

УДК 621.391 : 519.725

© 2020 г. А.В. Харин, К.Н. Заверткин, А.А. Овинников

**ОБНАРУЖЕНИЕ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ 10 В ГРАФЕ ТАННЕРА
КВАЗИЦИКЛИЧЕСКОГО МПП-КОДА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ
АНАЛИЗА ПРОТОГРАФА¹**

Завершено описание процедуры топологического расширения двудольного графа без параллельных ветвей в плоскости изменения структуры циклов длины до 10 включительно. На основании предыдущих работ дополнен набор теорем, определяющих правила преобразования циклов и маршрутов в результате перехода от протографа к графу Таннера. Предложена процедура определения наличия цикла длины 10 в расширенном графе путем анализа протографа.

Ключевые слова: граф Таннера, протограф, расширенный граф, объединение циклов, базовое уравнение, метрика связанности цикла, МПП-код.

DOI: 10.31857/S0555292320040038

§ 1. Введение

На сегодняшний день коды с малой плотностью проверок (МПП-коды) занимают одну из лидирующих позиций в технике передачи и хранения данных. При этом наибольшее практическое значение имеет подкласс квазициклических (КЦ) МПП-кодов в силу ряда особенностей [1], обеспечивающих существенные преимущества как при аппаратной, так и программной реализации. Анализ зарубежных источников [2–4] показал, что можно классифицировать все структурированные МПП-коды в порядке уменьшения числа степеней свободы, имеющихся при синтезе проверочных матриц. Рассмотрим три основные категории, представленные на рис. 1, которые, в свою очередь, разбиваются на множество более мелких, имеющих в рамках данной статьи меньшее значение. Наибольшей общностью обладают многореберные (MET – multi-edge type) МПП-коды [2], покрывающие все современные прикладные решения в целевой области. Крайне важным подмножеством многореберных (MP) МПП-кодов являются коды, основанные на протографах (ПГ) [3]. Проверочные матрицы таких кодов получаются за счет расширения небольшого протографа (базового графа) квадратными матрицами фиксированного размера (обычно используются матрицы перестановок). Расширение можно представить следующим образом: протограф копируется несколько раз, а далее переставляются ребра, имеющие одинаковые номера (мы полагаем, что ребра протографа занумерованы). И наконец, КЦ МПП-коды относятся к подмножеству протографов, для которого любая из перестановочных матриц является циклической. При этом в зависимости от типа кодов изменяется ограничение на максимальный вес w циркулянта в классах регулярных и нерегулярных конструкций.

Результаты, полученные в настоящей статье, относятся к КЦ МПП-кодам первого типа, где $w = 1$.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-79-20302).

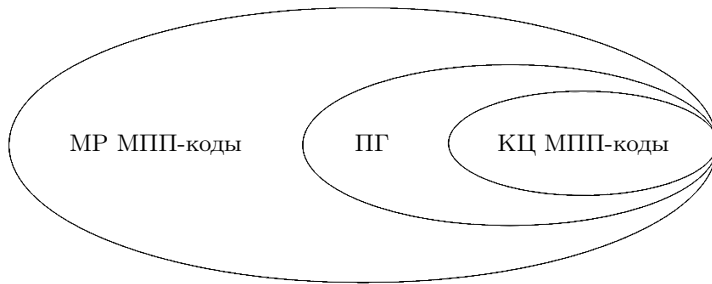


Рис. 1. Классификация структурированных МПП-кодов

Все структурированные МПП-коды могут быть описаны с помощью некоторого базового графа, который с помощью процедуры расширения преобразуется в граф Таннера. Его параметры обычно оптимизируются с целью получения заданных показателей качества. Среди косвенных критериев выделяют максимизацию локального обхвата графа Таннера [5] либо метрик связанности коротких циклов (МСЦ) [6]. Для решения таких оптимизационных задач необходимо уметь быстро обнаруживать циклы различной длины и по необходимости проводить расчет МСЦ. В предшествующей работе [1] была рассмотрена процедура обнаружения циклов длины 8 в графе Таннера КЦ МПП-кода по результатам анализа протографа. Схожие принципы будут отражены и в рамках текущего повествования с некоторыми специфическими особенностями, характерными для циклов большей длины. Дальнейшее увеличение размера исследуемого объекта сопряжено с рядом трудностей и в некоторых случаях полностью лишено смысла. Для полносвязных двудольных протографов величина максимального обхвата ограничена значением 12 согласно работе [7]. Если КЦ МПП-код является нерегулярным или регулярным с наличием ненулевых циркулянтов, то увеличение обхвата сопряжено в первую очередь с устранением балансных циклов [8], что выходит за рамки настоящей статьи. Вопрос топологического расширения базового графа для циклов длины 8 и 10 был рассмотрен в публикации [9], где авторы выдвинули гипотезу о существовании не обнаруживаемого алгоритмом REG цикла в расширенном графе. Однако их предположение о том, что объединение циклов в базовом графе должно содержать как минимум одно общее ребро является в общем случае ошибочным, что будет доказано рядом теорем ниже. Настоящая статья является логическим продолжением публикации [1] и завершает тему анализа коротких маршрутов в КЦ МПП-кодах.

§ 2. Общие теоретические сведения

Определим необходимые понятия, используемые в дальнейшем как фундамент теоретического исследования.

Пусть ненаправленный двудольный граф КЦ МПП-кода $G = (V, C, E)$ определяется множествами кодовых V и проверочных C вершин, таких что $V \cap C = \emptyset$, а также подмножеством пар $\{(v, c), v \in V, c \in C\}$, соответствующих ребрам $e = (v, c) \in E$. Степени кодовых и проверочных вершин обозначаются через $d_v, v \in V$, и $d_c, c \in C$. В силу того, что в дальнейшем интерес будет представлять только значения d_v , можно ввести упрощенное обозначение вида $d_{v_i} = d_i$. Маршрут w^g длины g в графе G представляется последовательностью вершин вида $v_0, c_0, v_1, c_1, \dots, v_{(g-1)}, c_{(g-1)}, v_g$. При этом если $v_0 = v_g$, то маршрут называется замкнутым. Маршрут не содержит обратных проходов, если любая тройка вершин имеет вид v_i, c_j, v_k или $c_i, v_j, c_k, i \neq k$. В дальнейшем будем рассматривать только замкнутые маршруты без обратных проходов, и будем называть их просто маршрутами. Циклом s^g длины g называется такой маршрут, в котором все промежуточные вершины за исключением $v_0 = v_g$

отличаются друг от друга. Обхватом графа G считается длина g_0 кратчайшего цикла s_0 . В классе двудольных графов g_0 не может быть меньше $g_{\min} = 4$. Общее количество кодовых и проверочных вершин определяется формулами $n = |V|$, $m = |C|$. Класс КЦ МПП-кодов предполагает отсутствие кратных ребер в соответствующих двудольных графах.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть C_q – циклическая подгруппа симметричной группы S_q над множеством целых чисел $Z_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ мощности q с единственной операцией – циклической перестановкой. Элементы S_q – это перестановки на множестве из q элементов. Рассмотрим циркулянт p_a в C_q , который соответствует циклическому сдвигу на a элементов вправо, где a – величина сдвига циркулянта.

Пусть G_b и G – топологически связанные двудольные графы, причем второй получается из первого следующим образом: копируем q раз каждую кодовую и проверочную вершину в G_b , где $v_b \in V_b$, $c_b \in C_b$. Полученные q копий

$$v = \{v_b^0, v_b^1, \dots, v_b^{q-1}\} \in V \quad \text{и} \quad c = \{c_b^0, c_b^1, \dots, c_b^{q-1}\} \in C$$

подвергаются циклической перестановке $p_a \in C_q$ для каждой копии e_b в e . Далее граф G_b будет называться базовым или протографом, а G – расширенным графом. Число вершин в G определяется соотношениями $m = m_b q$ и $n = n_b q$.

Известно [7], что представленное топологическое преобразование графов приводит к тому, что интегральный сдвиг для маршрута в G_b определяется согласно формуле

$$P^{g_b} = \sum_{k=0}^{g_b/2-1} (a_{i_k, j_k} - a_{i_{k+1}, j_k}) \pmod{q}. \quad (1)$$

В предыдущей работе [1] была представлена теорема 1, описывающая необходимое и достаточное условие существования циклов в расширенном графе, в основе которой лежит выражение (1). Дальнейшие рассуждения построены на том факте, что маршруты в базовом рассматриваются как объединения пар коротких циклов s_i и s_j , обладающих как минимум одной общей вершиной. При этом объединение характеризуется следующим набором параметров:

- g_i и g_j – длины пересекающихся циклов;
- n_{cv} – число общих вершин между s_i и s_j ;
- n_{ce} – число общих ребер между s_i и s_j ;
- n_{cr} – взаимное направление обхода, которое принимает значение, равное нулю, при совпадении обходов циклов по общему ребру (общим ребрам), а в противном случае $n_{cr} = 1$.

Важное значение при анализе графов Таннера КЦ МПП-кодов имеет метрика связанности циклов (МСЦ), которая показывает число ребер, связывающих проверочные вершины графа с кодовыми узлами текущего цикла и определяемая формулой (см. [6])

$$\gamma = \sum_{k=0}^{g/2-1} (d_k - 2). \quad (2)$$

Оценка МСЦ применительно к маршрутам в базовом графе несколько видоизменяется, что будет показано далее.

В последующих параграфах рассмотрены маршруты целевой длины $g_x = 10$ и образующие их подграфы – элементы протографов, состоящие из объединений циклов

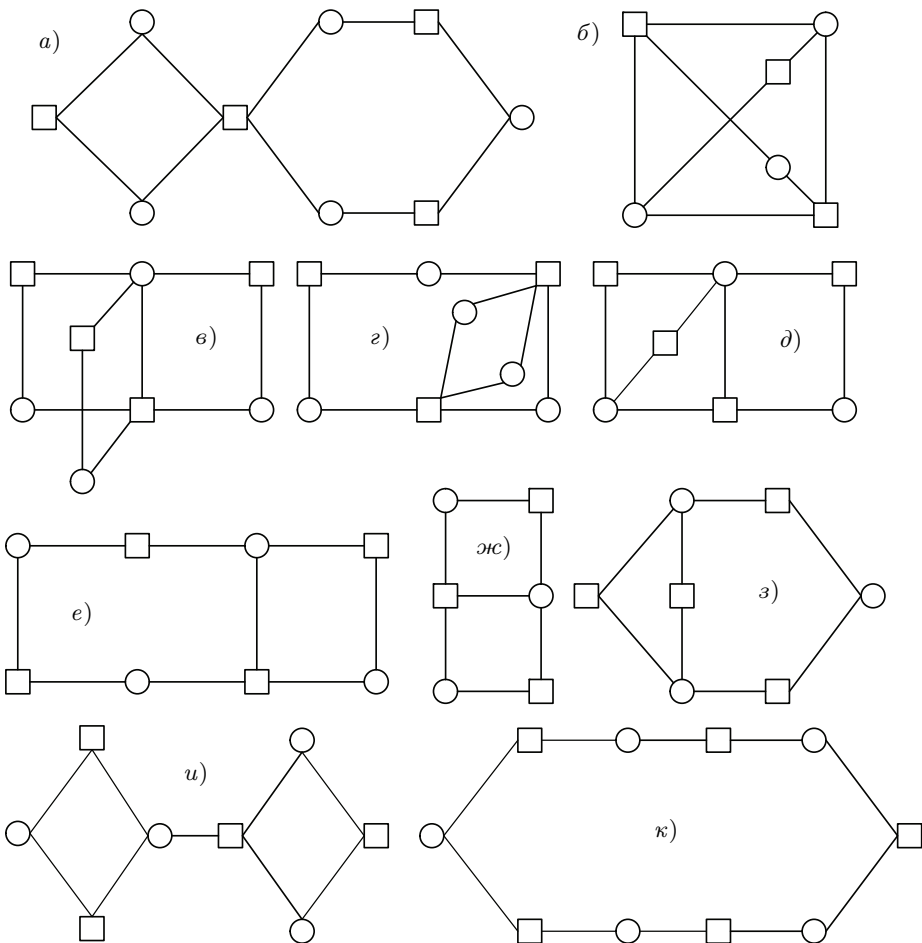


Рис. 2. Конфигурации подграфов, в которых возможно существование маршрутов длины g_x

минимальной длины, а также аналитика изменения значений МСЦ при расширении базового графа.

§ 3. Условия образования циклов

Теорема 1. Циклы s^{g_x} в расширенном графе G образуются из маршрутов w^{g_x} в базовом графе G_b , таких что определяемые ими подграфы изоморфны одному из десяти графов, представленных на рис. 2.

Доказательство. Пусть цикл имеет вид $s^{g_x} = (u_1, u_2, \dots, u_{g_x}, u_1)$, где $u \in C \cup V$. Тогда маршрут в протографе, из которого образовался цикл, имеет вид $w^{g_x} = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{g_x}), f(u_1))$, где $f(u_b^i) = v_b$, $f(c_b^j) = c_b$ для всех $v_b \in V_b$, $c_b \in C_b$, $i, j \in [1, q]$.

Тогда маршрут w^{g_x} определяет в графе G_b подграф T с множеством вершин $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{g_x})\}$ и множеством ребер

$$\{(f(u_1), f(u_2)), (f(u_2), f(u_3)), \dots, (f(u_{g_x}), f(u_1))\}.$$

Теперь можно сформулировать следующие предложения.

Предложение 1. *Подграф T изоморфен факторграфу графа S по разбиению P , а именно $T \cong S/P$, где S – цикл с вершинами $\{u_1, u_2, \dots, u_{g_x}\}$ и ребрами $\{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{g_x}, u_1)\}$, а P – разбиение I на части вида $\{j \in I \mid f(u_j) = f(u_i)\}$, $i \in I$, $I = \{1, 2, \dots, g_x\}$.*

Предложение 2. *Для всяких $J \in P$, $u_i, u_j \in J$ разность $i - j$ четна, но отлична от двух и $2g - 2$.*

Для $g_x = 10$ из предложения 2 следует, что J либо одноэлементно, либо является одной из пар (u_1, u_5) , (u_2, u_6) , (u_3, u_7) , (u_4, u_8) , (u_5, u_9) , (u_6, u_{10}) , (u_1, u_7) , (u_2, u_8) , (u_3, u_9) или (u_4, u_{10}) .

Пусть \mathcal{P} – множество всех разбиений множества J , указанного в предложении 2. Назовем $P, Q \in \mathcal{P}$ эквивалентными, $P \sim Q$, если $Q = \{\{a(u_j) \mid u_j \in J\} \mid J \in P\}$, где a – автоморфизм цикла S . Тогда справедливо следующее

Предложение 3. *Если $P \sim Q$, $P, Q \in \mathcal{P}$, то $S/P \cong S/Q$. Если P эквивалентно Q , то факторграф графа S по разбиению P изоморфен факторграфу графа S по разбиению Q .*

Учитывая возможные значения J и предложение 3, существует десять вариантов для P :

$$\begin{aligned}
 & \{(u_1, u_5), u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_8), (u_3, u_7), (u_4, u_{10}), u_6, u_9\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_4, u_8), u_2, u_3, u_6, u_7, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_3, u_7), u_2, u_4, u_6, u_8, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_4, u_8), u_3, u_7, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), u_3, u_4, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_7), (u_4, u_8), u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_7), u_4, u_8, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{(u_1, u_7), (u_2, u_6), u_3, u_4, u_5, u_8, u_9, u_{10}\}, \\
 & \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}\}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда S/P для этих вариантов P будет соответствовать подграфам а), б), в), г), д), е), ж), з), и) и к). ▲

В силу того, что подграф к) является одиночным циклом в базовом графе, его учет является относительно тривиальной задачей и может быть выполнен на основе любого алгоритма нумерации циклов.

Теорема 2. *Базовое уравнение для любого маршрута w^{g_x} в протографе может быть выражено через БУ циклов s^4 или s^6 , имеющихся в подграфе, определяемом маршрутом w^{g_x} .*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3 из [1]. Поэтому далее приведем только описания маршрутов и циклов для каждого из возможных подграфов и определим связь между их БУ.

Рассмотрим первый из возможных подграфов (рис. 3). В данном подграфе существуют два маршрута длины g_x

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_3, v_5, c_4, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1, \\
 w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_4, v_5, c_3, v_4, c_1, v_2, c_2, v_1
 \end{aligned}$$

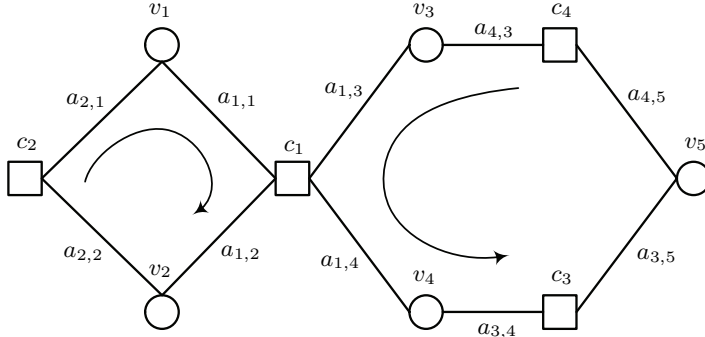


Рис. 3. Графическое изображение подграфа а)

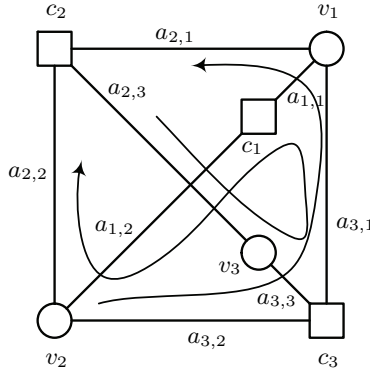


Рис. 4. Графическое изображение подграфа б)

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$ и $s_2^6 = v_3, c_1, v_4, c_3, v_5, c_4, v_3$. При этом их БУ связаны следующими выражениями:

$$\begin{aligned} P_1^{g_x} &= P_1^4 + P_2^6, \\ P_2^{g_x} &= P_1^4 - P_2^6. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее рассмотрим второй из возможных подграфов (рис. 4). В нем существуют три маршрута длины g_x

$$\begin{aligned} w_1^{g_x} &= v_1, c_2, v_2, c_3, v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, v_1, \\ w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_3, v_2, c_2, v_3, c_3, v_1, \\ w_3^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_3, v_3, c_2, v_2, c_3, v_1 \end{aligned}$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_2, v_2, c_3, v_1$, $s_2^6 = v_1, c_3, v_3, c_2, v_2, c_1, v_1$ и $s_3^6 = v_1, c_1, v_2, c_3, v_3, c_2, v_1$. При этом БУ для маршрутов $w_1^{g_x}$ и $w_2^{g_x}$ могут быть выражены через (4), а БУ для $w_3^{g_x}$ определяется выражением

$$P_3^{g_x} = P_3^6. \quad (5)$$

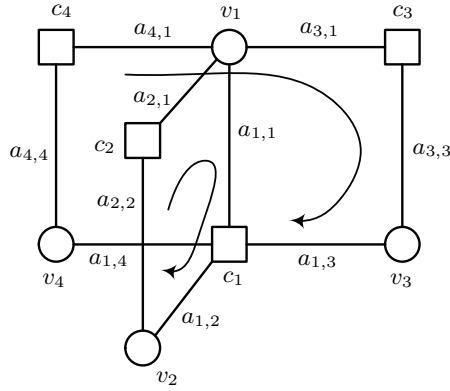


Рис. 5. Графическое изображение подграфа в)

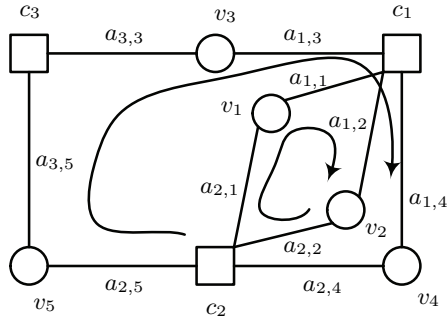


Рис. 6. Графическое изображение подграфа г)

Далее рассмотрим третий из возможных подграфов (рис. 5). В нем существуют шесть маршрутов длины g_x

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_3, v_3, c_1, v_4, c_4, v_1, \\
 w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_4, v_4, c_1, v_3, c_3, v_1, \\
 w_3^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_4, v_1, c_3, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1, \\
 w_4^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_4, v_1, c_2, v_2, c_1, v_3, c_3, v_1, \\
 w_5^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_3, v_1, c_2, v_2, c_1, v_4, c_4, v_1, \\
 w_6^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_3, v_1, c_4, v_4, c_1, v_2, c_2, v_1
 \end{aligned}$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$, $s_2^6 = v_1, c_3, v_3, c_1, v_4, c_4, v_1$, $s_3^4 = v_1, c_1, v_4, c_4, v_1$, $s_4^6 = v_1, c_3, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1$, $s_5^4 = v_1, c_1, v_3, c_3, v_1$ и $s_6^6 = v_1, c_2, v_2, c_1, v_4, c_4, v_1$. При этом их БУ связаны следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 P_i^{g_x} &= P_i^4 + P_{i+1}^6, \\
 P_{i+1}^{g_x} &= P_i^4 - P_{i+1}^6
 \end{aligned} \tag{6}$$

для $i = 1, 3, 5$.

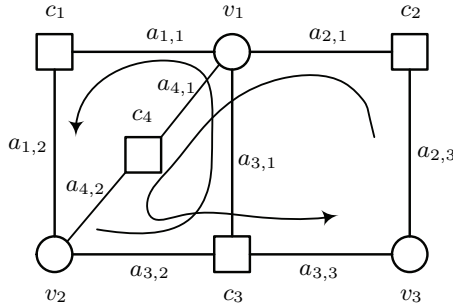


Рис. 7. Графическое изображение подграфа д)

Далее рассмотрим четвертый из возможных подграфов (рис. 6). В нем существуют шесть маршрутов длины g_x

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_2, v_5, c_3, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1, \\
 w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_3, v_5, c_2, v_4, c_1, v_2, c_2, v_1, \\
 w_3^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_5, c_3, v_3, c_1, v_4, c_2, v_1, \\
 w_4^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_3, v_5, c_2, v_2, c_1, v_4, c_2, v_1, \\
 w_5^{g_x} &= v_1, c_2, v_2, c_1, v_4, c_2, v_5, c_3, v_3, c_1, v_1, \\
 w_6^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_3, v_5, c_2, v_2, c_1, v_4, c_2, v_1
 \end{aligned}$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$, $s_2^6 = v_3, c_1, v_4, c_2, v_5, c_3, v_3$, $s_3^4 = v_1, c_1, v_4, c_2, v_1$, $s_4^6 = v_3, c_1, v_2, c_2, v_5, c_3, v_3$, $s_5^4 = v_2, c_1, v_4, c_2, v_2$ и $s_6^6 = v_3, c_1, v_1, c_2, v_5, c_3, v_3$. При этом их БУ связаны выражением (6) для $i = 1, 3, 5$.

Далее рассмотрим пятый из возможных подграфов (рис. 7). В нем существуют четыре маршрута длины g_x

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_3, v_1, c_4, v_2, c_3, v_3, c_2, v_1, \\
 w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_3, v_1, c_2, v_3, c_3, v_2, c_4, v_1, \\
 w_3^{g_x} &= v_1, c_4, v_2, c_3, v_1, c_1, v_2, c_3, v_3, c_2, v_1, \\
 w_4^{g_x} &= v_1, c_4, v_2, c_3, v_1, c_2, v_3, c_3, v_2, c_1, v_1
 \end{aligned}$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_3, v_1$, $s_2^6 = v_1, c_4, v_2, c_3, v_3, c_2, v_1$, $s_3^4 = v_1, c_4, v_2, c_3, v_1$, $s_4^6 = v_1, c_1, v_2, c_3, v_3, c_2, v_1$. При этом их БУ связаны выражением (6) для $i = 1, 3$.

Далее рассмотрим шестой из возможных подграфов (рис. 8). В нем существует один маршрут длины g_x

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_3, v_4, c_4, v_2, c_2, v_1$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$ и $s_2^6 = v_2, c_2, v_3, c_3, v_4, c_4, v_2$. При этом их БУ связаны выражением

$$P_1^{g_x} = P_1^4 + P_2^6. \quad (7)$$

Далее рассмотрим седьмой из возможных подграфов (рис. 9). В нем существует один маршрут длины g_x

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_3, c_2, v_1, c_3, v_2, c_1, v_3, c_2, v_1$$

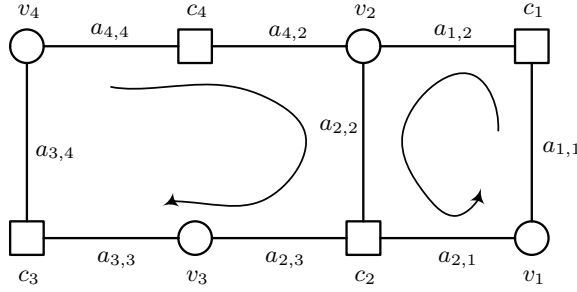


Рис. 8. Графическое изображение подграфа е)

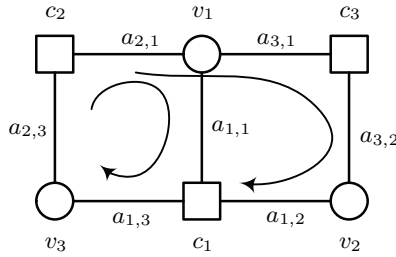


Рис. 9. Графическое изображение подграфа ж)

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_3, c_2, v_1$ и $s_2^6 = v_1, c_3, v_2, c_1, v_3, c_2, v_1$. При этом их БУ связаны выражением (7).

Далее рассмотрим восьмой из возможных подграфов (рис. 10). В нем существуют два маршрута длины g_x

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_1, v_2, c_4, v_3, c_3, v_1,$$

$$w_2^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_3, v_3, c_4, v_2, c_2, v_1$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$, $s_2^6 = v_1, c_1, v_2, c_4, v_3, c_3, v_1$ и $s_3^6 = v_1, c_3, v_3, c_4, v_2, c_2, v_1$. При этом их БУ связаны выражениями

$$\begin{aligned} P_1^{g_x} &= P_1^4 + P_2^6, \\ P_2^{g_x} &= P_1^4 + P_3^6. \end{aligned} \tag{8}$$

И наконец, рассмотрим заключительный подграф (рис. 11). В нем существуют два маршрута длины g_x

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_3, v_3, c_4, v_4, c_3, v_2, c_2, v_1,$$

$$w_2^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_3, v_4, c_4, v_3, c_3, v_2, c_2, v_1$$

и циклы $s_1^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$ и $s_2^4 = v_3, c_3, v_4, c_4, v_3$. При этом их БУ связаны выражениями

$$\begin{aligned} P_1^{g_x} &= P_1^4 + P_2^4, \\ P_2^{g_x} &= P_1^4 - P_2^4. \end{aligned} \tag{9}$$

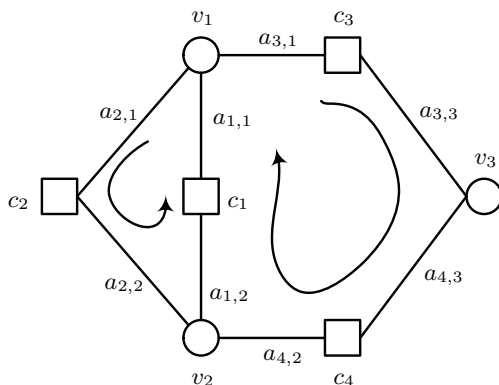


Рис. 10. Графическое изображение подграфа з)

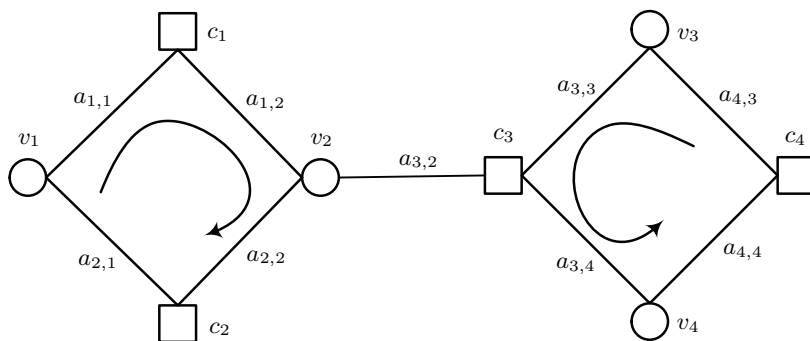


Рис. 11. Графическое изображение подграфа и)

Из всего вышесказанного следует, что БУ любого маршрута длины g_x может быть выражено через БУ циклов длины 4 или 6, которые существуют в подграфе, формируемом маршрутом. ▲

Теорема 3. Условие образования цикла длины g_x в расширенном графе из маршрута в протографе может быть выражено через базовые уравнения циклов длины 4 и 6, существующих в подграфе, определяемом маршрутом.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 из [1], поэтому далее приведем системы условий для маршрутов в каждом подграфе.

Итак, преобразование маршрутов в протографе а) в цикл при расширении графа происходит при выполнении системы условий следующего вида:

$$\begin{cases} (P_1^4 \pm P_2^6) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_2^6 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Аналогичная система условий может быть составлена для маршрутов, существующих в подграфе и) с той лишь разницей, что оба компонентных цикла являются

циклами длины 4:

$$\begin{cases} (P_1^4 \pm P_2^4) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_2^4 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Для подграфов е) и ж), где существует по одному возможному маршруту, система условий будет иметь вид

$$\begin{cases} (P_1^4 + P_2^6) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_2^6 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Точно также выглядит система условий для циклов, образующихся из маршрута $w_1^{g_x}$ в подграфе з). Для циклов, образующихся из маршрута $w_2^{g_x}$ в том же подграфе, с учетом используемых обозначений циклов из теоремы 2 система условий будет иметь вид

$$\begin{cases} (P_1^4 + P_3^6) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_3^6 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Маршруты, существующие в оставшихся подграфах, помимо циклов, через БУ которых выражаются БУ самих маршрутов, содержат в себе и другие циклы. Рассмотрим их подробнее.

Маршруты, образующиеся в подграфе б), помимо циклов, через которые выражаются их БУ в соответствии с теоремой 2, содержат в себе циклы длины 4: $s_2^4 = v_1, c_1, v_2, c_3, v_1$, $s_3^4 = v_1, c_2, v_3, c_3, v_1$, $s_4^4 = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$ и $s_5^4 = v_2, c_2, v_3, c_3, v_2$. Используя данные обозначения циклов и обозначения из теоремы 2, можно показать, что

$$\begin{aligned} w_1^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_2^4, s_3^4, \\ w_2^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_4^4, s_5^4, \\ w_3^{g_x} &\supset s_2^4, s_3^4, s_4^4, s_5^4. \end{aligned}$$

В таком случае, при расширении протографа происходит преобразование маршрутов $w_1^{g_x}$ и $w_2^{g_x}$ в равновеликие циклы, если выполняется одна из систем условий:

$$\begin{cases} (P_1^4 + P_1^6) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_1^6 \bmod (q) \neq 0, \\ P_2^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_3^4 \bmod (q) \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (P_1^4 - P_1^6) \bmod (q) = 0, \\ P_1^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_1^6 \bmod (q) \neq 0, \\ P_4^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_5^4 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Преобразование маршрута $w_3^{g_x}$ в равновеликий цикл при расширении протографа происходит, если выполняется следующая система условий:

$$\begin{cases} P_2^6 \bmod (q) = 0, \\ P_2^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_3^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_4^4 \bmod (q) \neq 0, \\ P_5^4 \bmod (q) \neq 0. \end{cases}$$

Маршруты, образующиеся в подграфе в), содержат по четыре дополнительных цикла. Используя нумерацию циклов из описания подграфа в) в теореме 2, можно показать, что

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_3^4, s_4^6, \\
 w_2^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_5^4, s_6^6, \\
 w_3^{g_x} &\supset s_3^4, s_4^6, s_1^4, s_2^6, \\
 w_4^{g_x} &\supset s_3^4, s_4^6, s_5^4, s_6^6, \\
 w_5^{g_x} &\supset s_5^4, s_6^6, s_3^4, s_4^6, \\
 w_6^{g_x} &\supset s_5^4, s_6^6, s_1^4, s_2^6.
 \end{aligned}$$

В таком случае, при расширении протографа происходит преобразование маршрута w^{g_x} в равновеликий цикл, если выполняется система условий

$$\begin{cases}
 (P_i^4 + P_{i+1}^6) \bmod (q) = 0, \\
 P_i^4 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_{i+1}^6 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_k^4 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_{k+1}^6 \bmod (q) \neq 0,
 \end{cases} \quad (10)$$

где $i = 1, 3, 5, k = 3, 1, 3$, или

$$\begin{cases}
 (P_i^4 - P_{i+1}^6) \bmod (q) = 0, \\
 P_i^4 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_{i+1}^6 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_k^4 \bmod (q) \neq 0, \\
 P_{k+1}^6 \bmod (q) \neq 0,
 \end{cases} \quad (11)$$

где $i = 1, 3, 5, k = 5, 5, 1$.

Маршруты, образующиеся в подграфе г), содержат по четыре дополнительных цикла. Используя нумерацию циклов из описания подграфа г) в теореме 2, можно показать, что

$$\begin{aligned}
 w_1^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_3^4, s_4^6, \\
 w_2^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_5^4, s_6^6, \\
 w_3^{g_x} &\supset s_3^4, s_4^6, s_1^4, s_2^6, \\
 w_4^{g_x} &\supset s_3^4, s_4^6, s_5^4, s_6^6, \\
 w_5^{g_x} &\supset s_5^4, s_6^6, s_1^4, s_2^6, \\
 w_6^{g_x} &\supset s_5^4, s_6^6, s_3^4, s_4^6.
 \end{aligned}$$

В таком случае, при расширении протографа происходит преобразование маршрута w^{g_x} в равновеликий цикл, если выполняется система условий (10), где $i = 1, 3, 5, k = 3, 1, 1$, или (11), где $i = 1, 3, 5, k = 5, 5, 3$.

Маршруты, образующиеся в подграфе д), помимо циклов, через которые выражаются их БУ в соответствии с теоремой 2, содержат в себе циклы длины 4: $s_5^4 = v_1, c_1, v_2, c_4, v_1$ и $s_6^4 = v_1, c_3, v_3, c_2, v_1$. Используя данные обозначения циклов и

обозначения из теоремы 2, можно показать, что

$$\begin{aligned} w_1^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_3^4, s_4^6, \\ w_2^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_5^4, s_6^4, \\ w_3^{g_x} &\supset s_1^4, s_2^6, s_3^4, s_4^6, \\ w_4^{g_x} &\supset s_3^4, s_4^6, s_5^4, s_6^4. \end{aligned}$$

В таком случае, при расширении протографа происходит преобразование маршрута w^{g_x} в равновеликий цикл, если выполняется система условий (10), где $i = 1, 3, k = 3, 3$, или (11), где $i = 1, 3, k = 5, 5$.

Таким образом, утверждение теоремы является верным для всех существующих маршрутов. ▲

Теорема 4. Значение МСЦ для циклов s^{g_x} , за исключением циклов, образуемых из маршрутов, существующих в подграфе и), в расширенном графе может быть выражено через метрики связанности циклов длины 4 и 6, существующих в подграфе, определяемом маршрутом, из которого образован цикл s^{g_x} .

Доказательство. Следуя логике рассуждений из доказательства теоремы 5 в [1], можно показать следующее.

В случае подграфов а), б), е) и ж) МСЦ циклов длины g_x , образованных соответствующими им маршрутами, могут быть вычислены согласно следующему выражению:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^4 + \gamma_2^6. \quad (12)$$

В случае подграфов в) и г) МСЦ циклов длины g_x , образованных соответствующими им маршрутами, могут быть вычислены согласно следующему выражению:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^4 + \gamma_2^6 = \gamma_3^4 + \gamma_4^6 = \gamma_5^4 + \gamma_6^6. \quad (13)$$

В случае подграфа д) МСЦ циклов длины g_x , образованных соответствующими им маршрутами, могут быть вычислены согласно следующему выражению:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^4 + \gamma_2^6 = \gamma_3^4 + \gamma_4^6. \quad (14)$$

В случае подграфа з) МСЦ циклов длины g_x , образованных соответствующими им маршрутами, могут быть вычислены согласно следующему выражению:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^4 + \gamma_2^6 = \gamma_1^4 + \gamma_3^6, \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_1^{g_x} &= \gamma_1^4 + \gamma_2^6, \\ \gamma_2^{g_x} &= \gamma_1^4 + \gamma_3^6, \end{aligned} \quad (16)$$

если в подграфе все кодовые вершины заменить проверочными и наоборот.

Таким образом, утверждение теоремы является верным для всех типов подграфов при целевой длине цикла, равной g_x . ▲

Отдельно рассмотрим значения МСЦ для циклов, образующихся из подграфа и). Они вычисляются в соответствии с выражением

$$\gamma^{g_x} = (d_1 - 2) + 2(d_2 - 2) + (d_3 - 2) + (d_4 - 2).$$

Параметры n_{cv} и n_{ce} для подграфов

Подграф	а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	з)
n_{cv}	1	4	2	2	3	2	4	3
n_{ce}	0	2	0	0	1	1	3	2

При этом метрики компонентных циклов длины 4, существующих в подграфе, могут быть выражены уравнениями

$$\gamma_1^4 = (d_1 - 2) + (d_2 - 2),$$

$$\gamma_2^4 = (d_3 - 2) + (d_4 - 2).$$

Тогда будет справедливо следующее выражение:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^4 + \gamma_2^4 + (d_{ce} - 2),$$

где d_{ce} – степень кодовой вершины, с которой связано соединяющее циклы ребро.

Если в подграфе заменить типы вершин на противоположные, то выражения для вычисления МСЦ не изменятся.

Таким образом, значение МСЦ для циклов длины g_x , образующихся из маршрутов, существующих в подграфе и), может быть частично выражено через МСЦ коротких циклов с учетом свойств соединяющего их ребра, что позволяет рассчитать МСЦ для циклов длины g_x только на основе информации о протографе, и это также выполняется для всех остальных циклов длины g_x .

§ 4. Процедура определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе путем анализа протографа

Полученные выше условия позволяют построить процедуру определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе путем анализа циклов, существующих в протографе.

Сравнение алгоритмов обнаружения коротких циклов с прямым поиском маршрутов по вычислительной сложности говорит не в пользу последнего. Поэтому целесообразно взять за основу именно первый вариант. Любой из восьми возможных подграфов (исключая подграф и)), в котором существуют маршруты длины g_x , может быть представлен как объединение двух циклов длины 4 и 6 с некоторым количеством общих вершин n_{cv} и ребер n_{ce} . В табл. 1 приведено соответствие между подграфами, в которых существуют маршруты длины g_x , и параметрами n_{cv} и n_{ce} объединения двух циклов длины 4 и 6.

Подграф и) может быть представлен как объединение двух циклов длины 4 без общих вершин, связанных ребром.

Таким образом, сравнив записи двух циклов длины 4 и 6 и определив наличие общих вершин и ребер, мы можем однозначно определить наличие и тип подграфа согласно теореме 1. Надо обратить внимание на то, что подграфы в) и г) обладают одинаковыми параметрами n_{cv} и n_{ce} , однако алгоритм анализа совпадает для этих подграфов, поэтому необходимость в их различении отсутствует. Обнаружение подграфов и) выполняется с помощью отдельной процедуры, в ходе которой проверяется наличие соединяющих ребер для всех возможных пар циклов длины 4. Также можно заметить, что для описания протографа и выражения БУ маршрута используется одна и та же пара циклов. Все это позволяет нам предложить процедуру определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе, который включает в себя следующие шаги:

- 1) Выполнить поиск одиночных циклов длины g_x , 4 и 6 в протографе;
- 2) Составить и решить БУ для одиночных циклов длины g_x , найденных в п. 1. Если хотя бы одно связанное с циклом РБУ равно нулю, то процедура завершается, иначе переходим к следующему шагу;
- 3) Парно проверить все циклы длины 4 на наличие соединяющих их ребер и обнаружить объединения типа и);
- 4) Составить и решить систему условий по всем объектам из п. 3, рассчитав РБУ для входящих в условия циклов длины 4;
- 5) Если хотя бы одна из систем условий выполнена, то процедура завершается, иначе переходим к следующему шагу;
- 6) Парно сравнить все циклы длины 4 и 6 и обнаружить их объединения;
- 7) Определить тип подграфа по табл. 1 для каждого из обнаруженных объединений;
- 8) Составить и решить систему условий по всем объектам из п. 7, рассчитав РБУ для входящих в условия циклов длины 4 и 6;
- 9) Цикл длины g_x считается обнаруженным, если хотя бы одна из систем условий выполнена, иначе циклы целевой длины отсутствуют.

С помощью предложенной процедуры мы можем обнаружить циклы длины g_x без выполнения затратной процедуры расширения протографа.

§ 5. Заключение

В результате анализа маршрутов в базовом графе КЦ МПП-кода разработана процедура, определяющая наличие цикла длины $g_x = 10$ в расширенном графе. Сформулирован и доказан набор теорем 1–4, которые обосновывают предлагаемую процедуру. В совокупности с работой [1] показано, что для получения необходимой информации о циклах и их МСЦ в расширенном графе достаточно провести анализ одиночных циклов длины от g_{\min} до g_x , а также их объединений в парах (g_{\min}, g_{\min}) и $(g_{\min}, g_{\min} + 2)$ для достижения обхвата графа Таннера вплоть до значения 12 включительно. Таким образом, полностью описан процесс топологического расширения двудольного графа без параллельных ветвей в плоскости изменения структуры циклов длины $g_x < 12$. Дальнейшее увеличение обхвата связано в первую очередь с устранением балансных циклов [8], что возможно лишь на этапе синтеза базового графа.

Далее планируется применить предлагаемый подход для получения регулярных полностью связанных двудольных графов минимально возможной длины при фиксированном числе проверочных вершин в рамках полнопереборного алгоритма с элементами предсказания. Кроме того, значительная область для фундаментальных исследований открывается при переходе к более широкому классу МПП-кодов, основанному на протографах, где кратность ребер может быть произвольной.

Авторы выражают особую благодарность А.Н. Воропаеву за помощь в доработке теоремы 1, а также рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить качество итоговой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харин А.В., Заверткин К.Н., Овинников А.А. Обнаружение циклов длины 8 в графе Таннера квазициклического МПП-кода по результатам анализа протографа // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 2. С. 82–94.
2. Richardson T., Urbanke R. Multi-Edge Type LDPC Codes. Tech. Rep. LTHC-REPORT-2004-001. Communication Theories Lab. (LTHC), EPFL, Switzerland. 2004. Available at <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.106.7310>.

3. *Thorpe J.* Low Density Parity Check (LDPC) Codes Constructed from Protographs. The Interplanetary Network Progress Report № 42-154. Jet Propulsion Lab., California Inst. of Technology. 2003. Available at https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-154/154C.pdf.
4. *Fan J.L.* Array Codes as Low-Density Parity-Check Codes // Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes and Related Topics. Brest, France. Sept. 4–7, 2000. P. 543–546.
5. *Hu X.-Y., Eleftheriou E., Arnold D.M.* Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 1. P. 386–398.
6. *Tian T., Jones C.R., Villasenor J.D., Wesel R.D.* Selective Avoidance of Cycles in Irregular LDPC Code Construction // IEEE Trans. Commun. 2004. V. 52. № 8. P. 1242–1247.
7. *Fossorier M.P.C.* Quasi-cyclic Low-Density Parity-Check Codes from Circulant Permutation Matrices // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 50. № 8. P. 1788–1793.
8. *Xiao G., Nan Z.* Analysis of Balanced Cycles of QC-LDPC Codes // Proc. 8th Int. Conf. on Wireless and Optical Communication Networks (WOCN'2011). Paris, France. May 24–26, 2011. P. 1–5.
9. *Diouf M., Declercq D., Fossorier M., Quya S., Vasić B.* Improved PEG Construction of Large Girth QC-LDPC Codes // Proc. 9th Int. Symp. on Turbo Codes & Iterative Information Processing (ISTC'2016). Brest, France. Sept. 5–9, 2016. P. 146–150.
10. *Karimi M., Banihashemi A.H.* On the Girth of Quasi Cyclic Protograph LDPC Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 7. P. 4542–4552.

Харин Алексей Владимирович
 Заверткин Константин Николаевич
 Овинников Алексей Анатольевич
 Рязанский государственный радиотехнический
 университет им. В.Ф. Уткина,
 факультет радиотехники и телекоммуникаций,
 кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники
 kharin.a.v@tor.rsreu.ru
 zavertkin.k.n@tor.rsreu.ru
 ovinnikov.a.a@tor.rsreu.ru

Поступила в редакцию
 27.08.2020
 После доработки
 23.11.2020
 Принята к публикации
 23.11.2020