k$ -вектора”  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  по “полученному  $k$ -вектору”  $\alpha \mathbf{t}$  тривиально, если коэффициент замедления времени  $\alpha$  известен и фиксирован, и поскольку  $k$ -вектор  $\mathbf{t}$  выбирается произвольным образом из  $\binom{N}{k}$  возможных, таким способом можно сообщить Бобу  $\log_2 \binom{N}{k}$  битов информации. Однако при нашем предположении, что коэффициент  $\alpha$  априори не известен, не все возможные векторы  $\mathbf{t}$  можно использовать для надежной передачи информации, поскольку некоторые из них неразличимы на приемном конце. Например, при  $k = 2$ , если бы Боб наблюдал события в моменты времени  $(2,1; 4,2)$ , то он не смог бы однозначно определить, какая из возможностей имеет место:  $\mathbf{t} = (1; 2)$  или  $\mathbf{t} = (2; 4)$ . В этом случае обоим участникам следует заранее ограничить множество разрешенных сигналов  $\mathbf{t}$  на некоторое собственное подмножество множества  $T_{N,k}$  (код) таким образом, чтобы Боб всегда мог правильно распознать переданный  $k$ -вектор независимо от значения  $\alpha$ . Другими словами, в описанном сценарии замедление времени действует как искажение сигнала, и естественным образом возникает следующий вопрос: сколько битов информации можно надежно передать приемнику при только что описанном простом способе передачи?

Применяя теоретико-информационный подход, мы будем моделировать искажение сигнала, т.е. неизвестный коэффициент  $\alpha$ , как абсолютно непрерывную случайную величину с плотностью вероятности  $p_\alpha(\cdot)$ , носителем которой является либо интервал  $[1, \bar{\alpha}]$  для некоторой константы  $\bar{\alpha} \in (1, \infty)$ , либо  $[1, \infty)$ . Более общая, на первый взгляд, модель, где носителем  $p_\alpha(\cdot)$  является  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$ , с точки зрения передачи информации эквивалентна случаю  $[1, \bar{\alpha}/\underline{\alpha}]$ , так что нижнюю границу интервала без ограничения общности можно считать равной 1.

*Замечание 1.* Предполагаемая в этой модели разница в скорости хода часов может быть вызвана различными физическими эффектами: движение Алисы и Боба относительно друг друга, разница гравитационного потенциала между ними, погрешности часов и т.д. Заметим, что наши результаты применимы ко всем моделям с линейной заменой шкалы времени  $\mathbf{t} \mapsto \alpha \mathbf{t}$  и не зависят от физических причин, вызывающих такую замену.

**1.2. Коды с нулевой ошибкой.** Будем говорить, что два сигнала на входе  $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in T_{N,k}$  являются *неразличимыми*, если на приемном конце можно перепутать один с другим в том смысле, что соответствующие множества сигналов на выходе  $\{\alpha' \mathbf{t}'\}$  и  $\{\alpha'' \mathbf{t}''\}$  имеют бесконечное пересечение (здесь значения  $\alpha'$  и  $\alpha''$  пробегают носитель функции  $p_\alpha(\cdot)$ ). Подмножество  $S \subseteq T_{N,k}$  называется *кодом с нулевой ошибкой* [5], если любые два различных элемента из  $S$  различимы. Элементы кода называются кодовыми словами. Таким образом, код с нулевой ошибкой представляет собой множество сигналов, которые можно однозначно распознать на приемном конце. Другими словами, на основе принятого сигнала Боб сможет определить кодовое слово, породившее этот сигнал, и тем самым восстановить передаваемую информацию с вероятностью 1.

Код с нулевой ошибкой  $S \subseteq T_{N,k}$  будем называть оптимальным, если он имеет наибольшую возможную мощность среди всех таких кодов в  $T_{N,k}$ . Эту максимальную мощность трудно установить в общем случае для произвольных значений параметров  $N$  и  $k$ , поэтому будет целесообразно сосредоточиться на ее асимптотике. Для

этого определим максимальную асимптотическую *плотность* кодов в пространстве  $k$ -событийных сигналов:

$$\delta_{\bar{\alpha}}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{S \subseteq T_{N,k}} \frac{|S|}{\binom{N}{k}}, \quad (2)$$

где максимум берется по всем кодам с нулевой ошибкой  $S \subseteq T_{N,k}$ , а  $\bar{\alpha} \in (1, \infty]$  – верхняя граница носителя функции  $p_{\alpha}(\cdot)$ . (Из дальнейшего анализа будет видно, что зависимость мощности оптимальных кодов от  $p_{\alpha}(\cdot)$  определяется только значением  $\bar{\alpha}$ , что обосновывает обозначение в (2).) Нашей целью является описание величины  $\delta_{\bar{\alpha}}(k)$  для любых  $k$  и  $\bar{\alpha}$ .

## § 2. Оптимальные множества сигналов и их плотность

Вначале рассмотрим случай неограниченной неопределенности коэффициента растяжения времени, что означает, что носителем функции плотности вероятности  $p_{\alpha}(\cdot)$  является вся полупрямая  $[1, \infty)$ . Растяжение времени искажает сигнал, представленный точкой  $\mathbf{t} \in T(N, k)$ , умножая эту точку на случайный множитель  $\alpha$ , или, что то же самое, сдвигая эту точку  $\mathbf{t}$  на случайное расстояние вдоль ее “луча обзора”, выходящего из начала координат (см. рисунок). Поскольку любые две точки, лежащие на одном луче обзора, выходящем из начала координат, неразличимы (так как  $\Pr\{\alpha \geq \alpha_0\} > 0$  для любого фиксированного  $\alpha_0$ ), никакие две такие точки не могут принадлежать одному коду с нулевой ошибкой. Поэтому оптимальный код получается при выборе ровно одной точки на каждом луче обзора, причем проще всего выбирать самую первую точку на каждом луче. Точки  $\mathbf{t}$  на решетке  $\mathbb{N}^k$ , которые первыми встречаются при движении по лучам, выходящим из начала координат, – это те, которые удовлетворяют условию  $\text{НОД}(\mathbf{t}) \equiv \text{НОД}(t_1, \dots, t_k) = 1$ , где через  $\text{НОД}$  обозначен наибольший общий делитель. Это показывает, что оптимальным кодом с нулевой ошибкой в данной модели является множество

$$C_{N,k} = \left\{ \mathbf{t} \in T_{N,k} : \text{НОД}(\mathbf{t}) = 1 \right\}. \quad (3)$$

В случае, когда носителем функции  $p_{\alpha}(\cdot)$  является конечный интервал  $[1, \bar{\alpha}]$ , код можно построить с помощью следующей жадной процедуры на каждом луче обзора, выходящем из начала координат: выберем первую точку  $\mathbf{t}$  на луче (т.е. ту, для которой  $\text{НОД}(\mathbf{t}) = 1$ ) в качестве кодового слова и выбросим все точки множества  $\{\alpha \mathbf{t} : \alpha \in [1, \bar{\alpha}]\}$ , так как они неразличимы с  $\mathbf{t}$ , затем выберем следующую ближайшую точку на этом луче  $\lceil \bar{\alpha} \rceil \mathbf{t}$  в качестве кодового слова и выбросим все точки множества  $\{\alpha \lceil \bar{\alpha} \rceil \mathbf{t} : \alpha \in [1, \bar{\alpha}]\}$  и т.д. В результате этой итеративной процедуры получаем следующее множество:

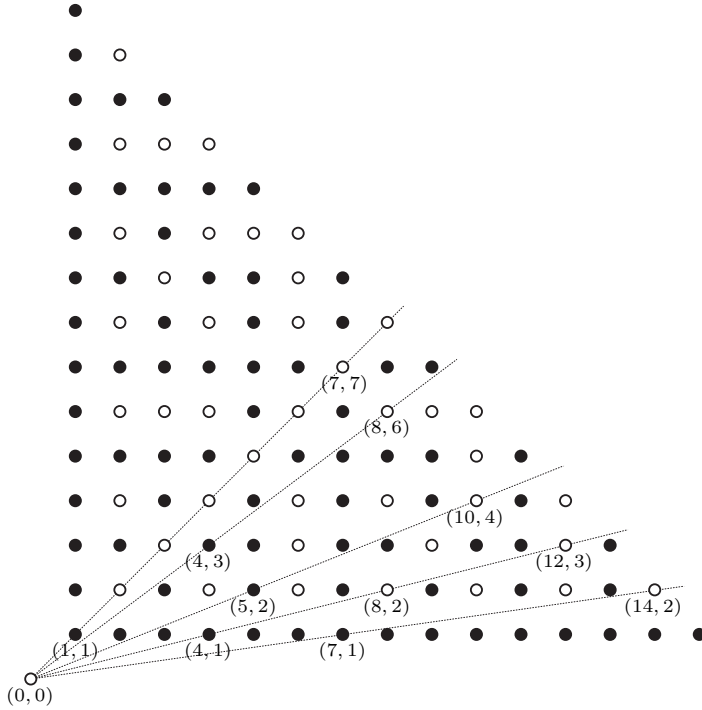
$$D_{N,k} = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} d_n C_{N,k} \right) \cap T_{N,k}, \quad (4)$$

где  $(d_n)_{n=1}^{\infty}$  – последовательность, заданная рекуррентным соотношением

$$d_n = \lceil \bar{\alpha} d_{n-1} \rceil, \quad d_1 = 1, \quad (5)$$

через  $d_n C_{N,k}$  обозначено множество  $\{d_n \mathbf{t} : \mathbf{t} \in C_{N,k}\}$ , а знак  $\bigcup$  подчеркивает, что объединяемые множества попарно не пересекаются. Для простоты в этих обозначениях мы не указываем зависимость  $d_n$  от  $\bar{\alpha}$  в явном виде. Отметим, что для  $\bar{\alpha} \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 2$ , рекуррентное соотношение (5) упрощается до

$$d_n = \bar{\alpha}^{n-1}. \quad (6)$$



Пространство  $T_{16,2}$ , описывающее сигналы, состоящие из  $k = 2$  событий, которые могут возникнуть в один из  $N = 16$  моментов времени, и код  $C_{16,2}$ , состоящий из всех точек  $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in T_{16,2}$ , удовлетворяющих условию  $\text{НОД}(t_1, t_2) = 1$ . Кодовые слова кода  $C_{16,2}$  показаны черными точками. Для иллюстрации также показано несколько “лучей обзора”, выходящих из начала координат

Из построения очевидно, что  $D_{N,k}$  действительно является кодом с нулевой ошибкой: единственная возможность, при которой два различных кодовых слова  $d_n \mathbf{t}$  и  $d_{n+1} \mathbf{t}$  породят один и тот же сигнал на приемном конце, – это случай, когда  $\alpha$  принимает значение  $\bar{\alpha}$  (и при этом  $\bar{\alpha} \in \mathbb{N}$ ). В следующей теореме будет показано, что код  $D_{N,k}$  на самом деле оптимален, и на основе этого наблюдения мы получим характеристику максимальной асимптотической плотности  $\delta_{\bar{\alpha}}(k)$ . Чтобы это утверждение было также верно и для тривиального случая  $\bar{\alpha} = 1$ , по определению положим  $d_n = n$  для  $\bar{\alpha} = 1$ , что обосновывается соображениями непрерывности (переходя к пределу при  $\bar{\alpha} \rightarrow 1$  в (5)).

Напомним определение дзета-функции Римана [6]:

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}. \quad (7)$$

**Теорема 1.** *Зафиксируем  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , и  $\bar{\alpha} \in [1, \infty)$ , и пусть  $(d_n)_{n=1}^{\infty}$  – последовательность, определенная в (5). Тогда*

$$\delta_{\bar{\alpha}}(k) = \zeta(k)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-k}. \quad (8)$$

При  $\bar{\alpha} = \infty$  имеем

$$\delta_{\infty}(k) = \zeta(k)^{-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Оптимальность кода  $D_{N,k}$  непосредственно вытекает из результата Шеннона [5, теорема 3], который утверждает, что код с нулевой ошибкой  $S \subseteq T$  оптимален, если существует отображение  $f: T \rightarrow S$ , обладающее тем свойством, что  $f(\mathbf{t}') \neq f(\mathbf{t}'')$  для любых двух различных сигналов  $\mathbf{t}', \mathbf{t}'' \in T$ . Требуемая функция  $f: T_{N,k} \rightarrow D_{N,k}$  в нашем случае задается с помощью отображения всех точек множества  $\{\alpha d_n \mathbf{t} : \alpha \in [1, \bar{\alpha}]\} \cap T_{N,k}$  в  $d_n \mathbf{t}$  для всех  $\mathbf{t} \in T_{N,k}$ , таких что  $\text{НОД}(\mathbf{t}) = 1$ , и всех  $n \geq 1$ . Поскольку любые две различные точки множества  $T_{N,k}$  принадлежат различным множествам вида  $\{\alpha d_n \mathbf{t} : \alpha \in [1, \bar{\alpha}]\}$  (т.е. либо у них различные  $n$ , либо различные  $\mathbf{t}$ , либо и то, и другое), их образы при отображении  $f$  различны. Поэтому из вышеуказанного результата Шеннона следует, что код  $D_{N,k}$  оптимален, откуда

$$\delta_{\bar{\alpha}}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|D_{N,k}|}{\binom{N}{k}}. \quad (10)$$

Теперь обратимся к соотношению (4) и заметим, что все подкоды  $(d_n C_{N,k}) \cap T_{N,k}$  можно представить в виде

$$(d_n C_{N,k}) \cap T_{N,k} = \{\mathbf{t} \in T_{N,k} : \text{НОД}(\mathbf{t}) = d_n\} = d_n C_{\lfloor N/d_n \rfloor, k}. \quad (11)$$

Тем самым, их асимптотическая плотность равна

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|(d_n C_{N,k}) \cap T_{N,k}|}{|T_{N,k}|} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|C_{\lfloor N/d_n \rfloor, k}|}{\binom{N}{k}} = \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{|C_{N', k}|}{\binom{d_n N'}{k}} = \\ &= \lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{|C_{N', k}|}{d_n^k \binom{N'}{k}} = d_n^{-k} \delta_{\infty}(k), \end{aligned} \quad (12)$$

где был использован тот факт, что код  $C_{N,k}$  из (3) является оптимальным для случая  $\bar{\alpha} = \infty$  и поэтому

$$\delta_{\infty}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|C_{N,k}|}{\binom{N}{k}}. \quad (13)$$

Теперь из (4), (10) и (12) вытекает

$$\delta_{\bar{\alpha}}(k) = \delta_{\infty}(k) \sum_{n=1}^{\infty} d_n^{-k}. \quad (14)$$

Тем самым, доказательство соотношения (8) сведено к доказательству равенства (9). Плотность  $\delta_{\infty}(k)$  можно найти из соотношений (3), (13) и известного факта [7], что вероятность того, что  $k$  случайно выбранных положительных чисел взаимно просты, равна  $\zeta(k)^{-1}$ , но здесь мы также приведем и прямое доказательство. Для этого сперва заметим, что  $\delta_1(k) = 1$  для любого  $k$ . Это так, поскольку условие  $\bar{\alpha} = 1$  означает, что коэффициент замедления времени точно известен на приемном конце, и поэтому оптимальный код для этого случая тривиальным образом равен множеству всех возможных сигналов на входе  $T_{N,k}$ , плотность которого равна 1. Теперь из равенства (14) и того факта, что  $d_n = n$  при  $\bar{\alpha} = 1$ , получаем

$$1 = \delta_{\infty}(k) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} = \delta_{\infty}(k) \zeta(k), \quad (15)$$

что и завершает доказательство теоремы.  $\blacktriangle$

Для целочисленных значений  $\bar{\alpha}$  полученную плотность можно выразить явно в силу равенства (6). А именно, для  $\bar{\alpha} \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 2$ , получаем

$$\delta_{\bar{\alpha}}(k) = \frac{\bar{\alpha}^k}{\zeta(k)(\bar{\alpha}^k - 1)}. \quad (16)$$

Как мы видели, в случае, когда о коэффициенте  $\alpha$  ничего не известно, соотношение (9) получается как важный специальный случай соотношения (8) (или, скорее, как предельный случай при  $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ ). В частности, наибольшая асимптотическая плотность множества двухсобытийных сигналов, различимых приемником, время которого замедляется, равна

$$\delta_{\infty}(2) = \frac{6}{\pi^2}. \quad (17)$$

Вообще, для любого четного  $k = 2m$  имеем

$$\delta_{\infty}(2m) = \frac{(-1)^{m+1} 2(2m)!}{(2\pi)^{2m} B_{2m}}, \quad (18)$$

где  $B_k$  – числа Бернулли [8, §1.5].

*Замечание 2.* Модель, тесно связанная с представленной в настоящей статье, где вместо релятивистского замедления времени сигналы искажались благодаря ошибке синхронизации, известной как дрейф часов, рассматривалась в [9, 10]. Оптимальные коды с нулевой ошибкой для этой модели были описаны в [10], хотя оценка их мощности не была проведена. Следует отметить, что понятие “неразличимости” было определено в [10] как условие, что рассматриваемые сигналы не могут приводить к одинаковым сигналам на приемном конце. Это определение немного отличается от нашего, в котором требуется, чтобы появление двух входных сигналов, которые можно перепутать на приемном конце, было событием с нулевой вероятностью. Дальнейшая характеристика оптимальных кодов в [10] аналогична (4), но с последовательностью  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  вместо  $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ , где

$$b_n = \lceil \bar{\alpha} b_{n-1} + 1 \rceil, \quad b_1 = 1. \quad (19)$$

В частности, для  $\bar{\alpha} \in \mathbb{N}$

$$b_n = 1 + \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 + \dots + \bar{\alpha}^{n-1} = \frac{\bar{\alpha}^n - 1}{\bar{\alpha} - 1}. \quad (20)$$

Таким же способом, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что наибольшая асимптотическая плотность кодов, определенных в [10], равна

$$\zeta(k)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-k}. \quad (21)$$

Заметим, что  $b_n \geq d_n$  для всех  $n \geq 1$ . В частности, при  $\bar{\alpha} \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{\alpha} \geq 2$ , неравенство является строгим для любых  $n \geq 2$ , поэтому плотность (21) строго меньше, чем плотность  $\delta_{\bar{\alpha}}(k)$  из (8). Однако это не всегда так; для иррациональных  $\bar{\alpha}$  имеем  $b_n = d_n$  для любых  $n \geq 1$ , так что эти две плотности равны.

### § 3. Заключительные замечания

Оценка количества информации и установление фундаментальных границ на передачу информации – два основных направления в теории информации. Области исследования, в которых изучаются такие вопросы для различных физических систем,

имеют долгую историю в науке, особенно в квантовой теории информации. В настоящей статье описан сценарий, в котором передача информации рассматривается в релятивистском контексте, и представлен результат, количественно оценивающий границы на передачу в этой модели. Полученное решение, хотя и довольно простое, интересно тем, что оно устанавливает связь между теорией информации Шеннона, специальной теорией относительности и теорией чисел. Тем самым, представляет интерес дальнейшее изучение этой задачи и других, связанных с ней, в частности, исследование гораздо более трудного случая нелинейного изменения шкалы времени, которое может возникать, например, когда наблюдатели движутся с ускорением.

Автор выражает благодарность рецензенту за несколько весьма ценных замечаний и поправок к первоначальному варианту статьи.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. № 3. P. 379–423.
2. *Csiszár I., Körner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011.
3. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik bewegter Körper // Ann. Phys. 1905. V. 322. № 10. P. 891–921.
4. *Mermin N.D.* It's about Time: Understanding Einstein's Relativity. Princeton: Princeton Univ. Press, 2005.
5. *Shannon C.E.* The Zero Error Capacity of a Noisy Channel // IRE Trans. Inform. Theory. 1956. V. 2. № 3. P. 8–19.
6. *Riemann B.* Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe // Monatsber. Königl. Preufs. Akad. Wiss. Berlin, 1859. Berlin: Königlichen Akad. der Wissenschaften, 1960. P. 671–680.
7. *Nymann J.E.* On the Probability that  $k$  Positive Integers are Relatively Prime // J. Number Theory. 1972. V. 4. № 5. P. 469–473.
8. *Edwards H.M.* Riemann's Zeta Function. Mineola, NY: Dover, 2001.
9. *Yeung R.W., Cai N., Ho S.-W., Wagner A.B.* Reliable Communication in the Absence of a Common Clock // IEEE Trans. Inform. Theory. 2009. V. 55. № 2. P. 700–712.
10. *Shaviv D., Özgür A., Arbabian A.* Communication with Crystal-free Radios // IEEE Trans. Commun. 2018. V. 66. № 10. P. 4513–4520.

*Ковачевич Младен*  
Факультет технических наук,  
Университет г. Нови-Сад, Сербия  
kmladen@uns.ac.rs

Поступила в редакцию  
22.09.2020  
После доработки  
21.10.2020  
Принята к публикации  
28.10.2020