ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 56 **2020** **Вып. 4**

УДК 621.391 : 519.176

© 2020 г. **П.А. Огарок, А.М. Райгородский**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ НЕКОТОРОГО ДИСТАНЦИОННОГО ГРАФА[1]

Изучается асимптотическое поведение числа независимости случайного подграфа определенного (r, s)-дистанционного графа. Представлены верхние и нижние оценки критической вероятности сохранения ребра, при которой происходит фазовый переход и в подграфе появляются большие новые независимые множества, которых в исходном графе не было.

Ключевые слова: случайный граф, дистанционный граф, число независимости.

DOI: 10.31857/S0555292320040051

§ 1. Введение, определения и формулировка основного результата

Рассмотрим множество $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ и натуральные числа r и s, $n > r > s$. Построим граф $G(n, r, s)$ следующим образом: его вершинами будут все r-элементные подмножества множества $[n]$, а ребро соединяет две вершины, мощность пересечения которых (как подмножеств) равна s.

Данное определение можно переформулировать и в линейно-алгебраических терминах. А именно, вершинами графа будут всевозможные векторы длины n из нулей и единиц, скалярный квадрат которых равен r, а ребро будет соединять две вершины, если скалярное произведение соответствующих векторов равно s.

Кроме того, вершины этого графа можно воспринимать как вершины n-мерного гиперкуба, и тогда ребра будут проводиться между вершинами на расстоянии ровно $\sqrt{2(r-s)}$. Поэтому графы $G(n, r, s)$ часто называются *дистанционными графами*.

Дистанционные графы естественным образом возникают в различных задачах дискретной математики: в задаче о раскраске метрического пространства (Нелсона – Эрдеша – Хадвигера, см. [1–4]), проблеме Борсука (см. [5–9]), задачах о числах Рамсея (см. [10, 11]), о кодах с одним запрещенным расстоянием (см. [12]) и о пересекающихся семействах множеств (см. [13–20]).

Частным случаем дистанционного графа является *кнезеровский* граф $K(n, r)$ – это граф $G(n, r, 0)$. Кнезеровские графы изучались, например, в работах [21–27].

Важным направлением исследования дистанционных графов является изучение поведения их числа независимости. *Число независимости* графа G, обыкновенно обозначаемое через $\alpha(G)$, – наибольшая мощность его *независимого множества*, т.е. такого подмножества его вершин, что никакие две вершины в нем не соединены ребром. Числа независимости дистанционных графов исследовались, например, в [28–30].

В данной статье будет исследоваться несколько другой тип случайных графов. Здесь этот граф будет обозначаться через $\widetilde{G}(n, r, s)$. Его вершинами являются те

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10014).

же самые r-элементные подмножества множества $[n]$, но ребра соединяют те пары вершин, мощность пересечения которых (как подмножеств) строго меньше s (а не равна, как в классическом дистанционном графе). Заметим, что кнезеровский граф $K(n,r)$ также является графом $\widetilde{G}(n,r,1)$.

Пусть множество $X \subset [n]$ состоит из s элементов. Рассмотрим семейство всех подмножеств множества $[n]$, состоящих из r элементов и содержащих X. Это семейство, мощность которого равна $\binom{n-s}{r-s}$, является независимым множеством вершин графа $\widetilde{G}(n,r,s)$. Мы будем называть это семейство *звездой* с центром в X, а само множество X – *базой* этой звезды. Отметим, что данное определение работает не только для графа $\widetilde{G}(n,r,s)$ – оно дано в теоретико-множественных терминах.

На языке графов $\widetilde{G}(n,r,s)$ очень удобно сформулировать известную теорему, которая отвечает на вопрос об асимптотическом поведении их числа независимости.

Теорема 1 (теорема Франкла). *Для заданных натуральных чисел r и s, $s<r$, существует такое $n_0 = n_0(r,s)$, что для всех $n \geqslant n_0$ все независимые множества в графе $\widetilde{G}(n,r,s)$ являются звездами или имеют мощность, по порядку величины меньшую $\binom{n-s}{r-s}$.*

Теперь определим *последовательность случайных подграфов*, построенную по последовательности графов. Пусть задана последовательность графов $G(n)$, где число вершин n-го элемента последовательности растет с ростом n, и функция *вероятности сохранения ребра $p = p(n)$*. Сохраним в каждом графе последовательности $G(n)$ каждое ребро независимо с вероятностью $p(n)$. Полученная таким образом последовательность случайных подграфов обозначается через $G_p(n)$.

Рассмотрим последовательность случайных подграфов, построенную по последовательности дистанционных графов. Как ведет себя число независимости случайного подграфа в последовательности в сравнении с числом независимости графа в исходной последовательности? В работе [31] был получен достаточно полный ответ на такой вопрос для кнезеровских графов. Более точно, была установлена истинность следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $r = r(n) = o(n^{\frac{1}{3}})$, $r > 2$. Пусть также фиксировано $\varepsilon > 0$. Обозначим*

$$p_c(n,r) := \frac{(r+1)\ln n - r\ln r}{\binom{n-1}{r-1}}.$$

Тогда:

(i) *При вероятности сохранения ребра*

$$p \geqslant (1+\varepsilon)p_c(n,r)$$

в графе $K_p(n,r)$ асимптотически почти наверное (с ростом n) мощность независимого множества максимального размера равна $\binom{n-1}{r-1}$, и все такие независимые множества в нем суть звезды.

(ii) *При вероятности сохранения ребра*

$$p \leqslant (1-\varepsilon)p_c(n,r)$$

в графе $K_p(n,r)$ асимптотически почти наверное (с ростом n) мощность независимого множества максимального размера не меньше $\binom{n-1}{r-1}+1$.

Эта теорема означает, что $p_c(n,r)$ – точная критическая вероятность сохранения ребра: если вероятность сохранения ребра в случайном подграфе кнезеровского графа больше нее, то число независимости этого подграфа совпадает с числом независимости исходного графа (и даже новых независимых множеств в подграфе не появляется), а если меньше, то оно резко растет.

Аналогичные вопросы рассматривались в работах [32–36].

Цель данной статьи – попробовать найти подобную критическую вероятность для графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ (с произвольным s). Более конкретно, в статье доказаны оценки этой вероятности сверху и снизу.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Для любых констант r и s, таких что $r > s$ и $r > 3$, при вероятности сохранения ребра*

$$p = p_1(n) = \frac{2s\binom{r}{s}\ln n}{\binom{n-s}{r-s}}$$

в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ асимптотически почти наверное (с ростом n) мощность независимого множества максимального размера равна $\binom{n-s}{r-s}$, и все такие независимые множества в нем суть звезды.

(ii) *Для любого $\varepsilon > 0$ и для любых констант r и s, таких что $r > s$, при вероятности сохранения ребра*

$$p = p_2(n) = \frac{(1-\varepsilon)(r+s)\ln n}{\binom{n-s}{r-s}}$$

в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ асимптотически почти наверное (с ростом n) мощность независимого множества максимального размера не меньше $\binom{n-s}{r-s}+1$.

Дальнейшая часть статьи устроена так. В § 2 вводятся обозначения и формулируются известные результаты, которые будут использоваться в доказательстве. В § 3 доказывается первая часть теоремы 3, а в § 4 – ее вторая часть. Доказательство построено по аналогии с работой [31]. Наконец, в § 5 приведены неформальные замечания, касающиеся предмета статьи.

§ 2. Обозначения и базовые теоремы

Во-первых, приведем известные оценки биномиальных коэффициентов и экспоненты, которые пригодятся в дальнейшем:

1. Для натуральных n и r, таких что $n > r$, верно

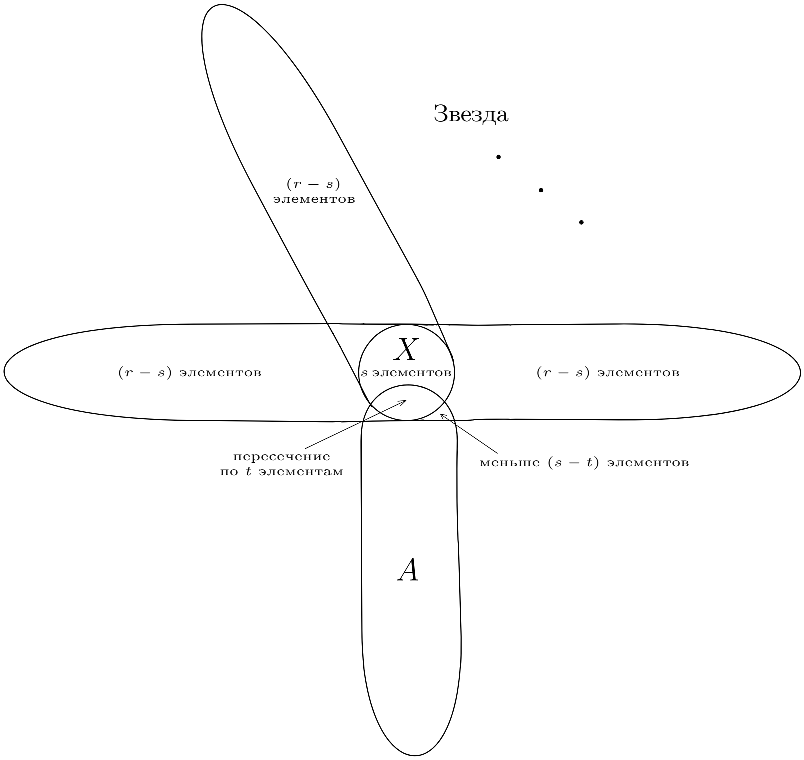
$$\left(\frac{n}{r}\right)^r \leqslant \binom{n}{r} \leqslant \frac{n^r}{r!} \leqslant \left(\frac{en}{r}\right)^r.$$

2. Для вещественного x, такого что $|x| \leqslant \frac{1}{2}$, верно

$$e^{x-x^2} \leqslant 1+x \leqslant e^x.$$

В дальнейшем для краткости записи будем обозначать число вершин графа $\widetilde{G}(n,r,s)$ через

$$V := \binom{n}{r},$$



а число вершин максимальной звезды – через

$$N := \binom{n-s}{r-s}.$$

Заметим, что

$$V \sim \frac{n^r}{r!}$$

и

$$N \sim \frac{n^{r-s}}{(r-s)!}.$$

Пусть задана звезда S_X с базой $X \subset \{1, 2, \dots, n\}$, а также вершина A графа $\widetilde{G}(n, r, s)$, пересекающая множество X по t, $t < s$, элементам (см. рисунок). Подсчитаем число вершин звезды S_X, соединенных с вершиной A ребром. Это число мы обозначим через M_t.

Вершина A соединена ребром с теми вершинами звезды S_X, с которыми она пересекается меньше чем по s элементам. Для того чтобы получить все вершины звезды, с которыми она соединена ребром, надо добавить к множеству X еще $r - s$ элементов так, чтобы пересечение этой добавки с множеством $A \setminus X$ имело мощность строго меньше $s - t$ (в нижеследующей формуле его мощность обозначена через u). Значит,

$$M_t = \sum_{u=0}^{s-t-1} \binom{r-t}{u} \binom{n-r-s+t}{r-s-u}.$$

Пользуясь вышеприведенными оценками на биномиальные коэффициенты, можно записать

$$M_t \sim \sum_{u=0}^{s-t-1} \frac{(r-t)^u}{u!} \frac{(n-r-s+t)^{r-s-u}}{(r-s-u)!}.$$

В этой сумме главным является первое слагаемое (при $u=0$), равное

$$\frac{(n-r-s+t)^{r-s}}{(r-s)!} \sim \frac{n^{r-s}}{(r-s)!} \sim N.$$

В прочих слагаемых n возводится в меньшую степень, поэтому для всякого t имеем

$$M_t \sim N.$$

Наконец, приведем полезное определение, которое будет использоваться в дальнейшем. Пусть задано некоторое семейство D вершин графа $\widetilde{G}(n,r,s)$. Будем называть *степенью* семейства D максимальную (по всем звездам) мощность пересечения D со звездой.

§ 3. Верхняя оценка критической вероятности сохранения ребра

Пусть даны натуральные числа r и s, такие что $r > s$, и пусть

$$p = p(n) = \frac{2s\binom{r}{s}\ln n}{\binom{n-s}{r-s}}.$$

Докажем, что при этих условиях с вероятностью, стремящейся к 1, мощность независимого множества максимального размера в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ равна N, и все такие независимые множества суть звезды.

Для этого определим на графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ случайные величины X_i, $i \in \mathbb{N}$, и Y так, что из их одновременного равенства нулю следует желаемое, и докажем, что они действительно одновременно равны нулю с вероятностью, стремящейся к 1.

А именно, пусть для каждого натурального i случайная величина X_i равна числу независимых множеств мощности N вершин графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$, степень которых равна $N-i$. Пусть также случайная величина Y равна числу независимых множеств мощности $N+1$ вершин графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$, степень которых равна N. Можно заметить, что Y – это попросту число независимых множеств мощности $N+1$, содержащих целую звезду. Если все X_i равны 0, то всякое независимое множество в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ мощности хотя бы N содержит целую звезду, а если вдобавок $Y=0$, то независимых множеств мощности больше N в графе нет.

Итак, нам надо доказать, что с вероятностью, стремящейся к 1, одновременно все X_i и Y равны нулю. В нижеследующих пунктах мы по очереди с ними разберемся.

3.1. Доказательство того, что $Y = 0$. Для доказательства того, что асимптотически почти наверное $Y = 0$, мы убедимся в том, что математическое ожидание $\mathbf{E}(Y)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, и воспользуемся неравенством Маркова: $\mathbf{P}(Y > 0) \leqslant \mathbf{E}(Y)$, т.е. $\mathbf{P}(Y > 0) \to 0$ при $n \to \infty$, что и требуется.

Вычислим $\mathbf{E}(Y)$. Для того чтобы получить независимое множество мощности $N+1$, содержащее целую звезду, надо выбрать базу этой звезды (обозначим ее через X, она имеет мощность s), построить по этой базе звезду и добавить еще одну вершину A, которая в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ не соединена ни с одной из вершин звезды.

Базу мы выбираем $\binom{n}{s}$ способами, новую вершину – $(V - N)$ способами. Если последняя пересекает базу по $t < s$ элементам, то в графе $\widetilde{G}(n,r,s)$ она соединена в точности с M_t вершинами звезды. Все эти ребра должны быть удалены в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$. Значит, поскольку $M_t = (1+o(1))N$ для любого $t < s$, то

$$\mathbf{E}(Y) = \binom{n}{s}(V-N)(1-p)^{(1+o(1))N}.$$

Согласно ранее приведенным оценкам

$$\mathbf{E}(Y) \leqslant \left(\frac{en}{s}\right)^s \left(\frac{en}{r}\right)^r e^{-(1+o(1))pN} \leqslant$$
$$\leqslant e^{(r+s)(1+\ln n)-s\ln s-r\ln r-2(1+o(1))s\binom{r}{s}\ln n} = O\Big(n^{(r+s)-2(1+o(1))s\binom{r}{s}}\Big) = o(1).$$

Итак, $\mathbf{E}(Y) \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось.

3.2. Доказательство того, что $X_i = 0$. Для доказательства того, что асимптотически почти наверное все $X_i = 0$, рассмотрим три случая: очень маленькое i, маленькое i и большое i.

Случай 1: очень маленькое i. Выберем малое положительное ε (например, можно считать, что $\varepsilon = 1/10$). Оно будет использоваться в этом и следующем случаях.

Пусть $i \leqslant \varepsilon N$. Оценим сверху вероятность того, что какая-то из случайных величин X_i больше 0, суммой вероятностей

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon N} \mathbf{P}(X_i > 0).$$

Оценим каждое слагаемое в этой сумме членом убывающей геометрической прогрессии, а затем оценим всю прогрессию удвоенным первым членом.

Зафиксируем i и оценим $\mathbf{P}(X_i > 0)$. В данном диапазоне значений i простая оценка этой вероятности по неравенству Маркова через математическое ожидание X_i не приводит к успеху, поэтому воспользуемся более сложной техникой. А именно, для всякого $j \geqslant i$ введем на графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ случайную величину $X_{i,j}$, равную числу максимальных (к которым нельзя добавить никакую вершину) независимых множеств вершин мощности $N - i + j$, степень которых равна $N - i$. Теперь же воспользуемся неравенством Маркова и получим оценку

$$\mathbf{P}(X_i > 0) \leqslant \sum_{j \geqslant i} \mathbf{E}(X_{i,j}).$$

Каждое слагаемое в этой сумме мы также оценим членом убывающей геометрической прогрессии, а затем оценим всю прогрессию удвоенным первым членом.

Оценим $\mathbf{E}(X_{i,j})$. Напомним, что мы хотим получить максимальное независимое множество вершин мощности $N - i + j$, степень которого равна $N - i$. Для этого нужно выбрать базу X той звезды S_X, с которой будет достигаться пересечение по $N - i$ вершинам, затем те i вершин этой звезды S_X, которые не войдут в наше множество, и наконец, те j вершин не из S_X, которые войдут в наше множество. Обозначим первое из этих семейств через A_1, а второе – через A_2. При этом также необходимо, чтобы всякая вершина из A_1 была соединена в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ хотя бы с одной вершиной из A_2, а ребер между вершинами из $S_X \setminus A_1$ и вершинами из A_2 в этом графе не было, потому что иначе построенное множество будет не независимым или не максимальным независимым.

Пусть задана вершина не из звезды S_X, которая (как множество) пересекает базу X этой звезды по $t < s$ элементам. Тогда эта вершина соединена ровно с M_t вершинами звезды S_X. Значит, число ребер в графе $\widetilde{G}(n,r,s)$, ведущих из множества A_2 в множество $S_X \setminus A_1$, не меньше $j(M_t - i)$ для некоторого t, которое является максимальной мощностью пересечения вершины из A_2 и базы X звезды S_X. В графе $\widetilde{G}(n,r,s)$ вершина из A_1 имеет не более j соседей в A_2, т.е. вероятность того, что в графе $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ у этой вершины остался там сосед, не превосходит jp.

Объединяя вышесказанное и пользуясь тем, что $M_t = (1+o(1))N$ для всех $t < s$, получаем оценку

$$\mathbf{E}(X_{i,j}) \leqslant \binom{n}{s}\binom{N}{i}\binom{V-N}{j}(1-p)^{j((1+o(1))N-i)}(jp)^i.$$

Для того чтобы оценить эту величину членом убывающей геометрической прогрессии, оценим сверху отношение верхних оценок для $\mathbf{E}(X_{i,j+1})$ и $\mathbf{E}(X_{i,j})$. Оно не больше

$$\frac{V-N-j}{j+1}(1-p)^{(1+o(1))N-i}\Big(1+\frac{1}{j}\Big)^i.$$

При $i \leqslant \varepsilon N$ и $j \geqslant i$ эта величина не превосходит

$$Ve^{-p((1+o(1))N-i)}e \leqslant e\left(\frac{en}{r}\right)^r e^{-(1-\varepsilon)(1+o(1))Np} =$$
$$= e\left(\frac{en}{r}\right)^r e^{-2(1+o(1))(1-\varepsilon)s\binom{r}{s}\ln n} = O\Big(n^r n^{-2(1+o(1))(1-\varepsilon)s\binom{r}{s}}\Big) = o(1).$$

Итак, при достаточно больших n действительно можно оценить

$$\mathbf{P}(X_i > 0) \leqslant \sum_{j\geqslant i}\mathbf{E}(X_{i,j}) \leqslant 2\,\mathbf{E}(X_{i,i}) \leqslant$$
$$\leqslant 2\binom{n}{s}\binom{N}{i}\binom{V-N}{i}(1-p)^{i((1+o(1))N-i)}(ip)^i \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{en}{s}\right)^s\left(\frac{eN}{i}\right)^i\left(\frac{e(V-N)}{i}\right)^i e^{-pi((1+o(1))N-i)}\left(\frac{2is\binom{r}{s}\ln n}{N}\right)^i.$$

Сокращая все лишнее, получаем, что эта величина равна

$$2\left(\frac{en}{s}\right)^s e^{2i}\left(2s\binom{r}{s}\ln n\right)^i\left(\frac{V-N}{i}\right)^i e^{-pi((1+o(1))N-i)}.$$

Подставим $p = \dfrac{2s\binom{r}{s}\ln n}{N}$ и оценим $i \leqslant \varepsilon N$:

$$e^{-pi((1+o(1))N-i)} = n^{-2is\binom{r}{s}\frac{((1+o(1))N-i)}{N}} \leqslant n^{-2is\binom{r}{s}((1+o(1))-\varepsilon)} \leqslant n^{-(1+o(1))is\binom{r}{s}}.$$

Значит,

$$\mathbf{P}(X_i > 0) \leqslant 2\left(\frac{en}{s}\right)^s e^{2i}\left(2s\binom{r}{s}\ln n\right)^i\left(\frac{V-N}{i}\right)^i n^{-i(1+o(1))s\binom{r}{s}} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{en}{s}\right)^s e^{2i}\left(2s\binom{r}{s}\ln n\right)^i V^i n^{-i(1+o(1))s\binom{r}{s}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{en}{s}\right)^s\left(2e^2 s\binom{r}{s}\ln n\left(\frac{en}{r}\right)^r n^{-(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^i \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(2n^s e^{2+r+s} s\binom{r}{s}\ln n\, n^r n^{-(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^i =$$
$$= 2\left(2e^{2+r+s} s\binom{r}{s}\ln n\, n^{r+s-(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^i = o(1).$$

Следовательно, снова при достаточно больших n получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon N}\mathbf{P}(X_i>0) \leqslant 2\left(2e^{2+r+s} s\binom{r}{s}\ln n\, n^{r+s-(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^i \leqslant$$
$$\leqslant 8\left(2e^{2+r+s} s\binom{r}{s}\ln n\, n^{r+s-(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right) = o(1).$$

Значит, с вероятностью, стремящейся к 1, все X_i при $1\leqslant i\leqslant \varepsilon N$ равны 0.

Случай 2: маленькое i. Пусть $\varepsilon N \leqslant i \leqslant N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)$ (ε определено в предыдущем случае).

Вероятность того, что какое-то из X_i больше 0, оценим сверху суммой вероятностей

$$\sum_{i=\varepsilon N}^{N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{P}(X_i>0).$$

Оценим единообразно каждое слагаемое в этой сумме и воспользуемся тем, что всего слагаемых не более N.

Зафиксируем i и оценим $\mathbf{P}(X_i>0)$. Для этого воспользуемся неравенством Маркова и оценим $\mathbf{P}(X_i>0)\leqslant \mathbf{E}(X_i)$. Напомним, что мы хотим получить максимальное независимое множество вершин мощности N, степень которого равна $N-i$. Для этого нужно выбрать базу X той звезды S_X, с которой будет достигаться пересечение по $N-i$ вершинам, а затем те i вершин этой звезды S_X, которые не войдут в наше множество. Обозначим это семейство через A.

Пусть задана вершина из семейства A, которая (как множество) пересекает базу X этой звезды по $t<s$ элементам. Тогда эта вершина соединена ровно с M_t вершинами звезды S_X. Значит, она будет соединена не менее чем с $(N-i)-(N-M_t)$ вершинами из семейства A. Согласно ранее приведенным оценкам $M_t=(1+o(1))N$ для любого t. Значит, количество ребер графа $\widetilde{G}(n,r,s)$ внутри семейства A не меньше $(1+o(1))(N-i)i$. Значит,

$$\mathbf{E}(X_i)\leqslant \binom{n}{s}\binom{N}{i}\binom{V-N}{i}(1-p)^{(1+o(1))(N-i)i} \leqslant$$
$$\leqslant \binom{n}{s}\left(\frac{eN}{i}\right)^i\left(\frac{eV}{i}\right)^i e^{-(1+o(1))p(N-i)i}.$$

Собирая все вместе, получаем, что эта величина равна

$$\binom{n}{s}\left(\frac{e^2VN}{i^2}e^{-(1+o(1))p(N-i)}\right)^i.$$

Подставим $p = \dfrac{2s\binom{r}{s}\ln n}{N}$ и оценим $N - i \geqslant \dfrac{2}{3\binom{r}{s}}N$:

$$\mathbf{E}(X_i) \leqslant \binom{n}{s}\left(\frac{e^2VN}{i^2}\left(n^{-2(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^{\frac{2}{3\binom{r}{s}}}\right)^i.$$

Заметим, что $V = N\dfrac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{r(r-1)\dots(r-s+1)}$, т.е. что $V \leqslant N\dfrac{n^s}{(r-s)^s}$. Значит,

$$\mathbf{E}(X_i) \leqslant \binom{n}{s}\left(\frac{e^2N^2}{i^2}\frac{n^s}{(r-s)^s}\left(n^{-2(1+o(1))s\binom{r}{s}}\right)^{\frac{2}{3\binom{r}{s}}}\right)^i.$$

Теперь оценим $i \geqslant \varepsilon N$ и получим, что

$$\mathbf{E}(X_i) = O\left(\binom{n}{s}\left(n^{s-2(1+o(1))s\binom{r}{s}\frac{2}{3\binom{r}{s}}}\right)^{\varepsilon N}\right) = O\left(\binom{n}{s}n^{-(1+o(1))\frac{s}{3}\varepsilon N}\right) =$$
$$= O\left(n^{s-(1+o(1))\frac{s}{3}\varepsilon N}\right) = o(1).$$

Грубо оценим количество членов в сумме через N, и при достаточно больших n получим оценку

$$\sum_{i=\varepsilon N}^{N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{P}(X_i > 0) = O\left(Nn^{s-(1+o(1))\frac{\varepsilon}{3}N}\right) = o(1).$$

Значит, с вероятностью, стремящейся к 1, все X_i при $\varepsilon N \leqslant i \leqslant N\left(1 - \dfrac{2}{3\binom{r}{s}}\right)$ равны 0.

Случай 3: большое i. Пусть $i > N\left(1 - \dfrac{2}{3\binom{r}{s}}\right)$. Вероятность того, что какое-то из X_i больше 0, оценим сверху суммой вероятностей

$$\sum_{i > N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{P}(X_i > 0).$$

Каждое слагаемое в этой сумме оценим по неравенству Маркова и докажем, что

$$\sum_{i > N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{E}(X_i) = o(1).$$

Рассмотрим множество A вершин графа $\widetilde{G}(n, r, s)$ мощности N и степени d. В подграфе, индуцированном этим множеством, минимальная степень вершины не меньше $N - \binom{r}{s}d$.

Для оценки математического ожидания $\mathbf{E}(X_i)$ нам нужны те множества A, для которых $d = N - i \leqslant \left(\dfrac{2}{3\binom{r}{s}}\right)N$. Число ребер внутри таких множеств A не меньше

$$\frac{N}{2}\left(N - \binom{r}{s}\left(\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)N\right) = \frac{N^2}{6}.$$

Значит,

$$\sum_{i>N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{E}(X_i) \leqslant \binom{V}{N}(1-p)^{\frac{N^2}{6}} \leqslant \left(\frac{eV}{N}\right)^N n^{-(1+o(1))s\binom{r}{s}\frac{N}{3}}.$$

Оценивая $V \leqslant \frac{n^s}{(r-s)^s}N$, получаем, что

$$\sum_{i>N\left(1-\frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)} \mathbf{E}(X_i) = O\left(n^{sN} n^{-\frac{\binom{r}{s}}{3}sN}\right) = o(1)$$

при $r > 3$.

Значит, при $r > 3$ с вероятностью, стремящейся к 1, все X_i при $i > N\left(1 - \frac{2}{3\binom{r}{s}}\right)$ равны 0.

§ 4. Нижняя оценка критической вероятности сохранения ребра

Пусть снова Y – количество независимых множеств вершин графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ мощности $N+1$, содержащих целую звезду. Пусть вероятность сохранения ребра равна

$$p = p(n) = \frac{(1-\varepsilon)(r+s)\ln n}{\binom{n-s}{r-s}},$$

где для удобства доказательства $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$.

Покажем, что $Y > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1, т.е. число независимости графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$ не меньше $N+1$.

Как было показано ранее,

$$\mathbf{E}(Y) = \binom{n}{s}(V-N)(1-p)^{(1+o(1))N}.$$

Заметим, что

$$V - N = \left(\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{r(r-1)\dots(r-s+1)} - 1\right)N \geqslant \left(\frac{(n-s+1)^s}{r^s} - 1\right)N =$$
$$= \Omega\left(n^s \cdot N\right) = \Omega\left(n^r\right).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(Y) = \Omega\left(n^s n^r (1-p)^{(1+o(1))N}\right) = \Omega\left(n^{r+s} e^{(-p-p^2)(1+o(1))N}\right) =$$
$$= \Omega\left(n^{r+s} n^{-(1-\varepsilon)(1+o(1))(r+s)}\right) = \Omega\left(n^{(1+o(1))(r+s)\varepsilon}\right) \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Заметим, что

$$\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(Y \leqslant 0) = \mathbf{P}(Y - \mathbf{E}(Y) \leqslant -\mathbf{E}(Y)) \leqslant \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \leqslant \mathbf{E}(Y)).$$

Таким образом, согласно неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}(Y \leqslant 0) \leqslant \frac{\mathbf{D}(Y)}{(\mathbf{E}(Y))^2}.$$

Значит, для доказательства того, что $Y > 0$ с вероятностью, стремящейся к 1, осталось показать, что $\mathbf{D}(Y) = o((\mathbf{E}(Y))^2)$, т.е. что $\mathbf{E}(Y(Y-1)) = (1+o(1))(\mathbf{E}(Y))^2$.

Для доказательства воспользуемся стандартной техникой подсчета второго момента. Пусть индекс i пробегает все семейства мощности $N+1$ вершин графа $\widetilde{G}_p(n,r,s)$. Пусть случайная величина I_i является индикатором того, что соответствующее семейство содержит целую звезду. Тогда

$$Y = \sum_i I_i.$$

В силу линейности математического ожидания и свойств индикаторов имеем

$$\mathbf{E}(Y(Y-1)) = \sum_{i \neq j} \mathbf{E}(I_i I_j) = \sum_{P,Q,A,B} \mathbf{P}(S_P \cup \{A\} \text{ и } S_Q \cup \{B\} \text{ независимы}).$$

Здесь суммирование ведется по всем четверкам (P,Q,A,B), где P и Q – подмножества мощности s множества $[n]$, S_P и S_Q – построенные на них звезды, A и B – подмножества мощности r множества $[n]$, пересекающие, соответственно, P и Q меньше чем по s элементам, и $(P,A) \neq (Q,B)$. Действительно, для того чтобы выбрать семейство вершин мощности $N+1$, содержащее целую звезду, надо выбрать саму эту звезду и еще одну вершину, не соединенную ни с одной вершиной звезды, – ровно это и записано в соответствующей сумме.

Теперь заметим, что данная сумма состоит из двух сумм:

$$\sum_{P \neq Q} \mathbf{P}(S_P \cup \{A\} \text{ и } S_Q \cup \{B\} \text{ независимы}) +$$
$$+ \sum_{P=Q,\, A \neq B} \mathbf{P}(S_P \cup \{A\} \text{ и } S_Q \cup \{B\} \text{ независимы}).$$

Кроме того,

$$\sum_{P \neq Q} \mathbf{P}(S_P \cup \{A\} \text{ и } S_Q \cup \{B\} \text{ независимы}) \leqslant$$
$$\leqslant \binom{n}{s}^2 (V-N)^2 (1-p)^{2(1+o(1))N} = (1+o(1))(\mathbf{E}(Y))^2$$

и

$$\sum_{P=Q,\, A \neq B} \mathbf{P}(S_P \cup \{A\} \text{ и } S_Q \cup \{B\} \text{ независимы}) \leqslant$$
$$\leqslant \binom{n}{s} (V-N)^2 (1-p)^{2(1+o(1))N} = o((\mathbf{E}(Y))^2).$$

Итого получаем, что

$$\mathbf{E}(Y(Y-1)) = (1+o(1))(\mathbf{E}(Y))^2,$$

что и требовалось.

§ 5. Заключение

Верхняя оценка критической вероятности

$$p = p(n) = \frac{2s\binom{r}{s}\ln n}{\binom{n-s}{r-s}}$$

выглядит достаточно искусственно. Приступая к доказательству, авторы были уверены, что аналогично работе [31] она будет выглядеть как

$$p = p(n) = \frac{(1+\varepsilon)(r+s)\ln n}{\binom{n-s}{r-s}}$$

для малого положительного ε. Однако для такой вероятности сохранения ребра доказать ничего не получилось – это связано с особенностями принятого метода доказательства. Более конкретно, в третьем случае ("большое i") нужно оценить число ребер в подграфе графа $\widetilde{G}(n, r, s)$, индуцированном множествами вершин с фиксированными параметрами. Если в работе [31] (т.е. при $s = 1$) хватало достаточно слабой оценки на вероятность сохранения ребра, то в общем случае ее уже не хватает. Если изначальное предположение о природе точной верхней оценки верно, то для его доказательства нужен новый метод.

Также для дальнейшего исследования остается вопрос, что происходит при непостоянных r и s. В работе [31] аналогичные результаты были доказаны для $r = o(n^{\frac{1}{3}})$, и скорее всего, результаты этой статьи также можно обобщить на случай, когда r и s – (медленно) растущие функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2 // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 2. P. 187–213.
2. *Székely L.A.* Erdős on Unit Distances and the Szemerédi–Trotter Theorems // Paul Erdős and His Mathematics, II (Proc. Conf. Held in Budapest, Hungary. July 4–11, 1999). Bolyai Soc. Math. Stud. V. 11. Berlin: Springer; Budapest: János Bolyai Math. Soc., 2002. P. 649–666.
3. *Захаров Д.А., Райгородский А.М.* Клико-хроматические числа графов пересечений // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 1. P. 142–144.
4. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring General Kneser Graphs and Hypergraphs via High-Discrepancy Hypergraphs // Europ. J. Combin. 2019. V. 79. P. 228–236.
5. *Raigorodskii A.M.* Cliques and Cycles in Distance Graphs and Graphs of Diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics (AMS Special Session on Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics. San Diego, CA, USA. January 11, 2013). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2014. P. 93–109.
6. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into Combinatorial Geometry. Berlin: Springer, 1997.
7. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Геометрия и механика. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 23. М: РУДН, 2007. С. 147–164.
8. *Райгородский А.М., Черкашин Д.Д.* Экстремальные задачи в раскрасках гиперграфов // УМН. 2020. Т. 75. № 1 (451). С. 95–154.
9. *Просанов Р.И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 6. P. 890–898.

10. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey Theory. New York: John Wiley & Sons, 1990.
11. *Купавский А.Б., Сагдеев А.А.* Теория Рамсея в пространстве с чебышевской метрикой // УМН. 2020. Т. 75. № 5 (455). С. 191–192.
12. *Пушняков Ф.А.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. 2019. V. 105. № 4. P. 592–602.
13. *Sagdeev A.A., Raigorodskii A.M.* On a Frankl–Wilson Theorem and Its Geometric Corollaries // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). 2019. V. 88. № 3. P. 1029–1033.
14. *Сагдеев А.А.* Об одной теореме Франкла – Уилсона // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 86–106.
15. *Kupavskii A.* Degree Versions of Theorems on Intersecting Families via Stability // J. Combin. Theory Ser. A. 2019. V. 168. P. 272–287.
16. *Ihringer F., Kupavskii A.* Regular Intersecting Families // Discrete Appl. Math. 2019. V. 270. P. 142–152.
17. *Frankl P., Kupavskii A.* Partition-free Families of Sets // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2019. V. 119. № 2. P. 440–468.
18. *Frankl P., Kupavskii A.* Two Problems on Matchings in Set Families—In the Footsteps of Erdős and Kleitman // J. Combin. Theory Ser. B. 2019. V. 138. P. 286–313.
19. *Kupavskii A., Pach J., Tomon I.* On the Size of K-Cross-free Families // Combinatorica. 2019. V. 39. № 1. P. 153–164.
20. *Ипатов М.М., Кошелев М.М., Райгородский А.М.* Модулярность некоторых дистанционных графов // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 71–73.
21. *Kiselev S., Kupavskii A.* Sharp Bounds for the Chromatic Number of Random Kneser Graphs // Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). 2019. V. 88. № 3. P. 861–865.
22. *Alishahi M., Hajiabolhassan H.* Chromatic Number of Random Kneser Hypergraphs // J. Combin. Theory Ser. A. 2018. V. 154. P. 1–20.
23. *Пядеркин М.М., Райгородский А.М.* О случайных подграфах кнезеровского графа и его обобщений // ДАН. 2016. Т. 470. № 4. С. 384–386.
24. *Бобу А.В., Куприянов А.Э., Райгородский А.М.* Об одном обобщении кнезеровских графов // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 3. С. 351–365.
25. *Pyaderkin M.M.* On the Chromatic Number of Random Subgraphs of a Certain Distance Graph // Discrete Appl. Math. 2019. V. 267. P. 209–214.
26. *Raigorodskii A.M., Koshelev M.M.* New Bounds on Clique-Chromatic Numbers of Johnson Graphs // Discrete Appl. Math. 2020. V. 283. P. 724–729.
27. *Райгородский А.М., Кошелев М.М.* Новые оценки клико-хроматических чисел графов Джонсона // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 78–80.
28. *Райгородский А.М., Шишунов Е.Д.* О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ // ДАН. 2019. V. 488. № 5. P. 486–487.
29. *Райгородский А.М., Шишунов Е.Д.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1,0,1\}^n$ // ДАН. 2019. V. 485. № 3. P. 269–271.
30. *Пушняков Ф.А., Райгородский А.М.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 2. С. 286–298.
31. *Bollobás B., Narayanan B.P., Raigorodskii A.M.* On the Stability of the Erdős–Ko–Rado Theorem // J. Combin. Theory Ser. A. 2016. V. 137. P. 64–78.
32. *Tran T., Das S.* A Simple Removal Lemma for Large Nearly-Intersecting Families // Ext. Abstr. 8th European Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb'2015). Bergen, Norway. Aug. 31 – Sept. 4, 2015. Electron. Notes Discrete Math. 2015. V. 49. P. 93–99.
33. *Balogh J., Bollobás B., Narayanan B.P.* Transference for the Erdős–Ko–Rado Theorem // Forum Math. Sigma. 2015. V. 3. Article e23 (18 pp).
34. *Пядеркин М.М.* О пороговой вероятности для устойчивости независимых множеств в дистанционном графе // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 2. С. 280–294.

35. *Das S., Tran T.* Removal and Stability for Erdős–Ko–Rado // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. № 2. P. 1102–1114.

36. *Devlin P., Kahn J.* On "Stability" in the Erdős–Ko–Rado Theorem // SIAM J. Discrete Math. 2016. V. 30. № 2. P. 1283–1289.

Огарок Петр Алексеевич
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
факультет инноваций и высоких технологий,
кафедра дискретной математики
ogarokpeter@yandex.ru
Райгородский Андрей Михайлович
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Физтех-школа прикладной математики и информатики;
лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов
Кавказский математический центр
Адыгейского государственного университета
Бурятский государственный университет,
институт математики и информатики
mraigor@yandex.ru

Поступила в редакцию
09.03.2020
После доработки
29.10.2020
Принята к публикации
29.10.2020