

УДК 531.31

ДИНАМИКА УПРУГОГО ЦИЛИНДРА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© 2019 г. И. Г. Горячева^{1,*}, А. А. Зобова^{2,**}¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: goryache@ipmnet.ru

** e-mail: azobova@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 19.04.2018 г.

Изучается квазистатическое плоскопараллельное движение бесконечного упругого цилиндра по плоскому горизонтальному основанию из того же материала (ось цилиндра горизонтальна). Распределение нормальных и касательных напряжений в области контактного взаимодействия цилиндра и плоскости берется из решения задачи теории упругости, в которой используется модель сухого трения Амонтона–Кулона на участке относительного проскальзывания и учитывается наличие участка сцепления. Получено аналитическое решение задачи, построен фазовый портрет системы. Проводится сравнение с задачей о движении абсолютно твердого цилиндра по твердой плоскости с сухим трением и без проскальзывания.

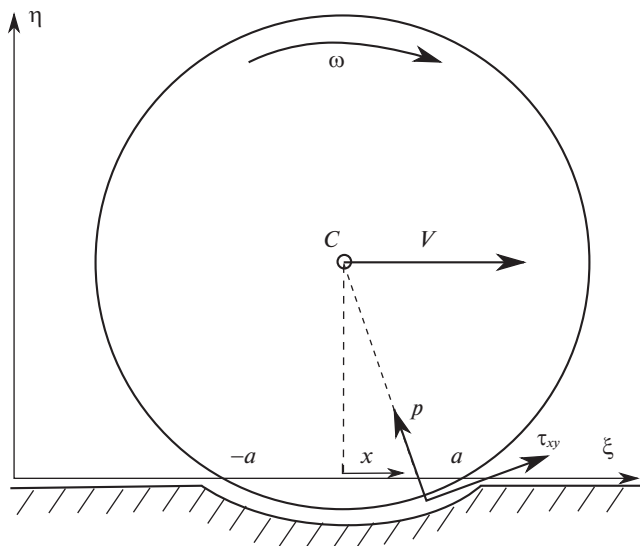
Ключевые слова: качение с проскальзыванием, упругий цилиндр, сухое трение

DOI: 10.1134/S003282351901003X

1. Введение. Одна из классических постановок задачи теоретической механики о движении тела по поверхности постулирует контакт твердого тела в единственной точке и отсутствие в этой точке проскальзывания [1]. Это условие приводит к дифференциальной связи, в общем случае неголономной, которая позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений. Реакция связи вычисляется из динамических уравнений как функция положения и скорости твердого тела. Если реакция не превышает максимальной силы трения Кулона для данных материалов, то говорят, что неголономная связь может быть реализована сухим трением покоя.

Вопрос об обоснованности предположения о том, что контакт реальных выпуклых тел происходит в одной точке, и как следствие, реализуемости неголономных связей сухим трением Кулона был поднят в статье В.Ф. Журавлева [2], что вызвало пристальное внимание специалистов по аналитической механике к контактным задачам и моделированию трения. В частности, были предложены модели контактного взаимодействия, упрощенные по сравнению с решениями контактных задач теории упругости и построенные либо в предположении статического герцевского распределения давлений в пятне контакта, либо из динамических соображений (см. обзор [3]). Отметим, что конечная цель построения этих моделей заключается в изучении динамики абсолютно твердого тела (например, [4–6]). В некоторых случаях исследуется также динамика удара тела о шероховатую поверхность и релаксация колебаний по нормали к опоре [7, 8]. Отметим также экспериментальные работы [9, 10].

Распределение нормальных и касательных напряжений в области контакта взаимодействующих тел является предметом исследования механики контактных взаимодействий [11]. Использование их при анализе задач динамики позволяет выявить но-



Фиг. 1

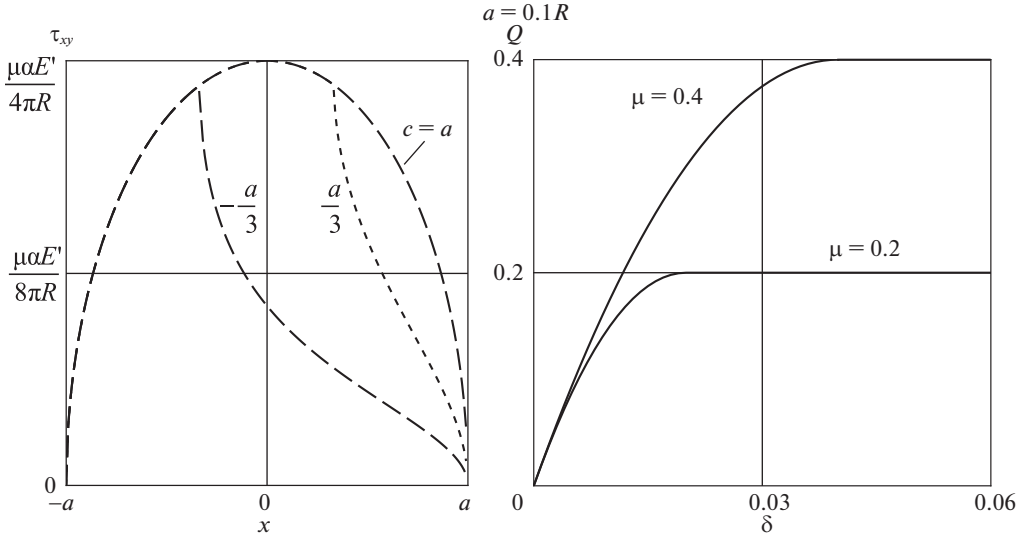
вые свойства решений. Простейшей из таких задач является задача о стационарном качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругой плоскости из того же материала [11, 12]. В представленной работе проводится анализ динамики плоскопараллельного движения цилиндра и сопоставление полученных результатов с решениями задач о движении цилиндра по плоскости с сухим трением скольжения Кулона и без проскальзывания.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскопараллельное движение бесконечного упругого цилиндра с удельной (на единицу длины) массой m и радиусом R по плоскому горизонтальному основанию из того же материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Введем инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой принадлежит недеформированной опорной плоскости, ось $O\eta$ направлена вертикально вверх, ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости движения и сонаправлена с осью цилиндра. Распределение масс в цилиндре предполагается осесимметричным, так что центр масс каждого сечения цилиндра C лежит на его оси. Горизонтальную скорость оси цилиндра обозначим $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_\xi$, а угловую скорость обозначим $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_\zeta$. Положительное значение ω соответствует вращению по часовой стрелке, если смотреть с конца оси $O\zeta$ (фиг. 1).

Распределение нормального давления и касательных напряжений будем брать из решения задачи теории упругости в плоской квазистатической постановке [11, 12]. Предполагается, что скорость движения оси цилиндра мала по сравнению со скоростями распространения возмущений в упругой среде. Введем относительное проскальзывание цилиндра

$$\delta = \frac{\omega R - V}{V} \quad (2.1)$$

В области контактного взаимодействия введем декартову систему координат $C'x'uz'$ с осями, параллельными $O\xi\eta\zeta$ с началом в точке C' — проекции центра сечения цилиндра на недеформированную плоскость. Область контактного взаимодействия цилиндра



Фиг. 2

дра и плоскости — это полоса $x \in (-a, a)$, в которой нормальные давления p и касательные напряжения τ_{xy} при $V > 0$ задаются соотношениями

$$p(x) = \frac{E'}{4\pi R} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a < x < a; \quad E' = \frac{\pi E}{1 - \nu^2}, \quad a = \sqrt{\frac{8RP}{E'}} \quad (2.2)$$

$$\tau_{xy}(x) = \begin{cases} \mu p(x), & -a < x < c \\ \mu \left(p(x) - \frac{E'}{4\pi R} \sqrt{(a-x)(x-c)} \right), & c < x < a, \end{cases} \quad (2.3)$$

где μ — коэффициент сухого трения Амонтона–Кулона, знак которого совпадает со знаком δ (на фиг. 1 изображен случай $\delta > 0$). Полудлина площадки контакта a в контактной задаче вычисляется из статического условия равенства равнодействующей нормального давления внешней прижимающей нагрузке P .

На участке $c < x < a$ области контактного взаимодействия происходит сцепление цилиндра с опорной плоскостью, и касательные напряжения на нем ниже предельного трения (трения покоя). На участке $-a < x < c$ происходит скольжение. Положение границы участка сцепления зависит от величины относительного проскальзывания следующим образом:

$$c = a \left(\frac{2\delta R}{\mu a} - 1 \right) \quad (2.4)$$

Участок сцепления существует при $-a < c < a$, т.е. при $\delta/\mu < a/R$. Графики распределения касательного напряжения в области контакта изображены в случаях $c = a, a/3, -a/3$ на фиг. 2 слева при $a = 0.1R$.

Для сведения случая $V < 0$ к приведенному выше необходимо изменить направление осей $C'x$ и $C'z$ и знаки V, ω на противоположные, при этом знак δ не изменится.

Вычислим равнодействующие $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ нормального давления $p(x)$ (2.2) и касательных напряжений $\tau_{xy}(x)$ (2.3), а также их моменты $\mathbf{M}_p^C$ и $\mathbf{M}_\tau^C$ относительно оси цилиндра. При $V > 0$ получим (здесь по-прежнему, $\text{sign} \mu = \text{sign} \delta$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= P\mathbf{e}_\eta, \quad P = \int_{-a}^a p(x)dx \\
\mathbf{Q} &= Q\mathbf{e}_\xi, \quad Q = \int_{-a}^a \tau_{xy}dx = \begin{cases} \mu P \frac{R\delta}{a\mu} \left(2 - \frac{R\delta}{a\mu}\right), & \delta/\mu < a/R \\ \mu P, & \delta/\mu > a/R \end{cases} \\
\mathbf{M}_p^C &= 0, \quad \mathbf{M}_\tau^C = RQ\mathbf{e}_\xi
\end{aligned} \tag{2.5}$$

График зависимости силы трения Q (2.5) от параметра δ представлен на фиг. 2 справа.

Приведем также выражение для силы Q в универсальной форме, которая пригодна как для положительных, так и для отрицательных V при использовании положительного коэффициента трения скольжения $|\mu|$, так что $\mu = |\mu|\text{sign}\delta$:

$$Q = \begin{cases} |\mu| P \text{sign} V \frac{R\delta}{a|\mu|} \left(2 - \frac{R|\delta|}{a|\mu|}\right), & |\delta| < \frac{a|\mu|}{R} \\ |\mu| P \text{sign}(\omega R - V), & |\delta| > \frac{a|\mu|}{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

3. Уравнения движения. Запишем динамические уравнения движения цилиндра

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_p^C + \mathbf{M}_\tau^C, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение центра масс, $\mathbf{K}_C = -J\omega\mathbf{e}_\xi$ — кинетический момент относительно центра масс, J — момент инерции относительно оси цилиндра, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. В скалярной форме уравнения движения (3.1) имеют вид

$$ma_\eta = P - mg, \quad m\dot{V} = Q, \quad J\dot{\omega} = -RQ \tag{3.2}$$

В квазистатической задаче естественно положить $a_\eta = 0$, поэтому $P = mg$. Уравнения движения допускают первый интеграл

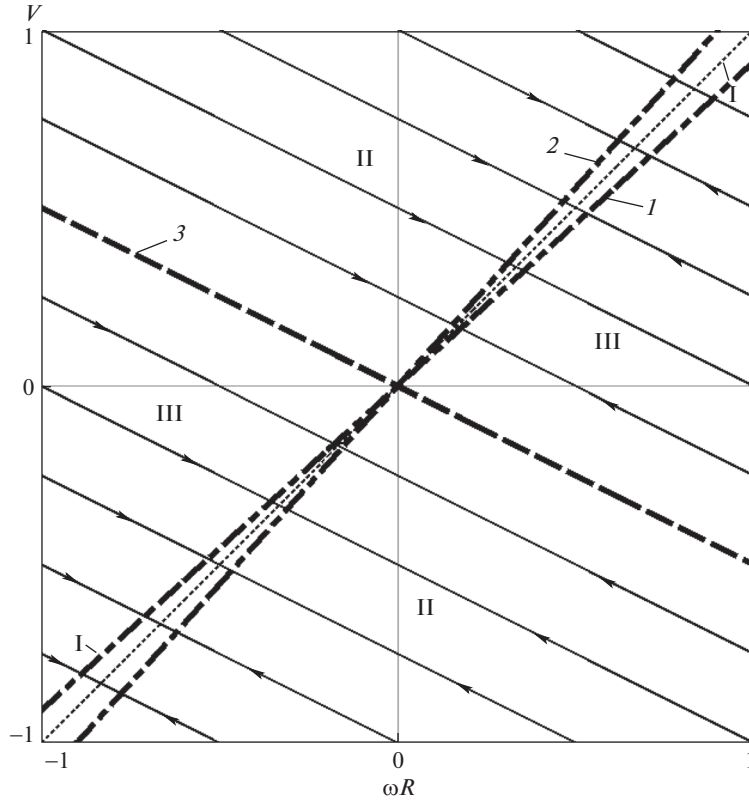
$$mRV + J\omega = mRV(1 + j + j\delta) = C = \text{const}, \tag{3.3}$$

где $j = J/(mR^2) \leq 1$ — безразмерный момент инерции (в случае однородного цилиндра $j = 1/2$). Наличие первого интеграла означает, что фазовые траектории на плоскости $(\omega R, V)$ лежат на параллельных прямых (фиг. 3). Фазовый портрет системы центрально симметричен: при замене $V \rightarrow -V$, $\omega \rightarrow -\omega$ в уравнениях (3.2) знак силы трения Q меняется на противоположный, а абсолютная величина не меняется.

4. Анализ движения при разных начальных условиях. Найдем решение задачи Коши уравнений (3.2) с начальными условиями $V(0) = V_0$, $\omega(0) = \omega_0$. При этом $\delta(0) = (\omega_0 R - V_0)/V_0 = \delta_0$ — начальное относительное проскальзывание (напомним, что $\delta_0/\mu > 0$).

Случай $0 < \delta_0/\mu < a/R$. Согласно равенству (2.4), в начальный момент в области контактного взаимодействия существует участок сцепления, т.е. происходит качение цилиндра с проскальзыванием (этот случай был изложен подробно [13]). На фазовой плоскости система находится в области I, ограниченной штрих-пунктирными линиями $\delta = \mu a/R$ при $\delta > 0$ (1) и $\delta < 0$ (2) (фазовый портрет на фиг. 3 построен при $\mu a/R = \pm 0.1$, $j = 1/2$). Очевидно, что в этой области на любой фазовой кривой знак скорости V не меняется, поэтому без ограничения общности можно считать $V > 0$. Константа первого интеграла во всех точках этой области, кроме начала координат, не равна нулю. Используя соотношения (2.1), (3.2) и (3.3), получим дифференциальное уравнение, выражающее изменение переменной δ на фиксированном уровне линейного интеграла:

$$\dot{\delta} = -QR \frac{(1 + j(1 + \delta))^2}{Cj} \tag{4.1}$$



Фиг. 3

Величина Q определена формулой (2.5), т.е.

$$\dot{\delta} = -PR^2 \frac{\delta}{a} \left(2 - \frac{R\delta}{a\mu} \right) \frac{(1 + j + j\delta)^2}{Cj} \quad (4.2)$$

Решение уравнения (4.2) оценивается решениями $\delta_{\min}(t)$ и $\delta_{\max}(t)$, имеющими вид [13]:

$$\delta_{\min(\max)}(t) = \frac{\delta_0 \exp(-kt)}{1 - \frac{\delta_0 R}{2\mu a} (1 - \exp(-kt))}; \quad k = \frac{2PR^2}{a} A_{\min(\max)}, \quad (4.3)$$

где

$$A_{\min(\max)} = \min(\max) \left\{ \frac{(1 + j)^2}{Cj}, \frac{(1 + j + j\delta_0)^2}{Cj} \right\}$$

Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ относительное скольжение δ по модулю экспоненциально убывает и достигает нуля за бесконечное время, причем имеет место асимптотика

$$\delta \sim \delta_0 \exp \left(-\frac{2PR^2(1 + j)^2}{Ca j} t \right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty$$

При этом участок сцепления увеличивается и при $t \rightarrow \infty$ занимает всю площадку контакта (см. 2.4), а сила Q монотонно убывает к нулю. Финальное движение цилиндра — чистое качение с постоянной скоростью оси

$$V^\infty = \omega^\infty R = C/(mR(1+j))$$

Случай $\delta/\mu > a/R$. В этом случае величина силы трения не зависит от относительно-го проскальзывания и равна $Q = \mu P$ при $V > 0$ и $Q = -\mu P$ при $V < 0$ (напомним, что знак μ совпадает со знаком δ). Участка сцепления нет, то есть происходит полное скольжение цилиндра. Обратимся к уравнениям (3.2), которые имеют следующее решение

$$V(t) = V_0 \pm \mu g t, \quad \omega(t) = \omega_0 \mp \frac{\mu g}{jR} t$$

(Здесь и далее верхний знак берется при $V > 0$ и нижний — при $V < 0$.) При этом относительное проскальзывание зависит от времени следующим образом:

$$\delta(t) = \frac{j(R\omega_0 - V_0) \mp \mu g t(1+j)}{j(V_0 \pm \mu g t)}$$

Если начальные условия таковы, что $\delta_0 = -(1+j)/j$ и, следовательно, $C = 0$, получаем $\delta(t) \equiv \delta_0$. На фазовом портрете этому движению соответствует фазовая кривая 3, проходящая через начало координат. За конечное время

$$T = \mp \mu g / V_0$$

изображающая точка достигает начала координат, при этом цилиндр останавливается.

В области II

$$-\frac{1+j}{j} < \delta < \mu \frac{a}{R} < 0,$$

при $V_0 > 0$ (< 0) скорость оси цилиндра линейно убывает (возрастает), а угловая скорость возрастает (убывает). Изображающая точка за конечное время выходит на прямую $\delta = \mu a/R$, после чего в области контактного взаимодействия возникает сцепление: начинается качение с проскальзыванием. Дальнейшее движение описывается случаем $0 < \delta_0/\mu < a/R$.

Осталось рассмотреть область III, в которой

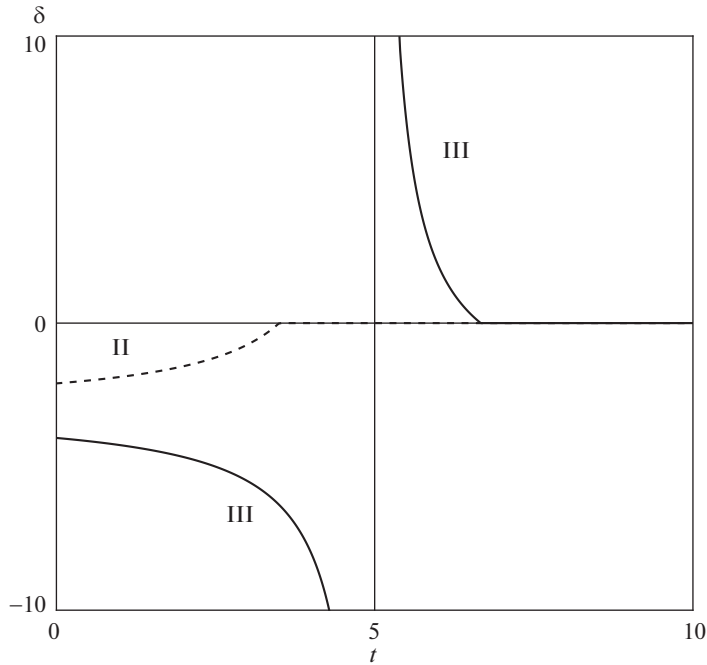
$$\left\{ \delta < -\frac{1+j}{j} \right\} \cup \left\{ 0 < \delta < \frac{\mu a}{R} \right\}$$

или в координатах $(V, \omega R)$

$$\frac{\omega R^2}{\mu a + R} < V < -j\omega R \quad \text{при} \quad \omega R < 0$$

$$-j\omega R < V < \frac{\omega R^2}{\mu a + R} \quad \text{при} \quad \omega R > 0$$

В этой области, так же, как и в области II, изображающая точка за конечное время выходит на прямую $\delta = \mu a/R$, и начинается качение с проскальзыванием: далее динамика описывается случаем $0 < \delta_0/\mu < a/R$. Однако при этом направление движения оси цилиндра меняется на противоположное: в некоторый момент времени $V(t)$ обращается в нуль, а угловая скорость ω конечна. Поэтому относительное проскальзывание $\delta(t)$ становится бесконечно большим по абсолютной величине. Изображающая точка на фазовом портрете в этот момент пересекает ось абсцисс и переходит из области $\delta < 0$ в область $\delta > 0$. Величина силы трения и ее направление при этом остается постоянным, так как одновременно меняется знак V и δ . Подобное возвратное движение наблюда-



Фиг. 4

ется при выполнении упражнений с обручем в художественной гимнастике: гимнастка толкает обруч вперед и одновременно подкручивает его “на себя”, и после непродолжительного движения вперед с большим проскальзыванием в контакте обруч меняет направление движения и возвращается в руки спортсменки.

Результаты расчета относительного проскальзывания $\delta(t)$ для

$$m = 1, \quad g = 1, \quad R = 1, \quad j = 1/2, \quad \mu = 0.2, \quad a/R = 0.1$$

и начальных условий из областей II и III показаны на фиг. 4. Начальные условия:

$$V(0) = 1, \quad \omega(0) = -1.1 \quad (\text{при этом } \delta(0) = -2.1 < 0, C > 0) \quad \text{для кривой II}$$

$$V(0) = 1, \quad \omega(0) = -3 \quad (\delta(0) = -4.1 < 0, C < 0) \quad \text{для кривой III}$$

На кривой III функция $\delta(t)$ стремится к $-\infty$ при $t \rightarrow 5$, что соответствует смене направления движения центра масс. При $t > 5$ кривая III монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

5. Обсуждение результатов. Для почти всех начальных условий финальное движение — это чистое качение с постоянными скоростью оси цилиндра и угловой скоростью. Исключения составляют лишь движения с нулевой константой линейного интеграла $C = 0$: происходит полное скольжение цилиндра, который за конечное время останавливается. Во всех остальных случаях ($C \neq 0$) полной диссипации кинетической энергии не происходит, поскольку сила трения при нулевом относительном проскальзывании равна нулю. В натурном эксперименте, конечно, чистое качение не будет наблюдаться бесконечно долго из-за потерь энергии, не учитываемых в рассмотренной модели (неидеальная упругость, сопротивление воздушной среды, тепловые потери и т.п.).

В отличие от классической постановки задачи с сухим трением скольжения Кулона, где время прекращения относительного проскальзывания конечно, в рассмотренной модели учет сцепления и, следовательно, уменьшения величины трения при каче-

нии с проскальзыванием приводит к экспоненциальному стремлению относительного проскальзывания к нулю.

Заметим также, что при стремлении модуля упругости Юнга E к бесконечности область контакта уменьшается ($a \rightarrow 0$), и в пределе получим точечный контакт цилиндра и плоскости. При этом, если $\delta = 0$, то $Q = 0$. Эта предельная задача полностью соответствует классической задаче теоретической механики о качении диска по горизонтальной прямой с наложенной идеальной дифференциальной связью $V = \omega R$, выражающей отсутствие проскальзывания; касательная реакция указанной связи равна нулю.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310379-5) и частично — в рамках проектов Российского фонда фундаментальных исследований (17-20-01147-офи_м_РЖД, 16-01-00338-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю.И., Фужаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 520 с.
2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
3. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 194–206.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Глобальное движение кельтского камня // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 8–16.
5. Ишханян М.В., Карапетян А.В. Динамика однородного шара на горизонтальной плоскости с учетом трения скольжения, верчения и качения // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 2. С. 3–14.
6. Сальникова Т.В., Трещев Д.В., Галлямов С.Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 1. С. 83–101.
7. Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С. Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 601–625.
8. Зобова А.А., Трещев Д.В. Шар на вязкоупругой плоскости // Труды МИАН. 2013. Т. 281. С. 98–126.
9. Киреевков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 6. С. 192–202.
10. Borisov A.V., Erdakova N.N., Ivanova T.B., Mamaev I.S. The dynamics of a body with an axisymmetric base sliding on a rough plane // Regular Chaotic Dyn. 2014. V. 19. № 6. P. 607–634.
11. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
12. Carter F.W. On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. London A. V. 112. P. 151–157.
13. Горячева И.Г., Зобова А.А. Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому основанию // Докл. РАН. 2018. Т. 481. № 1. Принята в печать.