ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 **2020** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.17

© 2020 г. **С. Чжоу, Ч. Сунь, Ц. Пань**

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ В ГРАФАХ ДРОБНЫХ (g, f)-ФАКТОРОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

В NFV-сети доступность планирования ресурсов может быть выражена наличием дробного фактора в соответствующем графе. Исследования о существовании специальных дробных факторов в структуре сети могут помочь построить NFV-сеть с эффективным распределением ресурсов. Рассмотрим некоторую функцию $h\colon E(G) \to [0,1]$. Обозначим $d_G^h(x) = \sum\limits_{e \ni x} h(e)$. Назовем граф F_h с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер E_h дробным (g, f)-фактором графа G с индикаторной функцией h, если неравенство $g(x) \leqslant d_G^h(x) \leqslant f(x)$ выполняется для любого $x \in V(G)$, где $E_h = \{e : e \in E(G),\ h(e) > 0\}$. Скажем, что G обладает свойством $E(m, n)$ относительно дробного (g, f)-фактора, если для любых двух множеств независимых ребер M и N, таких что $|M| = m$, $|N| = n$ и $M \cap N = \varnothing$, граф G допускает дробный (g, f)-фактор F_h, такой что $h(e) = 1$ для всякого $e \in M$ и $h(e) = 0$ для всякого $e \in N$. Понятие $E(m, n)$-свойства относительно дробного (g, f)-фактора отвечает структуре NFV-сети, где определенные каналы заняты или повреждены в некоторые моменты времени. Рассматривается проблема планирования ресурсов в NFV-сетях, используя теорию графов. Приводится условие, основанное на объединении окрестностей вершин, при котором граф обладает $E(1, n)$-свойством относительно дробного (g, f)-фактора. Кроме того, показывается, что нижняя оценка в данном условии является наилучшей возможной в некотором смысле.

Ключевые слова: NFV-сеть; граф; объединение окрестностей; дробный (g, f)-фактор; дробные (g, f)-факторы с ограничениями.

DOI: 10.31857/S055529232004004X

§ 1. Введение

Построение сервисной цепочки для новой сети традиционным способом требует покупки и настройки специальных аппаратных устройств и их физического соединения в определенной последовательности. Расходы на построение и поддержание такой системы могут быть высоки, а соответствующее аппаратное решение всегда избыточно, что выливается в трату аппаратных ресурсов в непиковые часы. Виртуализация сетевых функций (NFV – network function virtualization) – смена парадигмы, достигнутая инженерами на примере Vodafone, China Mobile и AT&T, – ставит своей целью решение вышеозначенных проблем путем упрощения и ускорения продвижения сетевых сервисов. Европейский институт телекоммуникационных стандартов (ETSI) опубликовал в 2012 г. серию отчетов об NFV, в которых описывались область применения, задачи и возможности, развитие индустрии и архитектурное моделирование. Виртуальные сетевые функции могут быть созданы по необходимости без

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проекта “Шесть вершин таланта” провинции Цзянсу, Китай (номер гранта JY-022).

установки новых устройств. Это позволяет операторам сети обновлять, создавать и удалять сервисные цепочки недорогим и гибким способом. Одной из главных проблем в сервисе NFV является возможность планирования ресурсов, которая эквивалентна наличию дробного (g, f)-фактора со свойством $E(m, n)$. Это создает мотивацию для исследования соответствующей теоретической проблемы с использованием теории графов.

В данной статье рассматриваются простые и конечные графы. Терминологию и обозначения, которые не вводятся здесь явно, можно найти в монографии [1]. Пусть $G = (V(G), E(G))$ – некоторый граф, где $V(G)$ обозначает множество вершин, а $E(G)$ – множество ребер графа G. Множества вершин и ребер графа G соответствуют множествам узлов и каналов в NFV-сети. Для вершины x из G обозначим через $N_G(x)$ окрестность x в G, а через $d_G(x) = |N_G(x)|$ – степень x в G. Будем использовать обозначение $N_G[x]$ для $N_G(x) \cup \{x\}$. Введем также $\delta(G)$ – минимальную степень G и $i(G)$ – число изолированных вершин G. Для подмножества вершин X из G обозначим через $G[X]$ подграф G, индуцированный X, и будем использовать обозначение $G - X$ для $G[V(G) \setminus X]$. Подмножество вершин X из G является независимым множеством G, если никакие две вершины из X не смежны в G. Для подмножества $E' \subseteq E(G)$ граф, полученный из G удалением ребер, принадлежащих E', обозначается через $G - E'$. Для всякого $X \subseteq V(G)$ введем

$$\varphi(X) = \sum_{x \in X} \varphi(x)$$

для любой функции φ, определенной на $V(G)$, и положим $\varphi(\varnothing) = 0$. Соединение $G \vee H$ обозначает граф с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер

$$E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy : \ x \in V(G),\ y \in V(H)\}.$$

Пусть $g, f\colon V(G) \to Z$ – некоторые функции, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ для любого $x \in V(G)$. Остовный подграф F графа G назовем (g, f)-фактором, если $g(x) \leqslant d_F(x) \leqslant f(x)$ для любого $x \in V(G)$. Далее, (g, f)-фактор является $[a, b]$-фактором, если $g(x) = a$ и $f(x) = b$ для всякого $x \in V(G)$. Скажем, что (g, f)-фактор является f-фактором, если $g(x) = f(x)$ для любого $x \in V(G)$. Если $f(x) \equiv k$, то f-фактор называется k-фактором. 1-фактор называется также совершенным паросочетанием.

Пусть $h\colon E(G) \to [0, 1]$ – некоторая функция. Будем писать

$$d_G^h(x) = \sum_{e \ni x} h(e).$$

Назовем граф F_h с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер E_h дробным (g, f)-фактором G с индикаторной функцией h, если $g(x) \leqslant d_G^h(x) \leqslant f(x)$ для любого $x \in V(G)$, где $E_h = \{e : \ e \in E(G),\ h(e) > 0\}$. Если $g(x) = f(x)$ для всякого $x \in V(G)$, то дробный (g, f)-фактор является дробным f-фактором. Дробный f-фактор называется дробным k-фактором, если $f(x) = k$ для любого $x \in V(G)$. Дробный 1-фактор называется также совершенным дробным паросочетанием.

Подмножество E' множества $E(G)$ называется множеством независимых ребер, если никакие два ребра E' не инцидентны одной вершине. Скажем, что G обладает свойством $E(m, n)$ относительно дробного (g, f)-фактора, если для любых двух независимых множеств ребер M и N с $|M| = m$, $|N| = n$ и $M \cap N = \varnothing$ граф G допускает дробный (g, f)-фактор F_h, где $h(e) = 1$ для любого $e \in M$ и $h(e) = 0$ для любого $e \in N$. Если $g(x) = f(x)$ для всякого $x \in V(G)$, то свойство $E(m, n)$ относительно дробного (g, f)-фактора является свойством $E(m, n)$ относительно дробного f-фактора. Если $f(x) \equiv k$, то свойство $E(m, n)$ относительно дробного f-фактора является свойством $E(m,n)$ относительно дробного k-фактора. В частности, свойство $E(m,n)$ относительно 1-фактора называется также свойством $E(m,n)$ относительно совершенного дробного паросочетания, и мы говорим, что G – дробный $E(m,n)$. Похожим образом можно определить свойство $E(m,n)$ относительно (g,f)-фактора, свойство $E(m,n)$ относительно f-фактора, свойство $E(m,n)$ относительно k-фактора и свойство $E(m,n)$ относительно совершенного паросочетания.

Описание графов, допускающих дробные (g,f)-факторы, было получено в работе [2]. Новое доказательство было представлено в [3].

Теорема 1 [2,3]. *Пусть G – некоторый граф, и пусть g,f – две целочисленные функции, определенные на $V(G)$, такие что $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in V(G)$. Тогда G допускает дробный (g,f)-фактор, если и только если*

$$\gamma_G(S,T) = f(S) + d_{G-S}(T) - g(T) \geqslant 0$$

для любого $S \subseteq V(G)$, где $T = \{x:\ x \in V(G) \setminus S,\ d_{G-S}(x) \leqslant g(x)\}$.

Авторы работы [4] расширили теорему 1 и представили описание графов, допускающих дробный (g,f)-фактор, со свойством $E(1,0)$. Эта теорема будет использована позже при доказательстве основного результата.

Теорема 2 [4]. *Пусть G – некоторый граф, и пусть g,f – две целочисленные функции, определенные на $V(G)$, такие что $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in V(G)$. Тогда G допускает дробный (g,f)-фактор со свойством $E(1,0)$, если и только если*

$$\gamma_G(S,T) = f(S) + d_{G-S}(T) - g(T) \geqslant \varepsilon(S,T)$$

для любого $S \subseteq V(G)$, где $T = \{x:\ x \in V(G) \setminus S,\ d_{G-S}(x) \leqslant g(x)\}$, а $\varepsilon(S,T)$ определено следующим образом:

$$\varepsilon(S,T) = \begin{cases} 2, & \text{если } S \text{ не является независимым множеством,} \\ 1, & \text{если } S \text{ является независимым множеством и есть ребро,} \\ & \text{соединяющее } S \text{ и } V(G)\setminus(S\cup T)\text{, или есть ребро } e = uv\text{, соеди-} \\ & \text{няющее } S \text{ и } T\text{, такое что } d_{G-S}(v) = g(v) \text{ для любого } v \in T, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В работе [5] для графов, допускающих k-факторы, было выведено условие на окрестности.

Теорема 3 [5]. *Пусть $k \geqslant 2$ – целое число, а G – связный граф порядка p, где $p \geqslant 9k - 1 - 4\sqrt{2(k-1)^2+2}$. Предположим, что kp четно и $\delta(G) \geqslant k$. Если G удовлетворяет условию*

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \geqslant \frac{p+k-2}{2}$$

для любой пары несмежных вершин $u,v \in V(G)$, то G допускает k-фактор.

Авторы работы [6] обобщили теорему 3 и получили условие на окрестности для графов, допускающих дробные k-факторы.

Теорема 4 [6]. *Пусть $k \geqslant 1$ – целое число, и пусть G является связным графом порядка p, где $p \geqslant 9k - 1 - 4\sqrt{2(k-1)^2+2}$, а $\delta(G) \geqslant k$. Если G удовлетворяет условию*

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \geqslant \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p+k-2}{2}\right\}$$

для любой пары несмежных вершин u,v из G, то G допускает дробный k-фактор.

В работах многих авторов были получены и другие результаты о факторах [7–17] и дробных факторах [18–29] графов. Отметим, что дробный (g,f)-фактор G с индикаторной функцией h является (g,f)-фактором графа G, если $h(e) \in \{0,1\}$ для любого $e \in E(G)$; (g,f)-фактор называется просто k-фактором, а дробный (g,f)-фактор называется просто дробным k-фактором, если $g(x) = f(x) = k$ для любого $x \in V(G)$. Тем самым, понятие дробного (g,f)-фактора (соответственно, дробного k-фактора) является обобщением понятия (g,f)-фактора (соответственно, k-фактора). Более того, нетрудно видеть, что понятие свойства $E(m,n)$ относительно дробного (g,f)-фактора является обобщением понятия дробного (g,f)-фактора. Поэтому мы естественным образом обобщим теоремы 3, 4 и выведем условие на окрестности для графов, обладающих свойством $E(1,n)$ относительно дробного (g,f)-фактора.

Теорема 5. *Пусть a,b,r,n – неотрицательные целые числа, такие что $2 \leqslant a \leqslant b-r$. Рассмотрим граф G порядка p, где*

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r},$$

а функции $g,f\colon V(G) \to Z$ таковы, что $a \leqslant g(x) \leqslant f(x)-r \leqslant b-r$ для любого $x \in V(G)$. Если G удовлетворяет условиям

$$\delta(G) \geqslant \frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}$$

и

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \geqslant \frac{(b-r)p+2}{a+b}$$

для каждой пары u,v из G, то G обладает свойством $E(1,n)$ относительно дробного (g,f)-фактора.

Граф G называется дробным (g,f)-покрытым графом, если для любого $e \in E(G)$ существует дробный (g,f)-фактор F_h, удовлетворяющий условию $h(e) = 1$. Если в теореме 5 положить $n = 0$, то получаем

Следствие 1. *Пусть a,b,r – неотрицательные целые числа, такие что $2 \leqslant a \leqslant b-r$. Рассмотрим граф G порядка p, где*

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b-1)+2}{a+r},$$

а функции $g,f\colon V(G) \to Z$ таковы, что $a \leqslant g(x) \leqslant f(x)-r \leqslant b-r$ для любого $x \in V(G)$. Если G удовлетворяет условиям

$$\delta(G) \geqslant \frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}$$

и

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \geqslant \frac{(b-r)p+2}{a+b}$$

для каждой пары несмежных вершин u,v из G, то G является дробным (g,f)-покрытым графом.

Следствие 1 похоже на следствие 2 недавней работы [22], однако следствие 1 дает потенциально лучший результат, поскольку оно использует размер объединения окрестностей, а не максимум из степеней вершин.

Если $g(x) \equiv f(x) \equiv k$ в теореме 5, то получаем следующий результат.

С л е д с т в и е 2. *Пусть n и $k \geqslant 2$ – неотрицательные целые числа, и пусть G – граф порядка p, где $p \geqslant 4(2k+n-1)+\dfrac{2}{k}$. Если G удовлетворяет условиям*

$$\delta(G) \geqslant k+3+\frac{2}{k}$$

и

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| \geqslant \frac{kp+2}{2k}$$

для каждой пары несмежных вершин u, v из G, то G обладает свойством $E(1,n)$ относительно дробного k-фактора.

§ 2. Доказательство теоремы 5

Предположим, что G удовлетворяет условиям теоремы 5, но не обладает свойством $E(1,n)$ относительно дробного (g,f)-фактора. Тогда существует множество независимых ребер $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и ребро e из G, такие что граф G не допускает (g,f)-фактора F_h с $h(e_i)=0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $h(e)=1$. Обозначим $N=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $H=G-N$, где N – множество независимых ребер графа G. Ясно, что H не обладает свойством $E(1,0)$ относительно дробного (g,f)-фактора. В силу теоремы 2 существует подмножество вершин $S \subseteq V(H)$, удовлетворяющее соотношению

$$\gamma_H(S,T) = f(S)+d_{H-S}(T)-g(T) \leqslant \varepsilon(S,T)-1, \tag{1}$$

где $T=\{x:\ x \in V(H)\setminus S,\ d_{H-S}(x) \leqslant g(x)\}$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Справедлива оценка $|T| \geqslant 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $|T|=0$, то согласно (1) получаем

$$\begin{aligned}&\varepsilon(S,T)-1 \geqslant \gamma_H(S,T) = f(S)+d_{H-S}(T)-g(T) \geqslant f(S) \geqslant\\ &\ \geqslant (a+r)|S| \geqslant |S| \geqslant \varepsilon(S,T),\end{aligned}$$

что приводит к противоречию. Далее будем предполагать, что $|T|=1$. Положим $T=\{t\}$. Тогда из соотношений $H=G-N$ и

$$\delta(G) \geqslant \frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}$$

следует, что

$$\begin{aligned}&\gamma_H(S,T) = f(S)+d_{H-S}(T)-g(T) = f(S)+d_{H-S}(t)-g(t) \geqslant\\ &\ \geqslant (a+r)|S|+d_{G-S}(t)-1-(b-r) \geqslant (a+r)|S|+d_G(t)-|S|-1-(b-r) \geqslant\\ &\ \geqslant (a+r-1)|S|+\delta(G)-(b-r+1) \geqslant\\ &\ \geqslant (a+r-1)|S|+\frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}-(b-r+1) =\\ &\ = (a+r-1)|S|+\frac{(b-a-r)(b-r+1)+a+b+2-r}{a+r} >\\ &\ > (a+r-1)|S| \geqslant |S| \geqslant \varepsilon(S,T),\end{aligned}$$

что противоречит неравенству (1). Стало быть, $|T| \geqslant 2$. ▲

П р е д л о ж е н и е 2. *Справедливо неравенство*

$$(b-r)|T| > (a+r)|S|-2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $(b-r)|T| \leqslant (a+r)|S|-2$, то из (1) и $\varepsilon(S,T) \leqslant 2$ следует, что

$$\begin{aligned}\varepsilon(S,T)-1 \geqslant \gamma_H(S,T) = f(S)+d_{H-S}(T)-g(T) \geqslant f(S)-g(T) \geqslant \\ \geqslant (a+r)|S|-(b-r)|T| \geqslant (b-r)|T|+2-(b-r)|T| = 2 \geqslant \varepsilon(S,T),\end{aligned}$$

что приводит к противоречию. ▲

П р е д л о ж е н и е 3. *Справедливо неравенство*

$$|S| < \frac{(b-r)p+2}{a+b}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом предложения 2 и того, что $|S|+|T| \leqslant p$, получаем оценку

$$(b-r)p \geqslant (b-r)(|S|+|T|) > (b-r)|S|+(a+r)|S|-2 = (a+b)|S|-2,$$

из которой следует, что

$$|S| < \frac{(b-r)p+2}{a+b}. \quad ▲$$

П р е д л о ж е н и е 4. *Для всякого $x \in T$ верно неравенство*

$$d_{G-S}(x) \leqslant d_{H-S}(x)+1 \leqslant g(x)+1 \leqslant b-r+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $N = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ является множеством независимых ребер G и $H = G-N$. Значит,

$$d_{G-S}(x) \leqslant d_{H-S}(x)+1$$

для любого $x \in T$. Таким образом, по определению T имеем

$$d_{G-S}(x) \leqslant d_{H-S}(x)+1 \leqslant g(x)+1 \leqslant b-r+1$$

для всякого $x \in T$. ▲

П р е д л о ж е н и е 5. *Справедливо неравенство*

$$d_{H-S}(T) \geqslant d_{G-S}(T) - \min\{2n, |T|\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$D = V(G) \setminus (S \cup T)$$

и

$$E_G(T) = \{e:\ e = xy \in E(G),\ x, y \in T\}.$$

Пусть $s \leqslant n$ – два целых неотрицательных числа. Заметим, что N является множеством независимых ребер G. Положим $N = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где $e_i = u_i v_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Запишем $N \cap E_G(T) = \{u_1v_1, \ldots, u_rv_r\}$ и $N \cap E_G(T, D) = \{u_{r+1}v_{r+1}, \ldots, u_sv_s\}$. Очевидно,

$$2|N \cap E_G(T)| + |N \cap E_G(T, D)| = 2r + (s-r) = r+s$$

и

$$|T| \geqslant 2r + (s-r) = r+s.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$2|N \cap E_G(T)| + |N \cap E_G(T,D)| \leqslant |T|.$$

Легко видеть, что $2|N \cap E_G(T)| + |N \cap E_G(T,D)| \leqslant \min\{2n, |T|\}$. Стало быть, мы получаем, что

$$d_{H-S}(T) = d_{G-N-S}(T) = d_{G-S}(T) - (2|N \cap E_G(T)| + |N \cap E_G(T,D)|) \geqslant$$
$$\geqslant d_{G-S}(T) - \min\{2n, |T|\}. \quad \blacktriangle$$

Отметим, что $T \neq \varnothing$ по предложению 1. Таким образом, можно определить

$$h_1 = \min\{d_{G-S}(x) : \, x \in T\}$$

и

$$\rho = |\{x : \, x \in T, \, d_{G-S}(x) = 0\}|.$$

Пусть $x_1 \in T$, где $d_{G-S}(x_1) = h_1$. Если $T \setminus N_T[x_1] \neq \varnothing$, то зададим

$$h_2 = \min\{d_{G-S}(x) : \, x \in T \setminus N_T[x_1]\}$$

и выберем $x_2 \in T$ так, что $d_{G-S}(x_2) = h_2$.

С учетом предложения 4 и определений h_1, h_2 и T легко видеть, что

$$0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant b - r + 1.$$

Далее рассмотрим три случая.

Случай 1: $\rho \geqslant 2$.

В этом случае существуют по меньшей мере две вершины $x, y \in T$, такие что $d_{G-S}(x) = d_{G-S}(y) = 0$ и $xy \notin E(G)$. Согласно предложению 3 и предположению теоремы 5 получаем

$$\frac{(b-r)p+2}{a+b} \leqslant |N_G(x) \cup N_G(y)| \leqslant d_{G-S}(x) + d_{G-S}(y) + |S| = |S| < \frac{(b-r)p+2}{a+b},$$

что является противоречием.

Случай 2: $\rho = 1$.

Заметим, что $d_{G-S}(x_1) = h_1$ и $d_{G-S}(x_2) = h_2$. Очевидно, $h_1 = 0$ и $|N_T[x_1]| = 1$. Из предложения 1 и равенства $\rho = 1$ следует, что $T \setminus N_T[x_1] \neq \varnothing$ и $1 \leqslant h_2 \leqslant b - r + 1$. Очевидно, что $x_1 x_2 \notin E(G)$. Тогда с учетом предположения теоремы 5 имеем

$$\frac{(b-r)p+2}{a+b} \leqslant |N_G(x_1) \cup N_G(x_2)| \leqslant d_{G-S}(x_1) + d_{G-S}(x_2) + |S| = h_2 + |S|,$$

откуда следует неравенство

$$|S| \geqslant \frac{(b-r)p+2}{a+b} - h_2. \tag{2}$$

Случай 2.1: $h_2 = b - r + 1$.

П р е д л о ж е н и е 6. *Верно следующее неравенство*:

$$\frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r} > \frac{(a+b)((a+r+1)(b-r+1)+2) - 2(a+r)}{(a+r)(b-r)}.$$

Доказательство. Из неравенств $2 \leqslant a \leqslant b-r$ и $n \geqslant 0$ следует, что

$$\begin{aligned}
&(b-r)(2(a+b)(a+b+n-1)+2)-\\
&-((a+b)((a+r+1)(b-r+1)+2)-2(a+r))=\\
&=2(a+b)(a+b+n-1)(b-r)-(a+b)(a+r+1)(b-r+1)=\\
&=(a+b)(b-r)(a+2b+2n-r-3)-(a+b)(a+r+1)\geqslant\\
&\geqslant 2(a+b)(a+2b+2n-r-3)-(a+b)(a+r+1)\geqslant\\
&\geqslant 2(a+b)(a+2(2+r)-r-3)-(a+b)(a+r+1)=(a+b)(a+r+1)>0,
\end{aligned}$$

откуда вытекает требуемая оценка. ▲

Заметим, что

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r} > \frac{(a+b)((a+r+1)(b-r+1)+2)-2(a+r)}{(a+r)(b-r)}$$

по предложению 6. В свете соотношений (1), (2) и предложения 5 получаем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(S,T)-1 \geqslant \gamma_H(S,T)=f(S)+d_{H-S}(T)-g(T)\geqslant\\
&\geqslant f(S)+d_{G-S}(T)-\min\{2n,|T|\}-g(T)\geqslant\\
&\geqslant (a+r)|S|+h_2(|T|-1)-|T|-(b-r)|T|=\\
&=(a+r)|S|-(b-r+1-h_2)|T|-h_2\geqslant\\
&\geqslant (a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_2\right)-h_2=\\
&=(a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-(b-r+1)\right)-(b-r+1)=\\
&=\left(\frac{(a+r)(b-r)p+2(a+r)}{a+b}-(a+r)(b-r+1)\right)-(b-r+1)>\\
&>\frac{(a+b)((a+r+1)(b-r+1)+2)-2(a+r)+2(a+r)}{a+b}-\\
&-(a+r+1)(b-r+1)=2\geqslant\varepsilon(S,T),
\end{aligned}$$

что приводит к противоречию.

Случай 2.2: $1 \leqslant h_2 \leqslant b-r$.

С учетом (2), предложения 5 и соотношений $|S|+|T| \leqslant p$ и

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\gamma_H(S,T)=f(S)+d_{H-S}(T)-g(T)\geqslant\\
&\geqslant f(S)+d_{G-S}(T)-\min\{2n,|T|\}-g(T)\geqslant\\
&\geqslant (a+r)|S|+h_2(|T|-1)-2n-(b-r)|T|=\\
&=(a+r)|S|-(b-r-h_2)|T|-h_2-2n\geqslant\\
&\geqslant (a+r)|S|-(b-r-h_2)(p-|S|)-h_2-2n=\\
&=(a+b-h_2)|S|-(b-r-h_2)p-h_2-2n\geqslant\\
&\geqslant (a+b-h_2)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_2\right)-(b-r-h_2)p-h_2-2n,
\end{aligned}$$

т.е.

$$\gamma_H(S,T) \geqslant (a+b-h_2)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_2\right)-(b-r-h_2)p-h_2-2n. \tag{3}$$

Положим

$$\varphi(h_2)=(a+b-h_2)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_2\right)-(b-r-h_2)p-h_2-2n.$$

Поскольку

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r} > \frac{(a+b)(a+b-1)+2}{a+r}$$

и $1 \leqslant h_2 \leqslant b-r$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi'(h_2) &= -\frac{(b-r)p+2}{a+b}+h_2-a-b+h_2+p-1=\\ &=\frac{(a+r)p-2}{a+b}+2h_2-a-b-1 \geqslant \frac{(a+r)p-2}{a+b}-a-b+1>\\ &>\frac{(a+b)(a+b-1)+2-2}{a+b}-a-b+1=0.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi(h_2)$ достигает своего минимального значения в точке $h_2=1$. Тогда, учитывая неравенства (3) и

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r} > \frac{(a+b)(a+b+2n)+2}{a+r},$$

получаем

$$\begin{aligned}&\gamma_H(S,T) \geqslant \varphi(h_2) \geqslant \varphi(1)=\\ &=(a+b-1)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-1\right)-(b-r-1)p-1-2n=\\ &=\frac{(a+r)p-2}{a+b}-a-b-2n+2>\\ &>\frac{(a+b)(a+b+2n)+2-2}{a+b}-a-b-2n+2=2 \geqslant \varepsilon(S,T),\end{aligned}$$

что противоречит (1).

Случай 3: $\rho=0$.

Случай 3.1: $T=N_T[x_1]$.

В этом случае имеем

$$|T|=|N_T[x_1]| \leqslant d_{G-S}(x_1)+1=h_1+1 \leqslant b-r+2. \tag{4}$$

Отметим, что $\delta(G) \leqslant d_G(x_1) \leqslant d_{G-S}(x_1)+|S|=h_1+|S|$. Таким образом, получаем

$$|S| \geqslant \delta(G)-h_1 \geqslant \frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}-h_1. \tag{5}$$

Поскольку $\rho=0$, имеем $1 \leqslant h_1 \leqslant b-r+1$. Используя (1), (4), (5) и предложение 5, получаем

$$\varepsilon(S,T)-1 \geqslant \gamma_H(S,T)=f(S)+d_{H-S}(T)-g(T) \geqslant$$

$$\geqslant f(S)+d_{G-S}(T)-\min\{2n,|T|\}-g(T)\geqslant$$
$$\geqslant (a+r)|S|+h_1|T|-|T|-(b-r)|T|=(a+r)|S|-(b-r+1-h_1)|T|\geqslant$$
$$\geqslant (a+r)\left(\frac{(b+1)(b-r+2)-b+a}{a+r}-h_1\right)-(b-r+1-h_1)(b-r+2)=$$
$$=r(b-r+2)-b+a+(b-a-r)h_1-rh_1+2h_1\geqslant$$
$$\geqslant r(b-r+2)-b+a+b-a-r-r(b-r+1)+2=2\geqslant \varepsilon(S,T),$$

что является противоречием.

Случай 3.2: $T\neq N_T[x_1]$.

Очевидно, существует $x_2\in T\setminus N_T[x_1]$, такое что $d_{G-S}(x_2)=h_2$. Легко видеть, что $x_1x_2\notin E(G)$. По предположению теоремы 5 получаем неравенство

$$\frac{(b-r)p+2}{a+b}\leqslant |N_G(x_1)\cup N_G(x_2)|\leqslant d_{G-S}(x_1)+d_{G-S}(x_2)+|S|=h_1+h_2+|S|,$$

из которого вытекает оценка

$$|S|\geqslant \frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_1-h_2. \tag{6}$$

Поскольку $\rho=0$, имеем $1\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant b-r+1$. Заметим, что $|N_T[x_1]|\leqslant h_1+1$. Рассмотрим три случая возможных значений h_1 и h_2.

Случай 3.2.1: $1\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant b-r$.

С учетом (6), предположения 5 и неравенства $|S|+|T|\leqslant p$ получаем

$$\gamma_H(S,T)=f(S)+d_{H-S}(T)-g(T)\geqslant$$
$$\geqslant f(S)+d_{G-S}(T)-\min\{2n,|T|\}-g(T)\geqslant$$
$$\geqslant (a+r)|S|+h_1|N_T[x_1]|+h_2(|T|-|N_T[x_1]|)-2n-(b-r)|T|=$$
$$=(a+r)|S|+(h_1-h_2)|N_T[x_1]|-(b-r-h_2)|T|-2n\geqslant$$
$$\geqslant (a+r)|S|+(h_1-h_2)(h_1+1)-(b-r-h_2)(p-|S|)-2n=$$
$$=(a+b-h_2)|S|+(h_1-h_2)(h_1+1)-(b-r-h_2)p-2n\geqslant$$
$$\geqslant (a+b-h_2)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_1-h_2\right)+$$
$$+(h_1-h_2)(h_1+1)-(b-r-h_2)p-2n.$$

Положим

$$F(h_1,h_2)=(a+b-h_2)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b}-h_1-h_2\right)+(h_1-h_2)(h_1+1)-$$
$$-(b-r-h_2)p-2n.$$

Таким образом,

$$\gamma_H(S,T)\geqslant F(h_1,h_2). \tag{7}$$

Из неравенств

$$p\geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r}>\frac{(a+b)(a+b-1)+2}{a+r}$$

и $1 \leqslant h_2 \leqslant b-r$ следует, что

$$\frac{\partial F(h_1,h_2)}{\partial h_2} = -\frac{(b-r)p+2}{a+b} + h_1 + h_2 - a - b + h_2 - h_1 - 1 + p =$$
$$= \frac{(a+r)p-2}{a+b} - a - b + 2h_2 - 1 > \frac{(a+b)(a+b-1)+2-2}{a+b} - a - b + 1 = 0.$$

Поэтому согласно (7) получаем неравенство

$$\gamma_H(S,T) \geqslant F(h_1,h_2) \geqslant F(h_1,h_1). \tag{8}$$

С учетом того, что

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r} > \frac{2(a+b)(a+b-2)+2}{a+r}$$

и $1 \leqslant h_1 \leqslant b-r$, выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\frac{dF(h_1,h_1)}{dh_1} = -\frac{(b-r)p+2}{a+b} + 2h_1 - 2(a+b-h_1) + p =$$
$$= \frac{(a+r)p-2}{a+b} + 4h_1 - 2(a+b) >$$
$$> \frac{2(a+b)(a+b-2)+2-2}{a+b} + 4 - 2(a+b) = 0,$$

из которой следует неравенство

$$F(h_1,h_1) \geqslant F(1,1). \tag{9}$$

Здесь мы использовали, что $1 \leqslant h_1 \leqslant b-r$. Из (8), (9) и неравенства

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r}$$

следует, что

$$\gamma_H(S,T) \geqslant F(h_1,h_1) \geqslant F(1,1) =$$
$$= (a+b-1)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b} - 2\right) - (b-r-1)p - 2n =$$
$$= \frac{(a+r)p-2}{a+b} - 2(a+b-2) - 2n \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2-2}{a+b} - 2(a+b-2) - 2n = 2 \geqslant \varepsilon(S,T).$$

Получаем противоречие с (1).

Случай 3.2.2: $1 \leqslant h_1 \leqslant b-r-1$ и $h_2 = b-r+1$.

Из (6), предложений 1 и 5, а также неравенств

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r}$$

и $2 \leqslant a \leqslant b-r$ следует, что

$$\gamma_H(S,T) = f(S) + d_{H-S}(T) - g(T) \geqslant$$
$$\geqslant f(S) + d_{G-S}(T) - \min\{2n, |T|\} - g(T) \geqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant (a+r)|S| + h_1|N_T[x_1]| + h_2(|T| - |N_T[x_1]|) - 2n - (b-r)|T| = \\
&= (a+r)|S| + (h_1 - h_2)|N_T[x_1]| - (b-r-h_2)|T| - 2n \geqslant \\
&\geqslant (a+r)|S| + (h_1 - h_2)(h_1+1) + |T| - 2n \geqslant \\
&\geqslant (a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b} - h_1 - h_2\right) + (h_1-h_2)(h_1+1) + 2 - 2n = \\
&= (a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b} - h_1 - (b-r+1)\right) + \\
&+ (h_1 - (b-r+1))(h_1+1) + 2 - 2n = \\
&= \frac{(b-r)(a+r)p + 2(a+r)}{a+b} - h_1(a+b-h_1) - (a+r+1)(b-r+1) + 2 - 2n \geqslant \\
&\geqslant \frac{(b-r)(2(a+b)(a+b+n-1)+2) + 2(a+r)}{a+b} - (b-r-1)(a+b-1) - \\
&- (a+r+1)(b-r+1) + 2 - 2n = (b-r)(b-r+2n-1) + 2 - 2n \geqslant \\
&\geqslant 2(2n+1) + 2 - 2n > 2 \geqslant \varepsilon(S,T).
\end{aligned}
$$

Полученное соотношение противоречит (1).

Случай 3.2.3: $h_1 = b - r$ и $h_2 = b - r + 1$.

Предложение 7. *Справедливо неравенство* $|T| \geqslant b+1$.

Доказательство. Предположим, что $|T| \leqslant b$. Отметим, что $h_1 = d_{G-S}(x_1)$. Таким образом,

$$|S| + h_1 = |S| + d_{G-S}(x_1) \geqslant d_G(x_1) \geqslant \delta(G),$$

т.е.

$$|S| \geqslant \delta(G) - h_1 \geqslant \frac{(b+1)(b-r+2) - b + a}{a+r} - (b-r). \tag{10}$$

Согласно (10), предложению 5 и неравенству $2 \leqslant a \leqslant b-r$ получаем следующую цепочку соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_H(S,T) = f(S) + d_{H-S}(T) - g(T) \geqslant \\
&\geqslant (a+r)|S| + d_{G-S}(T) - |T| - (b-r)|T| \geqslant \\
&\geqslant (a+r)|S| + h_1|T| - |T| - (b-r)|T| = (a+r)|S| - |T| \geqslant \\
&\geqslant (a+r)\left(\frac{(b+1)(b-r+2) - b + a}{a+r} - (b-r)\right) - b = \\
&= (b-r)(b+1-a-r) + a + 2 > 2 \geqslant \varepsilon(S,T),
\end{aligned}
$$

которая противоречит (1), что завершает доказательство предложения 7. ▲

Используя (6), предложения 5 и 7, а также соотношения

$$p \geqslant \frac{2(a+b)(a+b+n-1)+2}{a+r}$$

и $2 \leqslant a \leqslant b-r$, можно вывести, что

$$
\begin{aligned}
&\gamma_H(S,T) = f(S) + d_{H-S}(T) - g(T) \geqslant \\
&\geqslant f(S) + d_{G-S}(T) - \min\{2n, |T|\} - g(T) \geqslant \\
&\geqslant (a+r)|S| + h_1|N_T[x_1]| + h_2(|T| - |N_T[x_1]|) - 2n - (b-r)|T| = \\
&= (a+r)|S| + (h_1-h_2)|N_T[x_1]| + (h_2 - b + r)|T| - 2n \geqslant
\end{aligned}
$$

$$\geqslant (a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b} - h_1 - h_2\right) + (h_1-h_2)(h_1+1) +$$
$$+ (h_2 - b + r)(b+1) - 2n =$$
$$= (a+r)\left(\frac{(b-r)p+2}{a+b} - 2(b-r) - 1\right) - (b-r+1) + b + 1 - 2n =$$
$$= \frac{(b-r)(a+r)p + 2(a+r)}{a+b} - 2(b-r)(a+r) - a - 2n \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(b-r)(2(a+b)(a+b+n-1)+2) + 2(a+r)}{a+b} - 2(b-r)(a+r) - a - 2n =$$
$$= 2(b-r)(b-r+n-1) + 2 - a - 2n \geqslant 2a(n+1) + 2 - a - 2n > 2 \geqslant \varepsilon(S,T).$$

Полученные соотношения противоречат (1).

Случай 3.2.4: $h_1 = h_2 = b - r + 1$.

Из предложения 5 и $\varepsilon(S,T) \leqslant |S|$ следует цепочка соотношений

$$\gamma_H(S,T) = f(S) + d_{H-S}(T) - g(T) \geqslant (a+r)|S| + d_{G-S}(T) - |T| - (b-r)|T| \geqslant$$
$$\geqslant (a+r)|S| + h_1|T| - |T| - (b-r)|T| = (a+r)|S| \geqslant |S| \geqslant \varepsilon(S,T),$$

которая противоречит (1). Это завершает доказательство теоремы 5. ▲

§ 3. Замечание

Нижняя оценка на размер объединения окрестностей в теореме 5 является наилучшей из возможных в том смысле, что нельзя заменить $\frac{(b-r)p+2}{a+b}$ выражением $\frac{(b-r)p+2}{a+b} - 1$. Это можно проиллюстрировать следующим примером.

Пусть a, b, r и n – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $b - r = a \geqslant 2$. Построим граф

$$G = (a(t+n)K_2) \vee (2b(t+n)K_1)$$

порядка p, где t – достаточно большое целое число. Ясно, что $p = 2(a+b)(t+n)$ и

$$\frac{(b-r)p+2}{a+b} - 1 < |N_G(u) \cup N_G(v)| = 2a(t+n) = \frac{ap}{a+b} =$$
$$= \frac{(b-r)p}{a+b} < \frac{(b-r)p+2}{a+b}$$

для любых двух вершин $u, v \in V(2b(t+n)K_1)$. Очевидно также, что

$$|N_G(u) \cup N_G(v)| = 2b(t+n) + 2 > \frac{(b-r)p+2}{a+b} - 1$$

для любой пары несмежных вершин u, v графа $a(t+n)K_2$. Положим

$$S = V(a(t+n)K_2), \quad T = V(2b(t+n)K_1),$$
$$N = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq E(a(t+n)K_2), \quad H = G - N.$$

Тогда $|S| = 2a(t+n)$, $|T| = 2b(t+n)$ и $\varepsilon(S,T) = 2$. Пусть g, f являются целочисленными функциями с $g(x) = a$ и $f(x) = b$ для любого $x \in V(G)$. Тогда $d_{H-S}(x) = 0 < g(x)$ для всякого $x \in T$. Таким образом, получаем, что

$$\gamma_H(S,T) = f(S) + d_{H-S}(T) - g(T) = b|S| - a|T| =$$
$$= b(2a(t+n)) - a(2b(t+n)) = 0 < 2 = \varepsilon(S,T).$$

С учетом теоремы 2 граф H не обладает свойством $E(1,0)$ относительно дробного (g,f)-фактора, поэтому G не обладает свойством $E(1,n)$ относительно дробного (g,f)-фактора.

Авторы благодарят рецензентов за их конструктивные замечания по улучшению качества настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bondy J.A., Murty U.S.R.* Graph Theory. Berlin: Springer, 2008.
2. *Anstee R.P.* An Algorithmic Proof of Tutte's f-Factor Theorem // J. Algorithms. 1985. V. 6. № 1. P. 112–131.
3. *Liu G., Zhang L.* Fractional (g,f)-Factors of Graphs // Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.). 2001. V. 21. № 4. P. 541–545.
4. *Li Z., Yan G., Zhang X.* On Fractional (g,f)-Covered Graphs // OR Trans. (in Chinese). 2002. V. 6. № 4. P. 65–68.
5. *Iida T., Nishimura T.* Neighborhood Conditions and k-Factors // Tokyo J. Math. 1997. V. 20. № 2. P. 411–418.
6. *Zhou S., Liu H.* Neighborhood Conditions and Fractional k-Factors // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2). 2009. V. 32. № 1. P. 37–45.
7. *Liu H., Lu H.* A Degree Condition for a Graph to Have (a,b)-Parity Factors // Discrete Math. 2018. V. 341. № 1. P. 244–252.
8. *Plummer M.D.* Graph Factors and Factorization: 1985–2003: A Survey // Discrete Math. 2007. V. 307. № 7–8. P. 791–821.
9. *Zhou S.* Remarks on Orthogonal Factorizations of Digraphs // Int. J. Comput. Math. 2014. V. 91. № 10. P. 2109–2117.
10. *Zhou S.* Some Results about Component Factors in Graphs // RAIRO Oper. Res. 2019. V. 53. № 3. P. 723–730.
11. *Zhou S., Sun Z.* Binding Number Conditions for $P_{\geqslant 2}$-Factor and $P_{\geqslant 3}$-Factor Uniform Graphs // Discrete Math. 2020. V. 343. № 3. Article 111715 (6 pp.).
12. *Zhou S.Z., Sun Z.R.* Some Existence Theorems on Path Factors with Given Properties in Graphs // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2020. V. 36. № 8. P. 917–928.
13. *Zhou S., Sun Z., Liu H.* Sun Toughness and $P_{\geqslant 3}$-Factors in Graphs // Contrib. Discrete Math. 2019. V. 14. № 1. P. 167–174.
14. *Sun Z., Zhou S.* A Generalization of Orthogonal Factorizations in Digraphs // Inform. Process. Lett. 2018. V. 132. P. 49–54.
15. *Zhou S., Zhang T., Xu Z.* Subgraphs with Orthogonal Factorizations in Graphs // Discrete Appl. Math. 2020. V. 286. P. 29–34.
16. *Zhou S.* Remarks on Path Factors in Graphs // RAIRO Oper. Res. 2020. V. 54. № 6. P. 1827–1834.
17. *Zhou S., Yang F., Xu L.* Two Sufficient Conditions for the Existence of Path Factors in Graphs // Sci. Iran. D: Comput. Sci. Eng. Electr. Eng. 2019. V. 26. № 6. P. 3510–3514.
18. *Cai J., Wang X., Yan G.* A Note on the Existence of Fractional f-Factors in Random Graphs // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2014. V. 30. № 3. P. 677–680.
19. *Gao W., Guirao J.L.G., Wu H.* Two Tight Independent Set Conditions for Fractional (g,f,m)-Deleted Graphs Systems // Qual. Theory Dyn. Syst. 2018. V. 17. № 1. P. 231–243.
20. *Gao W., Guirao J.L.G., Chen Y.J.* A Toughness Condition for Fractional (k,m)-Deleted Graphs Revisited // Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). 2019. V. 35. № 7. P. 1227–1237.
21. *Gao W., Wang W., Dimitrov D.* Toughness Condition for a Graph to Be All Fractional (g,f,n)-Critical Deleted // Filomat. 2019. V. 33. № 9. P. 2735–2746.
22. *Lv X.* A Degree Condition for Fractional (g,f,n)-Critical Covered Graphs // AIMS Math. 2020. V. 5. № 2. P. 872–878.
23. *Wu J., Yuan J., Siddiqui M.K.* Independent Set Conditions for All Fractional (g,f,n',m)-Critical Deleted NFV Networks // J. Intell. Fuzzy Syst. 2018. V. 35. № 4. P. 4495–4502.

24. *Yuan Y., Hao R.-X.* A Degree Condition for Fractional $[a, b]$-Covered Graphs // Inform. Process. Lett. 2019. V. 143. P. 20–23.
25. *Yuan Y., Hao R.-X.* Toughness Condition for the Existence of All Fractional (a, b, k)-Critical Graphs // Discrete Math. 2019. V. 342. № 8. P. 2308–2314.
26. *Zhou S., Sun Z., Ye H.* A Toughness Condition for Fractional (k, m)-Deleted Graphs // Inform. Process. Lett. 2013. V. 113. № 8. P. 255–259.
27. *Zhou S., Liu H., Xu Y.* Binding Numbers for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // Proc. Rom. Acad. Ser. A Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci. 2020. V. 21. № 2. P. 115–121.
28. *Zhou S., Xu L., Xu Z.* Remarks on Fractional ID-k-Factor-Critical Graphs // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2019. V. 35. № 2. P. 458–464.
29. *Zhou S., Xu Y., Sun Z.* Degree Conditions for Fractional (a, b, k)-Critical Covered Graphs // Inform. Process. Lett. 2019. V. 152. Article 105838 (5 pp.).

Чжоу Сычжун
Школа естественных наук,
Научно-технологический университет Цзянсу,
Чжэньцзян, провинция Цзянсу, КНР
zsz_cumt@163.com
Сунь Чжижэнь
Школа математических наук,
Нанкинский нормальный университет, Нанкин, КНР
Пань Цюаньжу
Школа естественных наук,
Научно-технологический университет Цзянсу,
Чжэньцзян, провинция Цзянсу, КНР

Поступила в редакцию
21.02.2020
После доработки
30.05.2020
Принята к публикации
02.06.2020