ПРИБОРЫ И ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТА, 2023, № 5, с. 180–189

ЛАБОРАТОРНАЯ ТЕХНИКА

УДК 532.51:532.522

ИЗГОТОВЛЕНИЕ КВАРЦЕВЫХ ПОЛЫХ ВОЛОКОН: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫТЯЖКИ КАПИЛЛЯРОВ[1]

В. П. Первадчук[a], Д. Б. Владимирова[a], А. Л. Деревянкина[a,*]

[a] *Пермский национальный исследовательский политехнический университет*
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский просп., 29

**e-mail: al_derevyankina@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.01.2023 г.
После доработки 14.03.2023 г.
Принята к публикации 24.04.2023 г.

Решение задачи стабильности процесса изготовления (“вытяжки”) микроструктурированных оптических волокон (“дырчатых волокон”) имеет важнейшее значение для определения эффективных технологических режимов производства. В данном исследовании использована предложенная авторами модифицированная модель вытяжки капилляров, учитывающая инерционные, вязкостные силы и силы поверхностного натяжения, а также все виды теплообмена. На основании линейной теории устойчивости определены области стабильности процесса вытяжки капилляров. При исследовании было оценено влияние кратности вытяжки и сил инерции (числа Рейнольдса) на устойчивость рассматриваемого процесса. Показано существование оптимальных параметров нагревательного элемента: распределение температуры по поверхности печи и радиуса печи, при которых значительно (в несколько раз) увеличивается устойчивость процесса вытяжки кварцевых труб.

DOI: 10.31857/S0032816223050130, **EDN:** ZKBBSD

1. ВВЕДЕНИЕ

Успехи, достигнутые волоконной оптикой в конструировании и производстве кварцевых световодов, значительно расширили область их применения. Одним из перспективных направлений является приборостроение и, в частности, производство оптоволоконных датчиков [1–3]. Датчики на основе оптических волокон активно используются в строительстве для контроля устойчивости конструкций [4], для совершенствования линий связи [5], летательных аппаратов [6], в нефтегазодобывающей отрасли [7]. Широкое использование оптические волокна получили при создании медицинских датчиков [8], противопожарных анализаторов и других систем контроля для использования в гражданской инфраструктуре [9]. Развитие приборостроения с использованием кварцевых оптических волокон повлекло разработку и изготовление специальных видов световодов. Среди них особое место занимают так называемые “полые” волокна (фотонно-кристаллические световоды, PCF). Это современный и перспективный тип волокон, заслуживший признание в мировой производственной практике [10, 11]. Отличительной особенностью PCF является наличие в них рядов полостей (зазоров), параллельных оси световода (рис. 1). Геометрическая конфигурация расположения полостей может быть разнообразна и отвечает цели использования волокна. Области применения PCF-волокон весьма разнообразны, наиболее часто их используют в датчиках температуры, давления, химических и жидкостных сенсорах [12, 13].

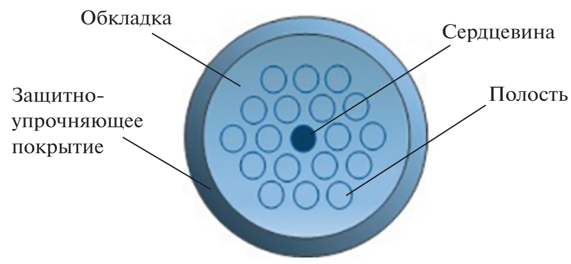

Рис. 1. Пример расположения сквозных отверстий в PCF (поперечное сечение).

[1] Международная конференция “Оптическая рефлектометрия, метрология и сенсорика 2023”, Россия, Пермь, 24–26 мая 2023 г. (International conference “Optical Reflectometry, Metrology & Sensing 2023”, Russia, Perm, 24–26, May 2023).

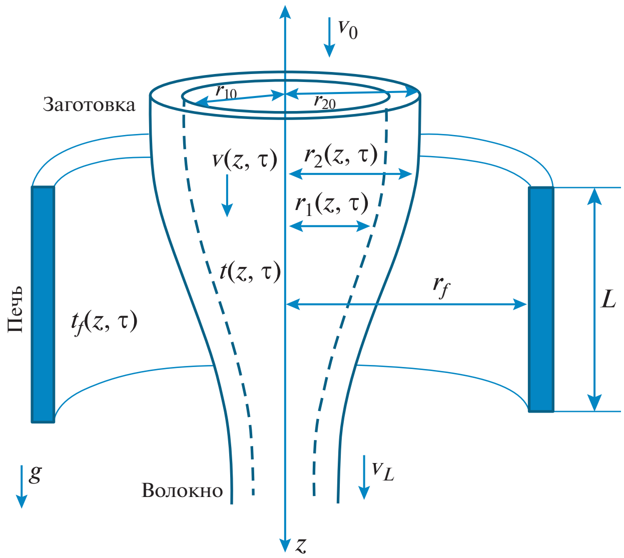

Рис. 2. Схема процесса вытяжки капилляра.

Одним из важных факторов, влияющих на качество работы датчиков, является качество оптического волокна как его основного чувствительного элемента. В связи с этим еще на этапе производства волокон особым образом контролируется ряд важных параметров, поддержание которых в заранее известных диапазонах приводит к стабильному процессу вытягивания и качеству готовой продукции. Один из них – это геометрические параметры (как заготовки, так и готового волокна), отвечающие за однородность формы волокна, его симметричность и постоянство толщины [14, 15]. Но еще более важный аспект – оценивание взаимного влияния геометрических и термомеханических параметров процесса вытяжки и их отклонений (от программных значений), а также влияния таких отклонений на стабильность процесса вытяжки в целом. Вопросы стабильности отдельных параметров волокон исследованы в литературе достаточно широко. К примеру, для стеклопластиковых волокон показано, что стабильность их отдельных параметров может быть повышена химическим путем – добавка керамических наполнителей резко повышает термическую стабильность композитов [16]. Для металлических волокон армирующие добавки также позволяют улучшить механические свойства и термическую стабильность [17]. Однако проблема устойчивости самого процесса вытяжки, как и задача стабильности характеристик волокон непосредственно в процессе их изготовления, исследованы недостаточно, в особенности это касается различных видов кварцевых волокон, в том числе PCF.

В настоящее время задачи стабильности процессов производства капилляров (тончайших кварцевых труб) приобретают особый интерес, поскольку именно капилляры являются основными элементами PCF. В данном исследовании проводится классический в математическом понимании анализ устойчивости процесса вытяжки капилляра. Математическая модель вытяжки, лежащая в основе, представляет собой расширенную модификацию модели вытяжки капилляра [18, 19]. Изучаются факторы, влияющие на стабильность параметров процесса вытяжки. Это так называемая кратность вытяжки (отношение скоростей вытягивания волокна и подачи кварцевой заготовки), а также теплофизические параметры нагревательного элемента (печи), который обеспечивает плавление заготовки.

2. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВОГО КАПИЛЛЯРА

Линейная теория устойчивости, используемая в данной работе, позволяет исследовать стабильность конкретного состояния динамической системы при малых возмущающих воздействиях. Свойство малости возмущений позволяет перейти от нелинейных математических моделей к линейным математическим моделям. Поэтому вначале рассмотрим нелинейные математические модели процесса вытяжки кварцевых капилляров, среди которых особо отметим модель, предложенную в работе [18]. Указанная модель является квазиодномерной и учитывает инерционные силы, силы вязкости и поверхностного натяжения, а также все виды теплопереноса: теплопроводность, конвективный и лучистый теплопереносы. Однако при этом лучистая энергия, вносящая основной вклад в нагрев расплава кварца, учитывается приближенно. Поэтому в дальнейших исследованиях будет использована предложенная авторами модифицированная математическая модель вытяжки кварцевых капилляров, в которой уравнение энергии получено в более общей постановке на основе законов Планка, Стефана–Больцмана, Ламберта [20]. Схема вытяжки капилляров и основные геометрические параметры струи расплава и печи представлены на рис. 2.

Тогда с учетом сделанного выше замечания о лучистом теплообмене система уравнений, описывающая процесс вытяжки кварцевых капилляров и дополненная начальными и граничными условиями, примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial r_1^2(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar\tau}+\frac{\partial(v(\bar z,\bar\tau)r_1^2(\bar z,\bar\tau))}{\partial\bar z}=\frac{P_0 r_1^2(\bar z,\bar\tau)r_2^2(\bar z,\bar\tau)-\tilde\gamma r_1(\bar z,\bar\tau)r_2(\bar z,\bar\tau)(r_1(\bar z,\bar\tau)+r_2(\bar z,\bar\tau))}{\bar\mu(t(\bar z,\bar\tau))\cdot\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)},\\
\frac{\partial r_2^2(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar\tau}+\frac{\partial\left(v(\bar z,\bar\tau)r_2^2(\bar z,\bar\tau)\right)}{\partial\bar z}=\frac{P_0 r_1^2(\bar z,\bar\tau)r_2^2(\bar z,\bar\tau)-\tilde\gamma r_1(\bar z,\bar\tau)r_2(\bar z,\bar\tau)(r_1(\bar z,\bar\tau)+r_2(\bar z,\bar\tau))}{\bar\mu(t(\bar z,\bar\tau))\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)},\\
\rho\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)\left(\frac{\partial v(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar\tau}+v(\bar z,\bar\tau)\frac{\partial v(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar z}-g\right)=\\
=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(3\bar\mu(t(\bar z,\bar\tau))\cdot\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)\frac{\partial v(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar z}+\tilde\gamma(r_2(\bar z,\bar\tau)+r_1(\bar z,\bar\tau))\right),\\
\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)\left(\frac{\partial t(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar\tau}+v(\bar z,\bar\tau)\frac{\partial t(\bar z,\bar\tau)}{\partial\bar z}\right)\rho C_p=\\
=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\lambda_{\text{ef}}\left(r_2^2(\bar z,\bar\tau)-r_1^2(\bar z,\bar\tau)\right)\frac{\partial t(\bar{\bar z},\bar\tau)}{\partial\bar z}\right)-2r_1(\bar z,\bar\tau)\sqrt{1+r_1'^2(\bar z,\bar\tau)}\cdot\bar\alpha_1\cdot(t(\bar z,\bar\tau)-t_{\text{in}})-\\
-2r_2(\bar z,\bar\tau)\sqrt{1+r_2'^2(\bar z,\bar\tau)}\cdot\left[\omega_2\varepsilon\cdot n_c^2\sigma_0\cdot\left(t^4(\bar z,\bar\tau)-t_{\text{out}}^4\right)+\bar\alpha_2(t(\bar z,\bar\tau)-T_a)\right]+\\
+4n_c^2\sigma_0\cdot r_2(\bar z,\bar\tau)\cdot r_f\cdot(r_f-r_2(\bar z,\bar\tau))\int_0^L\frac{\left(\bar\beta\varepsilon_f t_f^4(\eta,\bar\tau)-\varepsilon\cdot t^4(\bar z,\bar\tau)\right)\left((r_f-r_2(\bar z,\bar\tau))+\left|r_2'(\bar z,\bar\tau)\right|(\bar z-\eta)\right)}{\left((\eta-\bar z)^2+(r_f-r_2(\bar z,\bar\tau))^2\right)^2}d\eta,\\
v(\bar z,0)=v_s(\bar z),\quad v(0,\bar\tau)=v_0,\quad v(L,\bar\tau)=v_L,\quad r_1(\bar z,0)=r_{1s}(\bar z),\quad r_1(0,\bar\tau)=r_{10},\\
r_2(\bar z,0)=r_{2s}(\bar z),\quad r_2(0,\bar\tau)=r_{20},\quad t(\bar z,0)=t_s(\bar z),\quad t(0,\bar\tau)=t_0,\quad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=L}=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $v_s(\bar z)$ – начальная скорость (м/с); v_0 – скорость подачи волокна (м/с); v_L – скорость вытяжки волокна (м/с); $r_{1s}(\bar z)$, $r_{2s}(\bar z)$ – начальные значения внутреннего и внешнего радиусов капилляра (м); r_{10}, r_{20} – внутренний и внешний радиусы заготовки (м); $t_s(\bar z)$ – начальная температура (°C); t_0 – температура заготовки (°C).

Перечень остальных используемых обозначений и их единицы измерения приведены в табл. 1.

Адекватность математической модели (1) реальному процессу вытяжки капилляров была проверена путем сравнения численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в работе [21]. Численные исследования проводились в среде Comsol Multiphysics, их результаты для внутреннего диаметра представлены на рис. 3. Как видно на рисунке, полученные в работе численные результаты достаточно хорошо совпали с данными эксперимента. Аналогичная картина наблюдалась и для внешнего диаметра.

Поскольку анализ устойчивости процесса будет проведен в рамках линейной теории, целесообразно уравнения системы (1) записать в безразмерном виде, предполагая при этом, что

$$
\begin{gathered}
z=\frac{\bar z}{L},\quad \tau=\frac{\bar\tau v_L}{L},\quad V(z,\tau)=\frac{v(\bar z,\bar\tau)}{v_L},\\
R_1(z,\tau)=\frac{r_1(\bar z,\bar\tau)}{L},\quad R_2(z,\tau)=\frac{r_2(\bar z,\bar\tau)}{L},\\
T(z,\tau)=\frac{t(\bar z,\bar\tau)}{T_a},\quad \lambda=\frac{\lambda_{\text{ef}}}{\lambda_t},\quad \mu=\frac{\bar\mu}{\mu_0},\quad R_f=\frac{r_f}{L},\\
T_{\text{in}}=\frac{t_{\text{in}}}{T_a},\quad T_{\text{out}}=\frac{t_{\text{out}}}{T_a},\quad T_f(z,\tau)=\frac{t_f(\bar z,\bar\tau)}{T_a}.
\end{gathered}
$$

В результате этих преобразований система (1) приняла следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\left(R_2^2(z,\tau)-R_1^2(z,\tau)\right)\left(\frac{\partial V(z,\tau)}{\partial\tau}+V(z,\tau)\frac{\partial V(z,\tau)}{\partial z}\right)=\\
=\frac{3}{\text{Re}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(R_2^2(z,\tau)-R_1^2(z,\tau)\right)\cdot\mu(T(z,\tau))\cdot\frac{\partial V(z,\tau)}{\partial z}\right)+\frac{\left(R_2^2(z,\tau)-R_1^2(z,\tau)\right)}{\text{Fr}}+\frac{1}{\text{We}}\cdot\frac{\partial(R_1(z,\tau)+R_2(z,\tau))}{\partial z},
\end{gathered}
$$

Таблица 1. Используемые обозначения и их единицы измерения

Значение	Описание	Значение	Описание
$\bar{z}$	продольная координата, м	t_{in}	температура газа внутри трубы, °С
$\bar{\tau}$	время, с	P_0	разность между внутренним и внешним давлениями, Па
$r_2(\bar{z}, \bar{\tau})$	внешний радиус капилляра, м	C_p	удельная теплопроводность расплава, Дж/г · °С
$r_1(\bar{z}, \bar{\tau})$	внутренний радиус капилляра, м	ρ	плотность расплава, г · м^3
$v(\bar{z}, \bar{\tau})$	скорость течения расплава, м/с	$\bar{\beta}$	коэффициент отражения [1]
$t(\bar{z}, \bar{\tau})$	температура расплава, °С	ε_f	степень черноты нагревательного элемента [1]
$\bar{\mu}(t(\bar{z}, \bar{\tau}))$	вязкость расплава кварца, Па · с	ε	степень черноты расплава кварца [1]
$t_f(\bar{z}, \bar{\tau})$	температура печи, °С	$\tilde{\gamma}$	коэффициент поверхностного натяжения [Н/м]
L	длина зоны нагрева, м	$\bar{\alpha}_1$	коэффициент теплоотдачи, с внутренней поверхности печи, Вт/(м^2 · °С)
t_{out}	температура газа снаружи трубы, °С	$\bar{\alpha}_2$	коэффициент теплоотдачи с внешней поверхности печи, Вт/(м^2 · °С)
T_a	температура окружающей среды, °С	λ_t	коэффициент молекулярной теплопроводности расплава, Вт/(м^2 · °С)
r_f	радиус печи, м	λ_{ef}	эффективный коэффициент теплопроводности, учитывающий как молекулярную, так и лучистую проводимость [1]
ω_2	коэффициент излучения с поверхности заготовки вне печи [1]	n_c	показатель преломления газа [1]
σ_0	постоянная Стефана–Больцмана [1]		

$$\frac{\partial R_1^2(z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(V(z,\tau)\, R_1^2(z,\tau)\right)}{\partial z} = \frac{\mathrm{La} R_1^2(z,\tau)\, R_2^2(z,\tau) - \dfrac{1}{\mathrm{Ma}} R_1(z,\tau)\, R_2(z,\tau)\left(R_1(z,\tau) + R_2(z,\tau)\right)}{\mu\left(T(z,\tau)\right)\cdot\left(R_2^2(z,\tau) - R_1^2(z,\tau)\right)},$$

$$\frac{\partial R_2^2(z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial\left(V(z,\tau)\, R_2^2(z,\tau)\right)}{\partial z} = \frac{\mathrm{La} R_1^2(z,\tau)\, R_2^2(z,\tau) - \dfrac{1}{\mathrm{Ma}} R_1(z,\tau)\, R_2(z,\tau)\left(R_1(z,\tau) + R_2(z,\tau)\right)}{\mu\left(T(z,\tau)\right)\cdot\left(R_2^2(z,\tau) - R_1^2(z,\tau)\right)},$$

Таблица 2. Критерии подобия

Значение	Описание	Значение	Описание
$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho v_L L}{\mu_0}$	число Рейнольдса	$\mathrm{La} = \dfrac{\bar{P}_0 \cdot L}{\mu_0 v_L}$	критерий взаимодействия капиллярных сил
$\mathrm{Fr} = \dfrac{v_L^2}{Lg}$	число Фруда	$\mathrm{Ma} = \dfrac{\mu_0 v_L}{\tilde{\gamma}}$	критерий взаимодействия сил молекулярного трения
$\mathrm{We} = \dfrac{\rho L v_L^2}{\tilde{\gamma}}$	число Вебера	$\mathrm{Pe} = \dfrac{\rho C_p v_L L}{\lambda_0}$	число Пекле
$\chi_1 = \dfrac{\omega_2 \varepsilon \cdot n_c^2 \sigma_0 \cdot \bar{T}_a^3}{\rho \cdot C_p \cdot v_L}$ $\chi_2 = \dfrac{n_c^2 \sigma_0 \cdot \bar{T}_a^3}{\rho \cdot C_p \cdot v_L}$	Безразмерные комплексы 1, 2	$\mathrm{St}_1 = \dfrac{\bar{\alpha}_1}{\rho C p v_L}$, $\mathrm{St}_2 = \dfrac{\bar{\alpha}_2}{\rho C p v_L}$	критерий Стэнтона

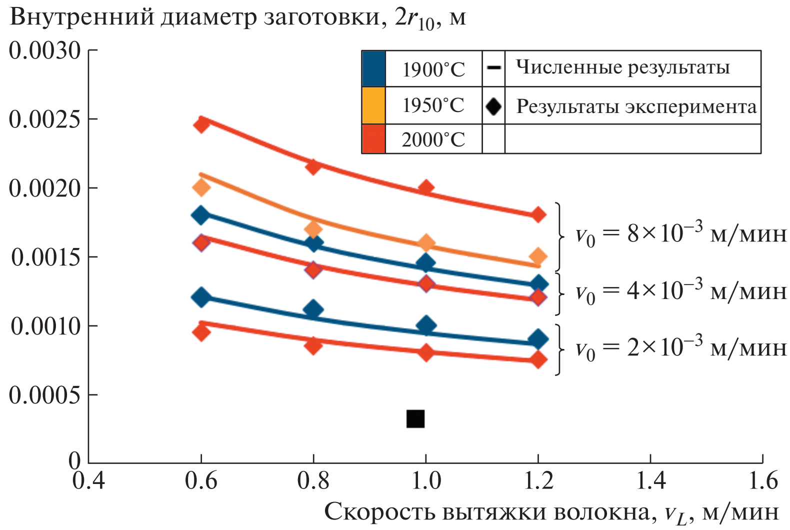

Рис. 3. Зависимость внутреннего диаметра капилляра от скорости подачи, скорости вытяжки и температуры печи.

$$\begin{gathered}\left(R_2^2(z,\tau)-R_1^2(z,\tau)\right)\left(\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial\tau}+V(z,\tau)\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\left(R_2^2(z,\tau)-R_1^2(z,\tau)\right)\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial z}\right)-\\
-2R_1(z,\tau)\sqrt{1+R_1'^2(z,\tau)}\cdot\mathrm{St}_1\cdot(T(z,\tau)-T_{\mathrm{in}})-2R_2(z,\tau)\sqrt{1+R_2'^2(z,\tau)}\cdot\mathrm{St}_2\cdot(T(z,\tau)-1)-\\
-2\chi_1R_2(z,\tau)\sqrt{1+R_2'^2(z,\tau)}\cdot\left(T^4(z,\tau)-T^4_{\mathrm{out}}\right)+4\chi_2R_2(z,\tau)\cdot R_f\cdot\left(R_f-R_2(z,\tau)\right)\times\\
\times\int_0^1\frac{\left(\bar\beta\varepsilon_fT_f^4(\eta,\tau)-\varepsilon T^4(z,\tau)\right)\left((R_f-R_2(z,\tau))+\left|R_2'(z,\tau)\right|\cdot(z-\eta)\right)}{\left((\eta-z)^2+\left(R_f-R_2(z,\tau)\right)^2\right)^2}d\eta\end{gathered}\qquad(2)$$

$$V(z,0)=\frac{v_s(z)}{v_L}=V_s(z),\quad V(0,\tau)=\frac{v_0}{v_L}=\frac{1}{E},\quad V(1,\tau)=1,\quad R_1(z,0)=\frac{r_{1s}(z)}{L}=R_{1s}(z),$$

$$R_1(0,\tau)=\frac{r_{10}}{L}=R_{10},\quad R_2(z,0)=\frac{r_{2s}(z)}{L}=R_{2s}(z),\quad R_2(0,\tau)=\frac{r_{20}}{L}=R_{20},$$

$$T(z,0)=\frac{t_s(z)}{T_a}=T_s(z),\quad T(0,\tau)=\frac{t_0}{T_a},\quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=1}=0.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫТЯЖКИ КВАРЦЕВЫХ КАПИЛЛЯРОВ

Как отмечено выше, свойство малости возмущения позволяет пренебрегать при исследовании устойчивости произведениями возмущений искомых функций, другими словами, анализ линеаризованной в окрестности своего основного (стационарного) состояния системы может заменить анализ исходной нелинейной системы [22–24].

При линеаризации определяющие состояние системы параметры разделялись на основные (как правило, стационарные) $\bar F(z)$ и возмущающие $\tilde F(z,\tau)$:

$$\begin{gathered}F(z,\tau)=\bar F(z)\cdot(1+\tilde F(z,\tau)),\\
F(z,\tau)\in(V(z,\tau),R_1(z,\tau),R_2(z,\tau),T(z,\tau)),\\
\bar F(z)\in(\bar V(z),\bar R_1(z),\bar R_2(z),\bar T(z)),\\
\tilde F(z,\tau)\in(\tilde V(z,\tau),\tilde R_1(z,\tau),\tilde R_2(z,\tau),\tilde T(z,\tau)).\end{gathered}$$

С учетом этого замечания линеаризованная система уравнений (2) примет вид

$$\frac{\partial\tilde V}{\partial\tau}=\frac{3}{\mathrm{Re}}\cdot\frac{\partial^2\tilde V}{\partial z^2}+\beta_1(z)\frac{\partial\tilde V}{\partial z}+\beta_2(z)\tilde V+\alpha_1(z)\frac{\partial\tilde R_2}{\partial z}+$$

$$+\alpha_2(z)\tilde{R}_2+\theta_1(z)\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial z}+\theta_2(z)\tilde{R}_1+\varphi_1(z)\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\varphi_2(z)\tilde{T},$$

$$-\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial\tau}=\beta_3(z)\frac{\partial\tilde{V}}{\partial z}+\beta_4(z)\tilde{V}+\theta_3(z)\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial z}+$$
$$+\theta_4(z)\tilde{R}_1+\alpha_3(z)\tilde{R}_2,$$

$$-\frac{\partial\tilde{R}_2}{\partial\tau}=\beta_3(z)\frac{\partial\tilde{V}}{\partial z}+\beta_5(z)\tilde{V}+\theta_3(z)\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial z}+$$
$$+\theta_5(z)\tilde{R}_1+\alpha_4(z)\tilde{R}_2,$$

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\tau}=\frac{\lambda}{\mathrm{Pe}}\cdot\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial z^2}+\varphi_3(z)\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}+\varphi_4(z)\tilde{T}+\qquad(3)$$
$$+\alpha_5(z)\frac{\partial\tilde{R}_2}{\partial z}+\alpha_6(z)\tilde{R}_2+\theta_6(x)\frac{\partial\tilde{R}_1}{\partial z}+$$
$$+\theta_7(z)\tilde{R}_1+\beta_6(z)\tilde{V},$$

$$\tilde{V}(z,0)=0,\quad\tilde{V}(0,\tau)=0,\quad\tilde{V}(1,\tau)=0,$$
$$\tilde{R}_1(z,0)=0,\quad\tilde{R}_1(0,\tau)=0,$$
$$\tilde{R}_2(z,0)=0,\quad\tilde{R}_2(0,\tau)=0,$$
$$\tilde{T}(z,0)=0,\quad\tilde{T}(0,\tau)=0,\quad\left.\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}\right|_{z=1}=0.$$

Соответствующие коэффициенты системы (3) зависят только от стационарного решения исходной нелинейной системы (2) и имеют вид

$$\alpha_1(z)=\frac{6\mu\bar{V}'\bar{R}_2{}^2}{\bar{V}\,\mathrm{Re}\,\bar{R}^2}+\frac{\bar{R}_2}{\mathrm{We}\bar{V}\bar{R}^2},$$

$$\alpha_2(z)=\frac{-2\bar{R}_2^2\bar{V}}{\bar{R}^2}+\frac{6}{\bar{R}^2\bar{V}\,\mathrm{Re}}\cdot\frac{d}{dz}\left(\mu\bar{R}_2^2\frac{d\bar{V}}{dz}\right)+$$
$$+\frac{2\bar{R}_2^2}{\bar{V}\mathrm{Fr}\bar{R}^2}+\frac{\bar{R}_2'}{\mathrm{We}\bar{V}\bar{R}^2},$$

$$\alpha_3(z)=-\frac{\bar{R}_2}{2\bar{R}_1^2}\left(\frac{2\mathrm{La}\bar{R}_1^2\bar{R}_2-\frac{2}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2-\frac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1^2}{\mu\bar{R}^2}\right)+$$
$$+\frac{\bar{R}_2}{2\bar{R}_1^2}\left(\frac{2\bar{R}_2\left(\mathrm{La}\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2-\frac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2\left(\bar{R}_1+\bar{R}_2\right)\right)}{\mu\left(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2\right)^2}\right),$$

$$\alpha_4(z)=\frac{1}{\bar{R}_2^2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\bar{R}_2^2\bar{V}\right)-$$
$$-\frac{1}{2\bar{R}_2}\left(\frac{2\,\mathrm{La}\,\bar{R}_1^2\bar{R}_2-\frac{2}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2-\frac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1^2}{\mu\bar{R}^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\bar{R}_2\left(\mathrm{La}\,\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2-\frac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2\left(\bar{R}_1+\bar{R}_2\right)\right)}{\mu\left(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2\right)^2}\right),$$

$$\alpha_5(z)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}}\cdot\left(\frac{2}{\mathrm{Pe}}\frac{d}{dz}\left(\lambda\bar{R}_2^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right)-2\bar{R}_2'\bar{R}_2^2\,\mathrm{St}_2(\bar{T}-1)-\right.$$
$$-2\bar{R}_2'\bar{R}_2^2\left(\bar{T}^4-\bar{T}_{\mathrm{out}}^4\right)\chi_1+4\chi_2R_f\bar{R}_2^2\left(R_f-\bar{R}_2\right)k\times$$
$$\left.\times\int_0^1\frac{\left(\beta\varepsilon_fT_f^4-\varepsilon\bar{T}^4\right)(z-\eta)}{\left[(\eta-z)^2+(R_f-\bar{R})^2\right]^2}d\eta\right),$$

$$\alpha_6(z)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}}\cdot\left(\frac{2}{\mathrm{Pe}}\frac{d}{dz}\left(\lambda\bar{R}_2^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right)-\right.$$
$$-2\bar{R}_2\bar{T}\left(1+\frac{3}{2}\bar{R}_2'^2\right)\mathrm{St}_2(\bar{T}-1)-$$
$$-2\bar{R}_2\left(\bar{T}^4-\bar{T}_{\mathrm{out}}^4\right)\left(1+\frac{3}{2}\bar{R}_2'^2\right)\chi_1-2\bar{V}\bar{R}_2^2\frac{d\bar{T}}{dz}$$
$$+4\chi_2R_p\bar{R}_2\int_0^1\left(\beta\varepsilon_fT_f^4-\varepsilon\bar{T}^4\right)\times$$
$$\times\frac{\left(R_f-\bar{R}_2\right)\left(R_f-3\bar{R}_2\right)+\left|\bar{R}_2'\right|(z-\eta)\left(R_f-2\bar{R}_2\right)}{\left[(\eta-z)^2+(R_f-\bar{R}_2)^2\right]^2}+$$
$$\left.+\frac{(4\bar{R}_2)\left(R_f-\bar{R}_2\right)(R_f-\bar{R}_2+\left|\bar{R}_2'\right|(z-\eta))}{\left[(\eta-z)^2+(R_f-\bar{R}_2)^2\right]^3}d\eta\right),$$

$$\beta_1(z)=\frac{3}{\mathrm{Re}\bar{V}\bar{R}^2}\left(\left(\mu\bar{R}^2\bar{V}\right)'+\left(\mu\bar{R}^2\bar{V}'\right)\right)-\bar{V},$$

$$\beta_2(z)=\frac{3}{\mathrm{Re}\bar{V}\bar{R}^2}\frac{d}{dz}\left(\mu\bar{R}^2\bar{V}'\right)-2\bar{V}',\quad\beta_3(z)=\frac{\bar{V}}{2},$$

$$\beta_4(z)=\frac{1}{2\bar{R}_1^2}\frac{d}{dz}\left(\bar{R}_1^2\bar{V}\right),\quad\beta_5(z)=\frac{1}{2\bar{R}_2^2}\frac{d}{dz}\left(\bar{R}_2^2\bar{V}\right),$$

$$\beta_6(z)=-\frac{\bar{V}\bar{T}'}{\bar{T}},\quad\theta_1(z)=\frac{-6\bar{R}_1^2\bar{V}'\mu}{\bar{R}^2\bar{V}\,\mathrm{Re}}+\frac{\bar{R}_1}{\mathrm{We}\bar{V}\bar{R}^2},$$

$$\theta_2(z)=\frac{-6}{\bar{R}^2\bar{V}\,\mathrm{Re}}\cdot\frac{d}{dz}\left(\mu\bar{R}_1{}^2\frac{d\bar{V}}{dz}\right)+$$
$$+\frac{2\bar{V}'\bar{R}_1^2}{\bar{R}^2}-\frac{2\bar{R}_1^2}{\bar{V}\,\mathrm{Fr}\,\bar{R}^2}+\frac{\bar{R}_1'}{\mathrm{We}\bar{V}\bar{R}^2},$$

$$\theta_3(z)=\bar{V},$$

$$\theta_4(z)=\frac{1}{\bar{R}_1{}^2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\bar{R}_1^2\bar{V}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\bar{R}_1}\left(\frac{2\,\mathrm{La}\,\bar{R}_1\bar{R}_2^2-\dfrac{2}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2-\dfrac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_2^2}{\mu\bar{R}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\bar{R}_1\left(\mathrm{La}\,\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2-\dfrac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2\left(\bar{R}_1+\bar{R}_2\right)\right)}{\mu\left(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2\right)^2}\right),$$

$$\theta_5(z)=-\frac{\bar{R}_1}{2\bar{R}_2^2}\left(\frac{2\,\mathrm{La}\,\bar{R}_1\bar{R}_2^2-\dfrac{2}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2-\dfrac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_2^2}{\mu\bar{R}^2}\right)-$$

$$-\frac{\bar{R}_1}{2\bar{R}_2^2}\left(\frac{2\bar{R}_1\left(\mathrm{La}\,\bar{R}_1^2\bar{R}_2^2-\dfrac{1}{\mathrm{Ma}}\bar{R}_1\bar{R}_2\left(\bar{R}_1+\bar{R}_2\right)\right)}{\mu\left(\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2\right)^2}\right),$$

$$\theta_6(z)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}}\cdot\left[-\frac{2}{\mathrm{Pe}}\left(\lambda\bar{R}_1^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right)-2St_1\bar{R}_1^2\bar{R}_1'(\bar{T}-\bar{T}_{in})\right],$$

$$\theta_7(z)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}}\cdot\left[-\frac{2}{\mathrm{Pe}}\frac{d}{dz}\left(\lambda\bar{R}_1^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right)-\right.$$

$$\left.-2St_1\bar{R}_1\left(\bar{T}-\bar{T}_{\mathrm{in}}\right)\left(1+\frac{3}{2}\bar{R}_1'^2\right)+2\bar{V}\bar{R}_1^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right],$$

$$\varphi_1(z)=-\frac{3a_2\mu\bar{T}\bar{V}'}{\mathrm{Re}\,\bar{V}},$$

$$\varphi_2(z)=-\frac{1}{\mathrm{Re}\,\bar{R}^2\bar{V}}\cdot\frac{d}{dz}\left(3\mu a_2\bar{T}\bar{R}^2\frac{d\bar{V}}{dz}\right),$$

$$\varphi_3(z)=\frac{\left(\lambda\bar{R}^2\bar{T}\right)'+\lambda\bar{R}^2\bar{T}'}{\bar{R}^2\bar{T}\,\mathrm{Pe}}-\bar{V},$$

$$\varphi_4(z)=\frac{1}{\bar{R}^2\bar{T}}\cdot\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{d}{dz}\left(\lambda\bar{R}^2\frac{d\bar{T}}{dz}\right)-2\bar{R}_1\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_1'^2}\mathrm{St}_1-\right.$$

$$-2\bar{R}_1\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_1'^2}\mathrm{St}_1-2\bar{R}_2\bar{T}\sqrt{1+\bar{R}_1'^2}\mathrm{St}_2-$$

$$-8\bar{R}_2\bar{T}^4\sqrt{1+\bar{R}_1'^2}\chi_1-\bar{V}\bar{R}^2\frac{d\bar{T}}{dz}-16\chi R_f\varepsilon(R_f-\bar{R}_2)\bar{T}^4\times$$

$$\left.\times\int_0^1\frac{R_f-\bar{R}_2+\left|\bar{R}_2'\right|(z-\eta)}{\left[(\eta-z)^2+(R_f-\bar{R}_2)^2\right]^2}d\eta\right),$$

здесь $\bar{R}^2=\bar{R}_1^2-\bar{R}_2^2$.

На следующем этапе был применен метод разделения переменных, согласно которому в линеаризованных уравнениях системы (3) неизвестные были представлены следующим образом:

$$\tilde{F}(z,\tau)=\tilde{f}(z)\cdot e^{-i\omega\tau},\quad \tilde{f}(z)\in(\tilde{v}(z),\tilde{t}(z),\tilde{r}_1(z),\tilde{r}_2(z)).$$

После разделения переменных система (3) была сведена к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{3\mu}{\mathrm{Re}}\cdot\tilde{v}''(z)+\beta_1(z)\cdot\tilde{v}'(z)+[\beta_2(z)+i\omega]\cdot\tilde{v}(z)+\\+\alpha_1(z)\cdot\tilde{r}_2'(z)+\alpha_2(z)\cdot\tilde{r}_2(z)+\theta_1(z)\cdot\tilde{r}_1'(z)+\\+\theta_2(z)\cdot\tilde{r}_1(z)+\varphi_1(z)\cdot\tilde{t}'(z)+\varphi_2(z)\cdot\tilde{t}(z)=0,\\ \beta_3(z)\cdot\tilde{v}'(z)+\beta_4(z)\cdot\tilde{v}(z)+\theta_3(z)\cdot\tilde{r}_1'(z)+\\+(\theta_4(z)-i\omega)\cdot\tilde{r}_1(z)+\alpha_3(z)\cdot\tilde{r}_2(z)=0,\\ \beta_3(z)\cdot\tilde{v}'(z)+\beta_5(z)\cdot\tilde{v}(z)+\theta_3(z)\cdot\tilde{r}_2'(z)+\\+(\alpha_4(z)-i\omega)\cdot\tilde{r}_2(z)+\theta_5(z)\cdot\tilde{r}_1(z)=0,\\ \frac{\lambda}{\mathrm{Pe}}\cdot\tilde{t}''(z)+\varphi_3(z)\cdot\tilde{t}'(z)+(\varphi_4(z)+i\omega)\cdot\tilde{t}(z)+\\+\alpha_5(z)\cdot\tilde{r}_2'(z)+\alpha_6(z)\cdot\tilde{r}_2(z)+\\+\theta_6(z)\cdot\tilde{r}_1'(z)+\theta_7(z)\cdot\tilde{r}_1(z)+\beta_6(z)\cdot\tilde{v}(z)=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Далее с помощью дискретизации конечно-разностным методом (центральная аппроксимация) была получена система линейных алгебраических уравнений, которая в матричном виде имеет следующий вид:

$$(iN-\omega I)X=0,\tag{5}$$

здесь i — мнимая единица; $X=(\tilde{v}_k,\tilde{r}_{1k},\tilde{r}_{2k},\tilde{t}_k)^T$ — вектор-столбец значений переменных на каждом шаге; I — единичная матрица; N — матрица коэффициентов при переменных X.

Из уравнения (5) следует, что ω является собственным значением матрицы коэффициентов N. Поскольку собственная частота является комплексным числом, $\omega=\omega_r+i\omega_i$, где ω_i — коэффициент нарастания. Этот коэффициент позволяет судить о том, затухают или нарастают колебания. Если все $\omega_i<0$, тогда можно говорить о том, что колебания затухают, а значит, исследуемое состояние (стационарное течение) устойчиво, в противном случае (при $\omega_i>0$) оно неустойчиво [22]. Тем самым, задача анализа устойчивости свелась к задаче нахождения собственных чисел матрицы коэффициентов, причем для определения устойчивости достаточно оценивать только максимальное значение мнимой части $\omega_i^{(1)}$, так называемый коэффициент затухания первой моды.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫТЯЖКИ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

4.1. Изотермический процесс

Приведем краткий обзор параметров, важных для оценивания устойчивости процесса изготов-

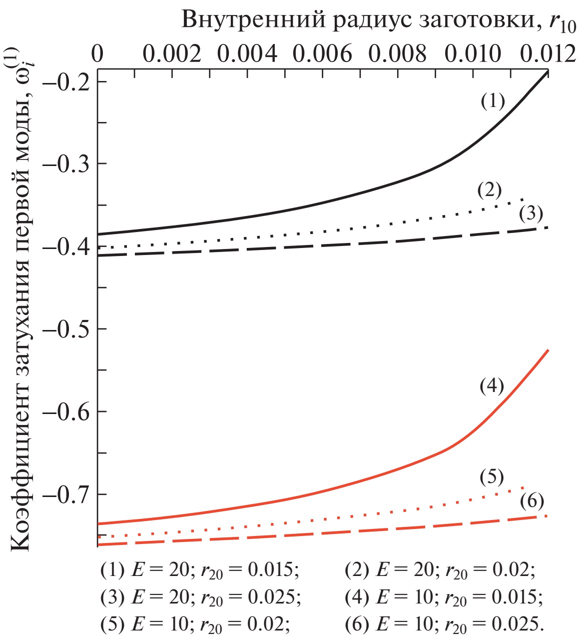

Рис. 4. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от геометрии заготовки при различной кратности вытяжки E.

ления волокон. Наиболее важным из них является кратность вытяжки E. Проведены оценка влияния кратности вытяжки и одновременный учет влияния геометрических параметров заготовки на устойчивость рассматриваемого процесса (рис. 4).

С ростом кратности вытяжки процесс становится менее устойчивым. Кроме того, уменьшение толщины заготовки при одновременном увеличении размера полости капилляра также приводит к потере устойчивости. Необходимо отметить, что данная зависимость между кратностью и устойчивостью вытяжки была также выявлена и в случае сплошного волокна [25–28].

Наибольший интерес вызывает связь устойчивости процесса с числом Рейнольдса, которое характеризует действие сил инерции и вязкого трения. Кратность вытяжки была зафиксирована значением $E = 20$, а расчеты устойчивости проводились при различных значениях числа Рейнольдса и для различных геометрических параметров заготовок.

По результатам расчета коэффициентов первых мод (рис. 5) можно установить, что с ростом числа Рейнольдса устойчивость процесса вытяжки кварцевого капилляра увеличивается. Кроме того, увеличение внутреннего радиуса капилляра или, что то же самое, радиуса его полости, приводит к потере устойчивости процесса вытяжки.

Таким образом, проведенный анализ позволил найти границы устойчивости к малым возмущениям для процесса вытяжки с учетом их геометрических параметров, кратности и чисел Рейнольдса.

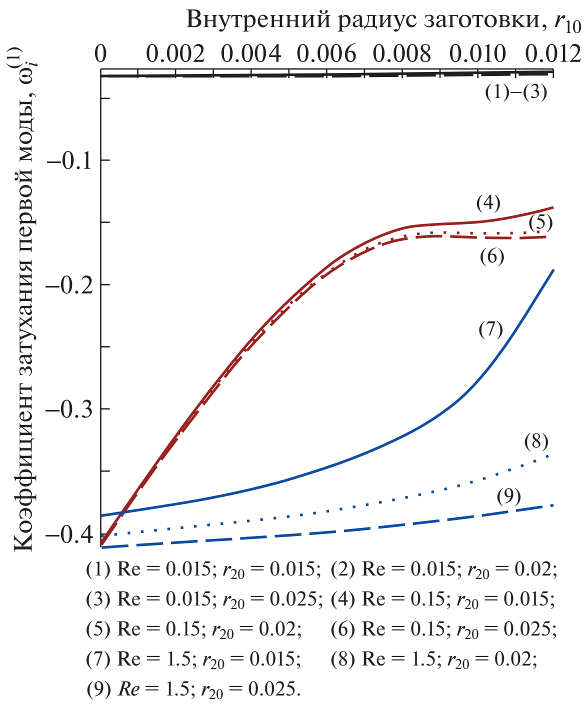

Рис. 5. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиусов заготовки при различных числах Re.

4.2. Неизотермический процесс

Рассмотрим вытяжку в условиях неизотермичности. Оценим влияние распределения температуры вдоль поверхности печи на устойчивость вытяжки кварцевых трубок. Известно, что температура вдоль поверхности печи изменяется, причем в центральной части печи можно выделить зону (ядро) шириной H, в которой температура постоянна и намного выше, чем вблизи краев [29]. Будем считать, что распределение температуры печи определяется соотношением

$$T_f(z,\tau) = \begin{cases} T_{f1}, & z \in \left[0; \dfrac{(1-h)\cdot L}{2}\right] \\ T_{f2}, & z \in \left(\dfrac{(1-h)\cdot L}{2}; \dfrac{(1+h)\cdot L}{2}\right), \\ T_{f1}, & z \in \left[\dfrac{(1+h)\cdot L}{2}; L\right], \end{cases}$$

где $h = H/L$ – относительная ширина ядра нагревательного элемента.

Распределение температуры вдоль поверхности нагревательного элемента наравне с кратностью вытяжки, скоростью подачи заготовки и скоростью вытяжки является параметром, оказывающим влияние на устойчивость процесса производства волокна.

Цель данного этапа исследования – выявление таких значений параметра h, при которых

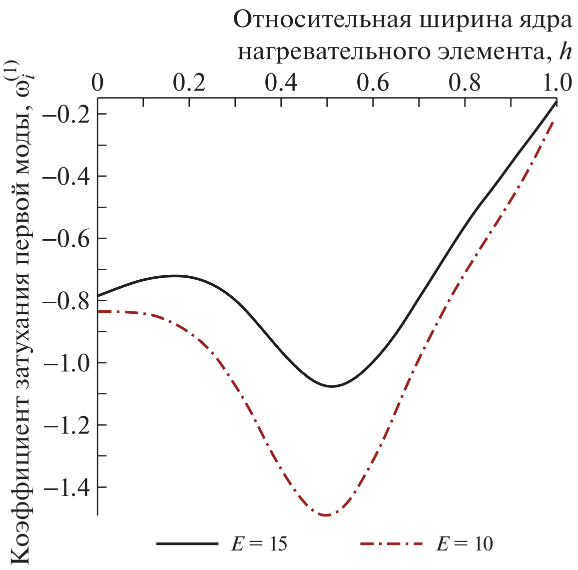

Рис. 6. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от h при различных значениях кратности E.

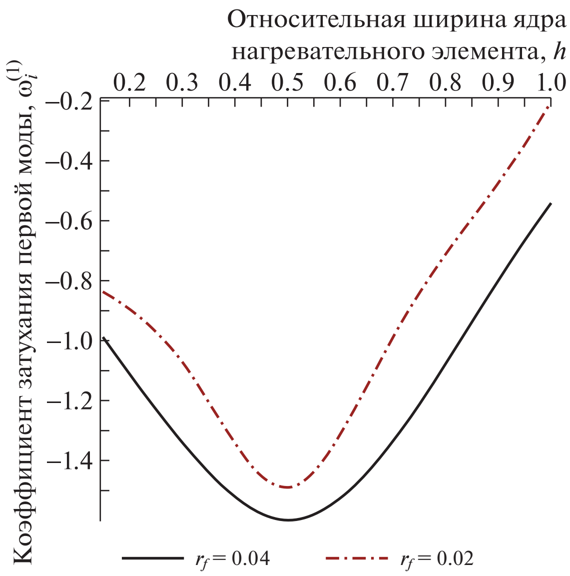

Рис. 7. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от радиуса печи и h.

процесс вытяжки является устойчивым. Расчеты проводились в Comsol Multiphysics с кратностью вытяжки из области устойчивости. Значения остальных параметров процесса вытяжки были следующими:

$$v_0 = 0.01, \quad r_f = 0.02, \quad r_{10} = 0.008,$$
$$r_{20} = 0.015, \quad T_{f1} = 1600, \quad T_{f2} = 2100.$$

Результаты исследований, представленные на рис. 6, демонстрируют существенную зависимость устойчивости вытяжки от параметра h. Выявляется оптимальная зона $h \in [0.2; 0.7]$, в которой формирование волокна наиболее устойчиво. Как и в изотермическом случае, существенно влияние кратности на устойчивость. Таким образом, полученные закономерности позволяют проектировать системы управления температурой печи с целью повышения устойчивости процесса вытяжки.

Выявлена существенная зависимость устойчивости процесса вытяжки от радиуса печи. На рис. 7 представлена зависимость первых мод от указанного расстояния и ядра печи h. При фиксированном радиусе преформы с увеличением радиуса печи r_f увеличивается расстояние между поверхностями кварца и нагревателя, что приводит к большей стабилизации процесса вытяжки.

Получена достаточно интересная зависимость устойчивости вытяжки от температуры на концах печи (T_{f1}). При значениях T_{f1}, меньших температуры плавления кварца, устойчивость процесса практически не зависит от T_{f1}. При T_{f1} выше температуры плавления с ростом T_{f1} процесс вытяжки становится менее устойчивым (рис. 8).

Таким образом, существуют оптимальные параметры нагревательного элемента — ширина ядра h, его температура T_{f2}, температура на краях печи T_{f1} и радиус печи r_f, — при которых значительно (в несколько раз) увеличивается устойчивость процесса вытяжки кварцевых труб.

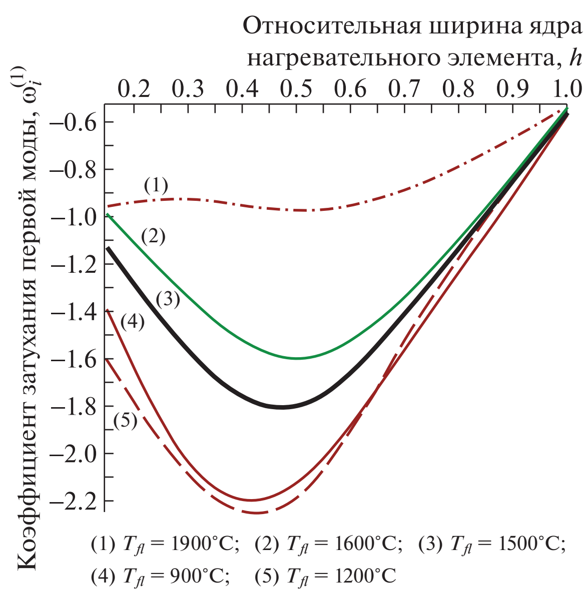

Рис. 8. Зависимость $\omega_i^{(1)}$ от h при различных значениях T_{f1}.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование посвящено вопросам устойчивости процесса вытяжки кварцевых капилляров для PCF. Получена модифицированная модель вытяжки PCF, учитывающая силы инерции, вязкого трения и поверхностного натяжения, а также все виды теплообмена. В рамках линейной теории устойчивости разработаны подходы к оценке устойчивости модельных решений. Оценено влияние кратности вытяжки E и сил инерции (числа Рейнольдса) на устойчивость рассматриваемого процесса. При этом одновременно учитывалось влияние геометрических параметров заготовки.

Исследовано влияние относительной ширины нагревательного элемента на устойчивость. Показано, что с увеличением кратности вытяжки теряется устойчивость процесса. Расчеты при различных значениях радиуса печи показали, что устойчивость зависит от расстояния между печью и поверхностью заготовки: чем меньше радиус, тем менее устойчив процесс. Показано существование оптимальных параметров нагревательного элемента – ширины ядра, его температуры, температуры на краях печи и радиуса печи, – при которых в несколько раз увеличивается устойчивость процесса вытяжки. Выявлена оптимальная зона нагрева, в которой процесс формирования волокна наиболее устойчив.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pendão C., Silva I.* // Sensors. 2022. V. 22. P. 7554. https://doi.org/10.3390/s22197554
2. *Lin W., Zhang C., Li L., Liang S.* // In Proceedings of the 2012 Symposium on Photonics and Optoelectronics. Shanghai. China. 21–23 May 2012. P. 1.
3. *Krohn D.A., MacDougall T., Mendez A.* Fiber Optic Sensors: Fundamentals and Applications. Spie Press. Bellingham. WA. 2014.
4. *Xiao F., Chen G.S., Hulsey J.L.* // Sensors. 2017. V. 17. P. 2390. https://doi.org/10.3390/s17102390
5. *Padma S., Umesh S., Pant S., Srinivas T.* // J. Biomedical Opt. 2016. V. 21. P. 86012. https://doi.org/10.1117/1.JBO.21.8.086012
6. *Kahandawa G.C., Epaarachchi J., Wang H., Lau K.* // Photonic Sens. 2012. V. 2. P. 203. https://doi.org/10.1007/s13320-012-0065-4
7. *Qiao X., Shao Z., Bao W., Rong. Q.* // Sensors. 2017. V. 17. P. 429. https://doi.org/10.3390/s17030429
8. *Nie M., Xia Y.H., Yang H.S.* // Clust. Comput. 2019. V. 22. P. 8217. https://doi.org/10.1007/s10586-018-1727-9
9. *Wu T., Liu G., Fu S., Xing F.* // Sensors 2020. V. 20. P. 4517. https://doi.org/10.3390/s20164517
10. *Reeves W., Knight J., Russell P., Roberts P.* // Opt. Express 2002. 10. 609. https://doi.org/10.1364/oe.10.000609
11. *Habib M.A., Anower M.S., Hasan M.R.* // Curr. Opt. Photon. 2017. V. 1. P. 567. https://doi.org/10.3807/COPP.2017.1.6.567
12. *Troia B., Paolicelli A., Leonardis F., Passaro V.* // Adv. Photon. Cryst. 2013. V. 1. P. 241. https://doi.org/10.5772/53897
13. *Maidi A.M., Kalam M.A., Begum F.* // Photonics. 2022. V. 9. P. 958. https://doi.org/10.3390/photonics9120958
14. *Griffin S.* // Lc Gc North America. 2002. V. 20 (10). P. 928.
15. *Mcmican R.* // Reinforced Plastics 2012. V. 56 (5). P. 9. https://doi.org/10.1016/S0034-3617(12)70110-8
16. *Xue C., Qin Y., Fu H., Fan J.* // Polymers 2022. V. 14. P. 3372. https://doi.org/10.3390/ polym14163372
17. *Wang K.Y., Liu R.X., Zhang L., Yan Y.H., Sui X.Y., Zhou C.L., Cheng Z.Q.* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engin. 2019. P. 678. https://doi.org/10.1088/1757-899X/678/1/012076
18. *Fitt A.D., Furusawa K., Monro T.M., Please C.P.* // J. Light. Technol. 2001. V. 19. P. 1924. https://doi.org/10.1109/50.971686
19. *Pervadchuk V., Vladimirova D., Gordeeva I., Kuchumov A.G., Dektyarev D.* // Fibers 2021. V. 9. P. 77. https://doi.org/10.3390/fib9120077
20. *Lienard I.V., John H.* A Heat Transfer Textbook. Phlogiston Press: Cambridge. MA. 2017.
21. *Fitt A.D., Furusawa K., Monro T.M., Please C.P., Lienard I.V., John H.* // J. Light. Technol. 2001. V. 19. P. 1924. https://doi.org/10.1109/50.971686
22. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press. 2010. https://doi.org/10.1017/CBO9780511616938
23. *Morgan R.* // Math. J. 2015. V. 16. P. 67.
24. *Rodríguez R.S., Avalos G.G., Gallegos N.B., Ayala-jaimes G., Garcia A.P.* // Symmetry 2021. 13. 854. https://doi.org/10.3390/sym13050854
25. *Jung H.W., Hyun J.C.* // Rheology Rev. 2006. V. 2006. P. 131.
26. *Bechert M., Scheid B.* // Phys. Rev. Fluids 2017. V. 2. P. 10.1103. https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.113905
27. *Van der Hout R.* // Europ. J. Appl. Math. 2000. V. 11. P. 129. https://doi.org/10.1017/S0956792599004118
28. *Hagen T., Langwallner B.* // ZAMM·Z. Angew. Math. Mech. 2006. V. 86. P. 63. https://doi.org/10.1002/zamm.200410225
29. *Vasil'ev V.N., Dul'nev G.N., Naumchik V.D.* // J. Engeen. Phys. 1988. V. 55. P. 918.