

УДК 543.42

МЕТОД УТОЧНЕНИЯ ЧАСТОТНОГО СДВИГА СПЕКТРА,
ПОЛУЧЕННОГО ПРИ НИЗКОМ РАЗРЕШЕНИИ АНАЛИЗАТОРА¹© 2023 г. Б. И. Валеев^{а,*}, Т. А. Аглиуллин^а, А. Ж. Сахабутдинов^а^аКазанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева–КАИ
Кафедра радиофотоники и микроволновых технологий
Россия, 420111, Казань, ул. К. Маркса, 10

*e-mail: kje.student@mail.ru

Поступила в редакцию 23.01.2022 г.

После доработки 21.04.2023 г.

Принята к публикации 21.04.2023 г.

Предлагается новый метод определения частотного сдвига спектра, полученного в условиях низкой разрешающей способности анализатора, позволяющий за счет математической обработки сигнала, описывающего спектр, определить его частотный сдвиг с разрешением, на два порядка превышающим приборное. Метод основан на представлении сигнала, описывающего частотно-сдвинутый спектр, в виде непрерывной функции, дифференцируемой всюду, разложении ее в ряд Тейлора, аппроксимации производных конечными разностями заданного порядка и определении частотного сдвига методом наименьших квадратов. Приведены математическое обоснование метода и результаты численных экспериментов. Обсуждаются перспективы применения предложенного метода.

DOI: 10.31857/S0032816223050154, EDN: ZKKPUZ

ВВЕДЕНИЕ

Задача определения частотного сдвига спектра (ЧСС) отражения или пропускания, вызванного различного рода физическими воздействиями, актуальна во многих областях науки и техники [1]. Существующие приборы, например, оптико-электронные анализаторы спектра, часто не обеспечивают требуемого разрешения для обеспечения необходимой точности определения ЧСС [2].

Ключевой задачей при проектировании волоконно-оптических измерительных систем является определение центральной длины волны (или ее сдвига) волоконной брэгговской решетки (ВБР), используемой в качестве чувствительного элемента волоконно-оптических датчиков. Для определения центральной длины волны ВБР используются классические оптоэлектронные интеррогаторы, включающие интерферометры Фабри–Перо, перестраиваемые лазеры, частотные фильтры или дифракционные решетки, спектральная характеристика которых определяется в виде дискретного набора данных пар значений длины волны и амплитуды [3]. Основной проблемой, с которой сталкиваются разработчики, является низкая точность определения частотного сдвига спектра ВБР и, как

следствие, низкая точность измерения внешнего физического воздействия.

В литературе известны различные методы уточнения определенного положения центральной длины волны ВБР в условиях низкого разрешения измерения спектра. Примером такого метода является метод обработки сигнала, который предполагает уточнение положения центральной длины волны по трем отдельным точкам путем построения через них полинома второй степени и определения его центра [4]. В дальнейшем этот подход был развит в метод, предполагающий построение полинома наименьшего среднеквадратического отклонения, проходящего через несколько отдельных точек спектра ВБР [5]. Другим подходом, позволяющим решить указанную проблему, является метод центра масс, который предполагает замену определения центральной длины волны ВБР на определение центра масс плоской фигуры, образованной огибающей спектра, первая и последняя точки которой соответствуют границам диапазона измерений и оси абсцисс [6]. Ранее авторами был рассмотрен метод интерполяции симметричного спектра ВБР с помощью гауссовой кривой [7] и определения положения его центра, который дает хороший результат, если спектр ВБР состоит из большого числа точек.

В то же время, методы [4–7] дают неудовлетворительные результаты, если к низкой разрешаю-

¹ Международная конференция “Оптическая рефлектометрия, метрология и сенсорика 2023”, Россия, Пермь, 24–26 мая 2023 г. (International conference “Optical Reflectometry, Metrology & Sensing 2023”, Russia, Perm, 24–26, May 2023).

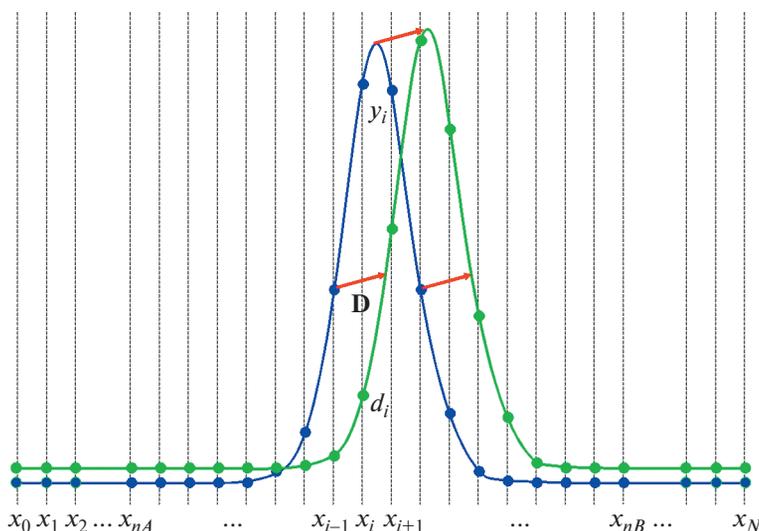


Рис. 1. Спектр ВБР в невозмущенном (синяя линия, $\{y_i\}$) состоянии и после воздействия (зеленая линия, $\{d_i\}$).

щей способности анализатора добавляется флуктуация мощности оптического излучения и, кроме того, спектр ВБР состоит из небольшого числа точек (от 3 до 7), что часто встречается на практике.

Как было сказано выше, необходимость разработки новых методов уточнения частотного сдвига спектра ВБР возникает одновременно с требованием повышения точности определения внешнего физического воздействия. Проблема может быть решена непосредственно путем увеличения разрешения оптико-электронного анализатора спектра, цена которого растет экспоненциально с увеличением разрешения, поскольку она влечет за собой модернизацию элементной базы, а также использование более дорогих компонентов.

Второй подход заключается в переходе к радиофотонному опросу [1, 2], в частности, к системам с использованием адресных [3] и многоадресных [4, 5] волоконных брэгговских структур. Однако этот подход также требует замены оборудования и перехода на новые методики измерений.

Как потребители, так и производители оборудования ищут методы, которые позволили бы экстенсивно повысить точность приборов без замены компонентов и перехода на другую методику измерений. На такое решение проблемы направлены методы математической обработки ЧСС, которые сначала позволили увеличить разрешение на порядок (примерно до 15–17 пм) [6]. Затем с использованием особого учета нелинейных искажений спектра разрешение было увеличено еще на порядок, оно достигло в некоторых случаях почти 1.5 пм, но только для малых частотных сдвигов спектра [7] (до нескольких ГГц).

Таким образом, целью работы является разработка метода обработки сигнала, описывающего

спектр гауссовой ВБР, полученной в условиях низкого разрешения, который обеспечивал бы заданную точность определения ее центральной длины волны при возможном смещении спектра на ± 0.5 нм (± 60 ГГц) в обе стороны от положения невозмущенной решетки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Исходный набор данных с невозмущенным спектром обозначается как $\{x_i, y_i\}$, а набор данных со сдвинутым по частоте спектром – как $\{x_i, d_i\}$, $i = 0, N$. Считаем, что условия внешнего физического воздействия на ВБР таковы, что он обеспечивает только ЧСС и изменение его амплитуды без искажения гауссовой формы. Это предположение одновременно учитывает возможные флуктуации мощности источника излучения и вероятность динамических потерь. Предполагается, что ЧСС и изменение амплитуды происходят одновременно по двум осям (рис. 1).

На рис. 1 используются следующие обозначения: x_i – длина волны, y_i – амплитуды спектра в невозмущенном состоянии, d_i – амплитуды сдвинутого спектра, $\mathbf{D}(\Delta x, \Delta y)$ – вектор сдвига, одинаковый для всех точек спектральной кривой. Функция $f(x)$ произвольна по параметрам функции Гаусса, определена, непрерывна и бесконечно дифференцируема для всех x в диапазоне $[x_0, x_N]$, кроме того, $\{y_i\}$ и $\{d_i\}$ – значения этой функции $f(x)$, измеренные соответственно в невозмущенном и смещенном положениях.

Задача заключается в определении координат вектора сдвига \mathbf{D} по оси абсцисс (Δx) и по оси ор-

динат (Δy). Основной целью является нахождение ЧСС по оси абсцисс, но задача решается и в общем случае.

Учитывая, что исходный и сдвинутый по частоте спектры являются значениями одной и той же непрерывной и везде дифференцируемой функции $f(x)$, получаем, что

$$\begin{cases} y_i = f(x_i) \\ d_i = f(x_i + \Delta x) + \Delta y, \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Поскольку $f(x)$ бесконечно дифференцируема в каждой точке, функцию $f(x_i + \Delta x)$ можно представить в виде разложения Тейлора в окрестности x_i :

$$\begin{aligned} f(x_i + \Delta x) &= f(x_i) + \\ &+ \sum_{n=1}^{nD} \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} \Delta x^n + o(\Delta x^{nD+1}), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\forall i = \overline{1, N},$$

где nD – число производных, используемых при аппроксимации разложения, $o(\Delta x^{nD+1})$ – остаточный член ряда Тейлора, погрешность которого имеет порядок Δx^{nD+1} . В соотношении (2) мы пренебрегаем малым остаточным членом ряда Тейлора, далее мы подставляем выражение (2) в формулу (1):

$$d_i = y_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} \Delta x^n + \Delta y, \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Получаем систему из N уравнений с $2 + nD \cdot N$ неизвестными, а именно, Δx , Δy и nD производных от $f^{(n)}(x_i)$ в каждой из точек x_i ($n = \overline{1, nD}$, $i = \overline{1, N}$).

Производная любого порядка может быть аппроксимирована конечно-разностными соотношениями с заданным порядком аппроксимации по заданной дискретной схеме точек. Для центральных (симметричных) конечных разностей по схеме из $nP = 2nS + 1$ точек $\{x_{i-nS}, \dots, x_i, \dots, x_{i+nS}\}$ производная любого порядка может быть представлена линейной комбинацией значений функции в точках схемы:

$$\begin{aligned} p_{i,n} = f^{(n)}(x_i) &= \sum_{k=-nS}^{+nS} C_{k+nS} f(x_{i+k}), \\ i &= \overline{nS, N - nS}, \quad n = \overline{1, nD}, \end{aligned} \quad (4)$$

где C_k – коэффициенты линейной комбинации, а $p_{i,n}$ обозначает n -ю производную в точке x_i . Центральные конечные разности не позволяют вычислить производную на концах всего интервала (в точках сетки с индексами $i = 0$; $nS - 1$ и $i = N$; $N - nS$). Для аппроксимации производной в крайних точках можно использовать асимметричные конечные разности, например, “конечные разности вперед” и “конечные разности назад”, но пока оставим этот вопрос за рамками обсуждения, пола-

гая, что интервал $[x_{nA}, x_{nB}]$ находится строго внутри интервала $[x_{nS}, x_{N-nS}]$.

Коэффициенты C_k линейной комбинации (4) в случае симметричных конечных разностей для аппроксимации производной степени nD могут быть найдены как решение системы линейных уравнений

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}, \quad (5)$$

где \mathbf{A} – матрица системы линейных уравнений, \mathbf{B} – вектор свободных членов, и \mathbf{C} – вектор коэффициентов. Элементы матрицы \mathbf{A} определяются как

$$\mathbf{A} = \{A_{i,j}\} = (j - nS)^i, \quad \forall i, j = \overline{0, nP - 1}, \quad (6)$$

а векторы свободных членов задаются следующей формулой:

$$\mathbf{B} = \{B_i\} = nD! \cdot \delta(nD), \quad i = \overline{0, nP - 1}, \quad (7)$$

где nD – порядок производной, $\delta(x)$ – дельта-функция. Все коэффициенты \mathbf{C} могут быть вычислены для произвольного порядка производной nD на произвольном эквидистантном симметричном шаблоне, содержащем nP точек, при условии, что $nD \leq nP - 1$, иначе вектор свободных членов \mathbf{B} (7) равен нулю, а система уравнений (5) имеет тривиальное решение. Порядок аппроксимации производной определяется величиной $(nP - nD + 1)$.

Таким образом, исходный набор данных $\{x_i, y_i\}$ ($i = \overline{0, nP - 1}$) позволяет определить производные $p_{i,n}$ любого заданного максимального порядка nD , вычисленные как конечные разности на симметричном шаблоне из nP точек во всех внутренних точках x_i ($i = \overline{nS, N - nS}$).

Поэтому, учитывая сделанные обозначения и предварительно вычисленные производные, соотношения (3) мы можем переписать следующим образом:

$$d_i = y_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n + \Delta y, \quad \forall i = \overline{nA, nB}. \quad (8)$$

В формуле (8) по сравнению с формулой (3) не только использованы обозначения для вычисленных производных, но и заменены пределы изменения показателя i , поскольку смещение спектра отражения каждого датчика целесообразно определять только в конкретном соответствующем диапазоне длин волн. В результате соотношения (8) дают $(nB - nA + 1)$ уравнений для определения только двух неизвестных Δx и Δy – координат вектора смещения $\mathbf{D}(\Delta x, \Delta y)$. Переопределенная система решается методом наименьших квадратов путем минимизации выпуклого положительно определенного функционала:

$$\Phi(\Delta x, \Delta y) = \sum_{i=nA}^{nB} \left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n + \Delta y \right)^2 \rightarrow \min \geq 0. \quad (9)$$

Требование (9) эквивалентно системе из двух уравнений, состоящей из частных производных $\Phi(\Delta x, \Delta y)$ относительно Δx и Δy :

$$\begin{cases} \sum_{i=nA}^{nB} \left(\left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n + \Delta y \right) \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} n \Delta x^{n-1} \right) = 0, \\ \sum_{i=nA}^{nB} \left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n + \Delta y \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения системы (10) могут быть разрешены относительно переменных и сведены к двум отдельным уравнениям. Более того, величина Δy может быть явно выражена из последнего уравнения:

$$\Delta y = \frac{1}{nB - nA + 1} \sum_{i=nA}^{nB} \left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n \right). \quad (11)$$

Подстановка Δy из формулы (11) в первое уравнение системы (10) дает алгебраическое уравнение одной переменной для определения Δx :

$$\begin{aligned} P(\Delta x) = \sum_{i=nA}^{nB} \left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n + \right. \\ \left. + \frac{\sum_{i=nA}^{nB} \left(y_i - d_i + \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} \Delta x^n \right)}{nB - nA + 1} \sum_{n=1}^{nD} \frac{p_{i,n}}{n!} n \Delta x^{n-1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В этом случае уравнение (12) является полиномом степени $2nD - 1$, и решение этого уравнения эквивалентно нахождению всех корней полинома $P(\Delta x)$, который в общем случае имеет ровно $2nD - 1$ корней. Нечетная степень многочлена гарантирует, что существует хотя бы один вещественный корень.

Общий алгоритм предлагаемого подхода разделен на две группы действий, первая из которых выполняется заранее и однократно, а вторая – во время каждого измерения.

Предварительная последовательность действий предполагает определение нечетного числа точек схемы nP и числа учитываемых производных разложения ряда Тейлора nD . Порядок ошибки при аппроксимации производной определяется величиной $\Delta x^{n - nD + 1}$, где Δx принимается за величину максимального смещения спектра от невозмущенного положения. Вычисляются все коэффициенты C , необходимые для аппроксима-

ции производной всех порядков (до nD включительно) по заданному числу точек схемы. Осуществляется одно контрольное измерение спектра через определение значений $\{y_i\}$ в дискретных точках $\{x_i\}$ для $i = 0, N$. На основе полученных значений спектра вычисляются производные $p_{i,n}$ всех порядков ($n = \overline{1, nD}$) во всех внутренних точках спектра ($i = \overline{nS, N - nS}$).

После этого система готова к работе, и в процессе ее работы на каждом шаге осуществляется измерение спектра $\{d_i\}$ для $i = 0, N$ и решается уравнение (12) для определения Δx , т.е. сдвига спектра $\{d_i\}$ относительно спектра $\{y_i\}$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для тестирования предложенного алгоритма была разработана программа, реализующая представленный алгоритм для определения центральной длины волны модели ВБР с различными формами спектра отражения. В данном случае рассматривается форма профиля с нормальным (гауссовым) распределением

$$G(x, \mu, \sigma, y_S, a_N) = A \cdot \left[\exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) + y_S + \left(\frac{1}{2} - \text{rnd}(1)\right) \cdot a_N \right], \quad (13)$$

где x – длина волны, μ – центральная длина волны, σ – добротность контура, y_S – минимальное значение амплитуды спектра, a_N – амплитуда шумовой компоненты, A – максимальная амплитуда каждого из профилей. Моделирование показало, что ненулевая амплитуда может быть выбрана произвольно и не влияет на решение. Для того чтобы модель была максимально приближена к реальным физическим параметрам, амплитуда принята равной $A = 10^4$. Амплитуда шумовой составляющей a_N не превышает 0.1% от максимального значения амплитуды, а минимальное значение в спектре (“пьедестал”) в разных случаях моделирования варьировалось от 0 до 20% от максимального значения амплитуды. При этом, как показало моделирование, последний параметр также не влияет на решение.

Остальные параметры моделирования были выбраны максимально приближенными к условиям работы интеррогатора, собранного на базе анализатора спектра I-MON [7], а именно, количество спектральных точек $N = 510$, границы спектрального диапазона $\lambda_{\min} = 1510$ нм и $\lambda_{\max} = 1595$ нм, шаг дискретизации спектра $h = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) / (N - 1) \approx 0.167$ нм. Центральная длина волны ВБР составляла $\mu = 1550$ нм, с добротностью $\sigma = 0.2$. Максимальный диапазон ЧСС составил 4 нм ($\mu \pm 2$ нм), а соответствующие индек-

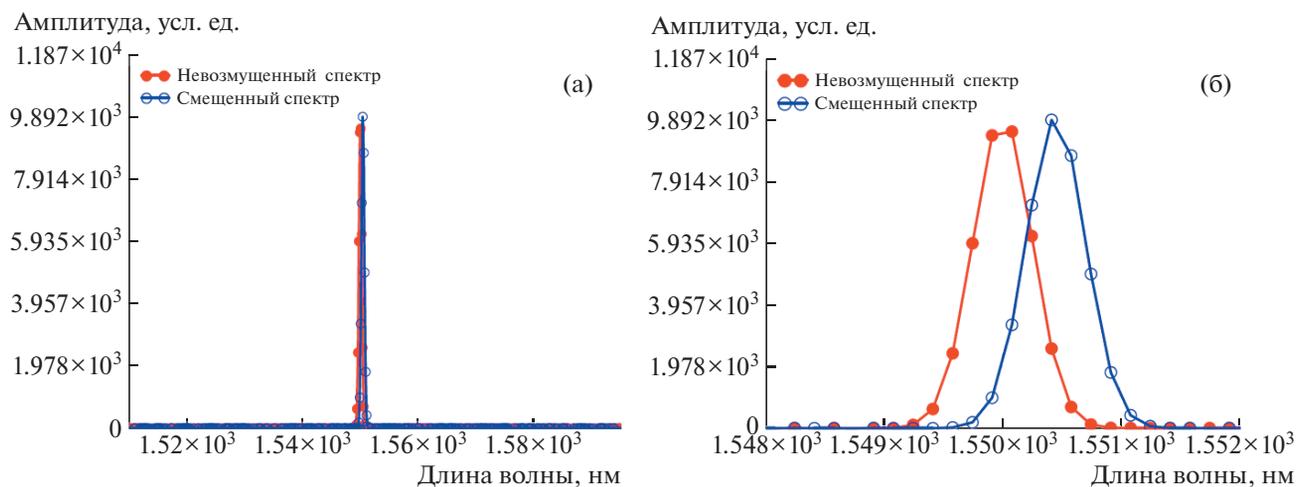


Рис. 2. Спектр гауссовой ВБР: **а** – в полном спектральном диапазоне, **б** – в выбранном диапазоне длин волн датчика. Красная линия на рисунках обозначает невозмущенный спектр, синяя линия – спектр с максимальным ЧСС 0.5 нм.

сы диапазона в спектре $nA = 227$, $nB = 251$. Число точек шаблона для аппроксимации производной nP принималось равным от 15 до 17, максимальное число членов $nD = 14$, что обеспечило аппроксимацию производной конечными разностями до третьего порядка малости в худшем случае.

Спектр отражения ВБР с гауссовым профилем для заданных параметров моделирования показан на рис. 2а, б. Красной линией на рисунках обозначен невозмущенный спектр, смоделированный для нормальных условий, синей линией обозначен спектр с максимальным ЧСС 0.5 нм.

Поскольку определенная всюду на отрезке функция $P(\Delta x)$ имеет разные знаки на краях отрезка, ее корень на этом отрезке может быть найден итерационным методом половинного деления. В этом случае критерием останова итераций является не близость к нулю значения функции, а величина сужающегося от итерации к итерации интервала.

Задаваясь требованием, чтобы абсолютная ошибка нахождения нуля уравнения (12) не превышала $\epsilon = 10^{-14}$ м, зададим сдвиг в диапазоне от -0.5 до $+0.5$ нм, построим частотно-сдвинутый спектр, получим его значения в контрольных точках, на основе полученных данных сравним два спектра $\{y_i\}$ и $\{d_i\}$ и построим зависимость инструментального значения ЧСС от значения ЧСС, полученного на основе анализа спектров по предложенному алгоритму.

На рис. 3 показана зависимость реального и измеренного значений сдвига спектра относительно его невозмущенного состояния (красная линия, вдоль левой оси) и абсолютной ошибки в определении сдвига (синяя линия, вдоль правой оси) для различных значений сдвига. Как видно

на рис. 3, максимальная ошибка в определении ЧСС для ВБР с гауссовым профилем не превышает 0.3 пм, что на полтора порядка выше возможностей других методов уточнения положения центральной длины волны.

Численное моделирование показало, что чем меньше точек используется при описании спектра (т.е. чем уже спектральная характеристика), тем менее точным является расчет реального ЧСС из дискретно полученных значений. Наилучшие результаты получаются при использовании аппроксимирующих функций путем разложения в ряд Тейлора с производной до 13–15 порядка включительно с аппроксимацией производных 17-точечным шаблоном, что обеспечивает аппроксимацию конечными разностями с погрешностью от 2-го до 4-го порядков малости. Использование для аппроксимации 19 и более точечных шаблонов вызывает ряд трудностей, так как в этом случае матрица уравнения (5) слабо определена (определитель матрицы очень велик) и решение системы уравнений напрямую проблематично, что делает невозможным вычисление коэффициентов аппроксимации производных через такое большое количество точек. Использование конечных разностей до первого порядка аппроксимации не увеличивает точность аппроксимации спектрального сдвига.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основное преимущество предложенного алгоритма заключается в том, что он не содержит сложных вычислений и может быть реализован даже на самом простом микроконтроллере. Вся основная относительная вычислительная сложность приходится на предварительную последовательность действий, выполняемых один раз, а в процессе каждого

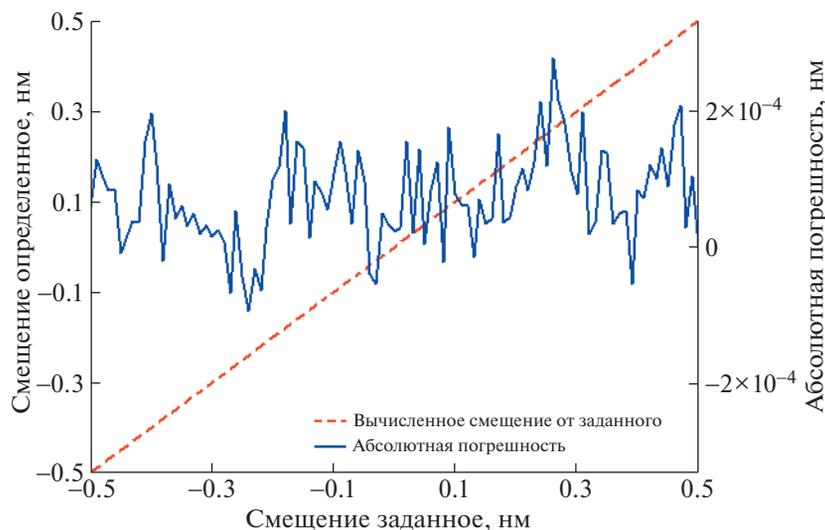


Рис. 3. Зависимость реального и измеренного значений ЧСС относительно его невозмущенного состояния (красная линия, левая ось) и абсолютная ошибка в определении ЧСС (синяя линия, правая ось) при различных ее значениях для гауссовой ВБР.

измерения решается задача нахождения единственного существующего действительного корня многочлена. При этом для решения этой задачи может быть использован простой метод половинного деления, который обеспечивает нахождение корня не более чем за 30–35 итераций, в зависимости от требуемой точности. Несмотря на кажущуюся простоту математического аппарата, предложенный алгоритм позволяет уточнить значение ЧСС, полученное при низком разрешении анализатора спектра, почти на три порядка.

Применение метода значительно расширяет возможности оптико-электронных измерительных систем, основанных на анализе центральной длины волны ВБР. Другим преимуществом метода является его независимость от флуктуаций спектра и интенсивности.

К недостаткам предложенного алгоритма относится необходимость предварительного измерения огибающей спектра ВБР. Только в этом случае можно определить положение центральной длины волны огибающей спектра ВБР произвольной формы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа была поддержана Министерством науки и высшего образования в рамках программы “Приоритет 2030”.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Capmany J., Novak D.* // Nature Photon. 2007. V. 1. P. 319. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2007.89>
2. *Jin Y., Dong X., Gong H., Shen C.* // Microwave Opt. Technol. Lett. 2010. V. 52. P. 1375. <https://doi.org/10.1002/mop.25178>
3. *Morozov O.G., Sakhabutdinov A.J.* // Computer Opt. 2019. V. 43. P. 535. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-4-535-543>
4. *Agliullin T.A., Anfinogentov V.I., Misbakhov R.Sh., Morozov O.G., Sakhabutdinov A.Zh.* // Proceed. Telecomm. Univers. 2020. V. 6. P. 6. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2020-6-1-6-13>
5. *Morozov O., Sakhabutdinov A., Anfinogentov V., Misbakhov R., Kuznetsov A., Agliullin T.* // Sensors 2020. V. 20. P. 2693. <https://doi.org/10.3390/s20092693>
6. *Сахабутдинов А.Ж., Нуреев И.И., Морозов О.Г.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 3–2. С. 98.
7. *Anfinogentov V., Karimov K., Kuznetsov A., Morozov O.G., Nureev I., Sakhabutdinov A., Lipatnikov K., Hussein S.M.R.H., Ali M.H.* // Sensors 2021. V. 21. P. 2817. <https://doi.org/10.3390/s21082817>