
УДК 539.4+539.37

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ИЗГИБА ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ГИБРИДНЫХ КОМПОЗИТНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИН С ЖЕСТКОЙ ВСТАВКОЙ

© 2019 г. Т. П. Романова*

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

* e-mail: lab4nemir@gmail.com

Поступила в редакцию 11.07.2017 г.

Разработан общий метод расчета динамического поведения жесткопластических композитных слоисто-волоконистых тонких пластин с жесткой вставкой и с шарнирно опертым или защемленным произвольным гладким невогнутым криволинейным контуром, на которые действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Распределение слоев симметрично относительно срединной поверхности, в каждом слое находится семейство армирующих криволинейных волокон в направлениях, параллельных и нормальных к контуру пластины. Используется структурная модель армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах. В зависимости от амплитуды нагрузки возможны разные механизмы деформирования пластин. На основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждого из механизмов получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Получены аналитические выражения для оценки предельных нагрузок, времени деформирования и остаточных прогибов пластин. Показано, что изменение параметров армирования существенно влияет как на несущую способность таких пластин, так и на остаточные прогибы. Приведены примеры численных решений.

DOI: 10.1134/S0032823519010107

При воздействии высокоинтенсивных нагрузок на элементы конструкций их материалы проявляют в основном пластические свойства. Анализ литературных источников показывает, что исследования динамического деформирования композитных элементов конструкций за пределом упругого поведения находятся пока в зачаточном состоянии и для плоских элементов они затрагивают только круглые, кольцевые и прямоугольные пластины [1–8]. Для решения динамических задач при взрывном типе нагрузок широкое распространение получила модель жесткопластического тела [1, 9], благодаря ее простоте и удобству расчетных схем. Обсуждалось современное состояние расчетов неупругого динамического деформирования оболочечных конструкций слоисто-волоконистой структуры и приведено обоснование использования модели жесткопластического тела в таких задачах, а также рассмотрены [1] достоинства и недостатки структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [10, 11]. Эта модель с допустимой инженерной точностью моделирует композитные материалы в случае неидеального контакта арматуры со связующим.

Простейшая структурная модель, учитывающая объемное соотношение компонентов, для расчета прочности волокнистого композита была предложена еще в 1965 г. [12].

Отмечено [13, 14], что во многих случаях слоисто-волоконистый композит на макроуровне можно рассматривать как пластическое тело, подчиняющееся положениям теории пластичности, и в предположении, что напряженное состояние в волокнах одномерное, определены предельные кривые для слоистых композитов с симметричным перекрестным армированием. На основе нитяной структурной модели, в которой не учитываются напряжения в связующем материале, и на основе метода предельного равновесия определены предельные нагрузки разнообразных полигональных железобетонных плит [15]. Рассматривалось численное моделирование упругопластического динамического поведения осесимметричных однослойных и многослойных пластин и оболочек переменной толщины из традиционных и композиционных материалов и отмечено [16], что при решении многих задач динамики композитивных оболочек даже достаточно грубые модели пластического деформирования материала, как, например, жесткопластическая модель, позволяют во многих случаях получить адекватное представление о процессах деформирования. На основе модели идеального жесткопластического материала исследовано динамическое поведение разнообразных по форме криволинейных однородных пластин под действием распределенных динамических нагрузок [9, 17–21]. Аналогичные исследования выполнены для круглых и правильных полигональных армированных пластин [22–24].

Разные виды армирования в области пластических деформаций имеют свои особенности, поэтому они должны анализироваться отдельно. В связи с этим в настоящей работе рассматриваются гибридные композитные криволинейные пластины с жесткой вставкой, армированные волокнами в направлениях, параллельных (эквидистантных) и нормальных к контуру пластины, под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок взрывного типа. Разработана методика анализа динамического изгиба таких пластин, основанная на жесткопластическом анализе при использовании структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [10, 11]. Считается, что механические характеристики материалов, составляющих слоистый пакет соразмерные (различающиеся не более чем на порядок). По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта. В этом случае для слоистых тонких пластин приемлемо использование традиционных гипотез Кирхгофа–Лява. В настоящей работе развивается модель деформирования, разработанная ранее [21], которая распространяется на слоисто-волоконистые гибридные армированные пластины с гладким невогнутым криволинейным контуром.

1. Формулировка задачи, основные геометрические соотношения и предположения.

Рассмотрим тонкую кирхгофовскую пластину с гладким невогнутым криволинейным контуром, шарнирно опертым или защемленным (фиг. 1). Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузки интенсивностью $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ с последующим быстрым его уменьшением. Прогобы пластины считаются малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрическими изменениями пренебрегаем.

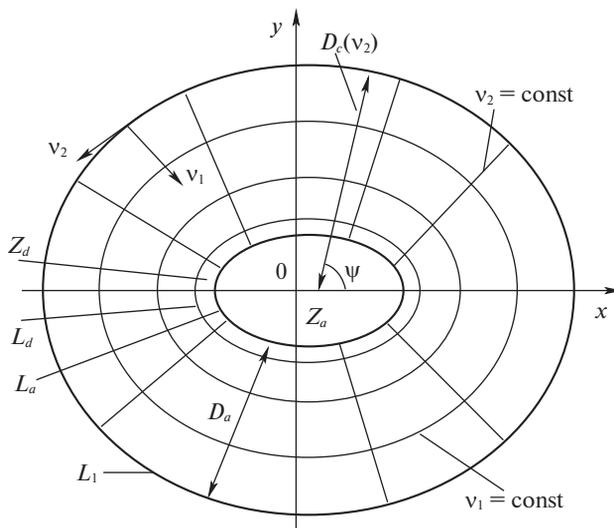
Пластина имеет произвольный гладкий невогнутый контур L_1 , заданный в параметрическом виде

$$x = x_1(\varphi), \quad y = y_1(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Его радиус кривизны

$$R(\varphi) = \frac{B^3(\varphi)}{(\partial x_1 / \partial \varphi)(\partial^2 y_1 / \partial \varphi^2) - (\partial^2 x_1 / \partial \varphi^2)(\partial y_1 / \partial \varphi)}$$

$$B(\varphi) = \sqrt{(\partial x_1 / \partial \varphi)^2 + (\partial y_1 / \partial \varphi)^2}$$



Фиг. 1

Для определенности будем рассматривать пластины, симметричные относительно оси x ; геометрические размеры пластины по оси y не больше, чем по оси x (фиг. 1). Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) , связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями (штрихом обозначена производная по координате v_2)

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / B(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / B(v_2) \quad (1.1)$$

Кривые $v_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии v_1 от контура L_1 внутрь пластины и имеют радиус кривизны $r_1 = R(v_2) - v_1$. Прямые $v_2 = \text{const}$ перпендикулярны контуру L_1 (радиус кривизны $r_2 = \infty$). В этом случае уравнение контура пластины L_1 имеет вид

$$v_1 = 0, \quad 0 \leq v_2 < 2\pi$$

Выражение для элемента площади в координатах v_1, v_2 , угол между направлением v_1 и осью x (фиг. 1) и дифференциал этого угла имеют вид

$$ds = B(v_2) \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2, \quad \psi = -\text{arctg} \frac{x_1'(v_2)}{y_1'(v_2)}, \quad d\psi = \frac{B(v_2)}{R(v_2)} dv_2,$$

поэтому для гладкого криволинейного контура L_1 , симметричного относительно оси x , справедливо равенство

$$\int_0^\pi \frac{B(v_2)}{R(v_2)} dv_2 = \int_0^\pi d\psi = \pi \quad (1.2)$$

Расстояние от контура L_1 до оси x по нормали к контуру L_1 равно (фиг. 1)

$$D_c(v_2) = \left| \frac{y_1(v_2)}{x_1'(v_2)} \right| B(v_2) \quad (1.3)$$

В центральной части пластины находится абсолютно жесткая вставка Z_a с криволинейным контуром L_a . Считаем контуры L_1 и L_a эквидистантными (расстояние между ними не зависит от координаты v_2). Тогда уравнение контура L_a имеет вид

$$v_1 = D_a = \text{const}, \quad 0 \leq v_2 < 2\pi$$

Также считаем, что

$$0 < D_a \leq \min_{0 \leq v_2 \leq \pi} D_c(v_2)$$

поэтому перпендикуляры, опущенные из точек контура L_1 на контур L_a , не пересекаются. Например, для контура L_1 в форме эллипса с полуосями a и b справедливо неравенство $0 < D_a \leq b^2/a$.

Площадь жесткой вставки равна

$$S_a = \iint_{Z_a} ds = 2 \int_0^\pi \int_{D_a}^{D_c(v_2)} B(v_2)(1 - \tilde{v}_1) dv_1 dv_2; \quad \tilde{v}_1 = \frac{v_1}{R(v_2)} \quad (1.4)$$

Материал вставки однородный с поверхностной плотностью ρ_a . Остальная часть пластины выполнена из гибридного слоистого композитного материала с симметричным относительно ее срединной поверхности распределением слоев. Предполагается, что каждый слой содержит по толщине большое количество армированных элементарных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала. В каждом слое возможно расположение волокон арматуры, выполненных из различных материалов, в параллельном (по линиям $v_1 = \text{const}$) и нормальном (по линиям $v_2 = \text{const}$) направлении к контуру пластины L_1 . В разных слоях материалы арматуры и связующего различные. Структура армирования пластины из одних и тех же составляющих материалов может иметь разный вид за счет взаимного изменения порядка расположения армированных слоев.

Для рассматриваемой пластины приведенная поверхностная плотность материала в армируемой части пластины равна

$$\rho(v_1) = 2 \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}), \quad \rho_k = (1 - \omega_{1k} - \omega_{2k})\rho_{0k} + \omega_{1k}\rho_{1k} + \omega_{2k}\rho_{2k},$$

где n – половина общего количества слоев, ρ_{0k} – плотность связующего материала в k -м слое, ρ_{1k} – плотность материала арматуры в k -м слое в направлении, нормальном к контуру пластины L_1 (вдоль линий $v_2 = \text{const}$; см. фиг. 1), ρ_{2k} – плотность материала арматуры в k -м слое в направлении, параллельном контуру пластины (вдоль линий $v_1 = \text{const}$), $\omega_{jk}(v_1)$ – плотность армирования (относительное объемное содержание волокон в слое) в k -м слое вдоль линий $v_{3-j} = \text{const}$ ($j = 1, 2$), в общем случае, зависящая от v_1 , h_k – координаты раздела слоев; $h_0 = 0$, $h_n = H$, $2H$ – толщина пластины.

Для рассматриваемого вида армирования выражения предельных изгибающих моментов M_{01} и M_{02} (погонных), нормальных и тангенциальных к контуру пластины L_1 , согласно структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [10, 11], имеют вид

$$M_{0j}(v_1) = \sum_{k=1}^n \sigma_{0jk}(v_1)(h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad j = 1, 2$$

$$\sigma_{0jk}(v_1) = [1 - \omega_{jk}(v_1)]\sigma_{0k} + \omega_{jk}(v_1)\sigma_{jk}$$

между контурами L_d и L_p (фиг. 2). Из непрерывности скоростей на контуре L_d следует, что область Z_p движется со скоростью $\dot{w}_a(t)$, как и область Z_a , нормаль к линии L_p является также нормалью к контуру L_1 и расстояние D между контурами L_1 и L_p не зависит от координаты v_2 , но зависит от времени. Уравнение контура L_p имеет вид

$$v_1 = D(t), \quad 0 < D(t) \leq \Delta, \quad 0 \leq v_2 < 2\pi$$

Такую схему движения назовем схемой 2. Область Z – часть пластины без областей Z_p , Z_d и Z_a , она деформируется в линейчатую поверхность. В отличие от схемы 1 в схеме 2 положение контура L_p изменяется со временем, а области $Z_a \cup Z_d \cup Z_p$ и Z движутся независимо. Поэтому в схеме 1 пластина имеет одну степень свободы, а в схеме 2 – две.

2. Вывод уравнений движения и анализ поведения пластины. Схема 1. Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [27]

$$K = A - N \quad (2.1)$$

$$K = \iint_{Z_a} \rho_a \ddot{u} \dot{u}^* ds + \iint_{Z_d \cup Z_p \cup Z} \rho \ddot{u} \dot{u}^* ds, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds \quad (2.2)$$

Здесь K , A и N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил соответственно, S – площадь пластины, u – прогиб. Точками над символами обозначены производные по времени. Звездочкой обозначены кинематически допустимые величины. Выражение для N запишем ниже.

Обозначим через $\dot{\alpha}$ угловую скорость поворота пластины (по нормали к контуру L_1) на опорном контуре L_1 . Из условия непрерывности скоростей на контурах L_p и L_d следует, что $\dot{\alpha}$ не зависит от параметра v_2 , а для схемы 1

$$\dot{\alpha} = \dot{w}_a(t)/\Delta$$

Рассмотрим схему 1. Скорости прогибов пластины

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_a \cup Z_d: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{w}_a(t) \\ (v_1, v_2) \in Z: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= v_1 \dot{w}_a(t)/\Delta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов в области Z

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = -\frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta[R(v_2) - v_1]} \quad (2.4)$$

Выражения (2.2) для мощностей K и A при $Z_p = \emptyset$ и учете соотношений (1.2), (1.4) и (2.3) принимают вид

$$\begin{aligned} K = \dot{w}_a(t) \dot{w}_a^*(t) \left[\rho_a S_a + 2 \int_0^{\pi D_a} \int_{\Delta} B(v_2) (1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) dv_1 dv_2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\Delta^2} \int_0^{\pi \Delta} \int_0^{\Delta} B(v_2) (1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) v_1^2 dv_1 dv_2 \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$A = P \dot{w}_a^* S_a + \left[2 \int_0^{\pi D_a} \int_{\Delta} B(1 - \tilde{v}_1) dv_1 dv_2 + \frac{2}{\Delta} \int_0^{\pi \Delta} \int_0^{\Delta} B(1 - \tilde{v}_1) v_1 dv_1 dv_2 \right] \quad (2.6)$$

Мощность внутренних сил при схеме 1 равна сумме мощностей внутренних сил N_1 , N_2 и N_3 на контурах L_1 , L_d и в области Z , соответственно:

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 \\ N_1 &= (1 - \eta)M_{01}(0) \oint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dl, \quad dl = Bdv_2 \\ N_2 &= M_{01}(\Delta) \oint_{L_d} [\dot{\theta}^*]_{L_d} dl_d, \quad dl_d = B(1 - \Delta/R)dv_2 \\ N_3 &= \iint_Z M_{02}(v_1) |\kappa_2^*| ds \end{aligned}$$

Здесь $[\dot{\theta}]_L$ – разрыв угловой скорости на линии L , dl и dl_d – элементы длины линий L_1 и L_d , $\eta = 0$ при защемлении контура L_1 и $\eta = 1$ при его шарнирном опирании. Из соотношений (2.3), поскольку нормаль к линии L_d является нормалью к контуру L_1 , следует

$$[\dot{\theta}]_{L_1} = [\dot{\theta}]_{L_d} = \frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta}$$

Тогда, учитывая соотношения (1.2) и (2.4) и введя обозначение

$$I = \int_0^\pi Bdv_2 \quad (2.7)$$

получим

$$\begin{aligned} N_1 &= 2(1 - \eta)M_{01}(0) \frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta} I \\ N_2 &= M_{01}(\Delta) \frac{\dot{w}_a^*(t)}{\Delta} \int_0^{2\pi} B \left(1 - \frac{\Delta}{R}\right) dv_2 = 2M_{01}(\Delta) \frac{\dot{w}_a^*(t)}{\Delta} (I - 2\pi\Delta) \\ N_3 &= \frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta} \int_0^{2\pi} \int_0^\Delta M_{02}(v_1) \frac{B(v_2)}{R - v_1} (1 - \tilde{v}_1) dv_1 dv_2 = \\ &= \frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{B(v_2)}{R(v_2)} dv_2 \int_0^\Delta M_{02}(v_1) dv_1 = 2\pi \frac{\dot{w}_a(t)}{\Delta} \int_0^\Delta M_{02}(v_1) dv_1 \end{aligned}$$

Полная мощность внутренних сил пластины для схемы 1

$$N = \frac{2\dot{w}_a^*(t)}{\Delta} \left[(1 - \eta)M_{01}(0)I + M_{01}(\Delta)(I - \pi\Delta) + \pi \int_0^\Delta M_{02}(v_1) dv_1 \right]$$

Подставляя последнее выражение, а также выражения (2.5) и (2.6) в равенство (2.1) и учитывая соотношение (1.2) и то, что $\dot{w}_a^*(t)$ – независимая функция, получим уравнение движения

$$\begin{aligned} \dot{w}_a(t)\Omega_1(d) &= P(t)\Omega_2(d) - \Omega_3(d) \\ \Omega_1(d) &= \Delta \left[\rho_a S_a + 2 \int_0^\pi \int_0^\Delta B(v_2)(1 - \tilde{v}_1)\rho(v_1)dv_1 dv_2 \right] + \frac{2}{\Delta} \int_0^\pi \int_0^\Delta B(v_2)(1 - \tilde{v}_1)\rho(v_1)v_1^2 dv_1 dv_2 \\ \Omega_2(d) &= \frac{\Delta}{3} \{3S_a + 3d[2I - \pi(D_a + \Delta)] + \Delta(3I - 2\pi\Delta)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\Omega_3(d) = 2 \left[(1 - \eta)M_{01}(0)I + M_{01}\Delta(I - \pi\Delta) + \pi \int_0^{\Delta} M_{02}(v_1)dv_1 \right]$$

Предельную нагрузку определим из уравнения (2.8) в момент начала деформации $t = 0$, принимая $\dot{w}_a(0) = 0$:

$$P_0 = \min_{0 \leq d < D_0} \frac{\Omega_3(d)}{\Omega_2(d)} = \frac{\Omega_3(d_0)}{\Omega_2(d_0)} \quad (2.9)$$

Расстояние d_0 определяет положение контура L_d в предельном состоянии. Отметим, что когда плотности армирования ω_{2k} ($k = 1, \dots, n$) не зависят от координаты v_1 , из анализа выражения (2.9) следует, что для оценки предельной нагрузки достаточно знать только одну интегральную характеристику (2.7) – половину длины внешнего контура пластины.

Поведение пластины при схеме 1 описывается уравнением (2.8) при $d = d_0$

$$\dot{w}_a(t)\Omega_1(d_0) = P(t)\Omega_2(d_0) - \Omega_3(d_0) \quad (2.10)$$

с начальными условиями

$$\dot{w}_a(0) = w_a(0) = 0 \quad (2.11)$$

Схема 1 реализуется для значений $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ (“средние” нагрузки), где P_1 – минимальное значение амплитуды нагрузки P_{\max} , при котором движение начнется со схемы 2. Величину P_1 определим ниже при анализе схемы 2.

Запишем уравнение движения (2.10) в виде

$$\dot{w}_a(t) = G[P(t) - P_0], \quad G = \Omega_2(d_0)/\Omega_1(d_0) \quad (2.12)$$

Пусть в момент времени $t = T$ нагрузка снимается. При $0 \leq t \leq T$, интегрируя уравнение (2.12), имеем

$$\dot{w}_a(t) = G \left[\int_0^t P(\tau)d\tau - P_0 t \right], \quad w_a(t) = G \left[\int_0^t \int_0^q P(\tau)d\tau dq - P_0 \frac{t^2}{2} \right]$$

Если нагрузка $P(t)$ такова, что в некоторый момент времени $t_s \leq T$ выполняется равенство $\dot{w}_a(t_s) = 0$, то тогда

$$t_s = \frac{1}{P_0} \int_0^{t_s} P(t)dt$$

и в этот момент t_s пластина остановится еще во время действия нагрузки, при этом максимальный остаточный прогиб будет равен $w_a(t_s)$.

Если $\dot{w}_a(t) > 0$ при любом $t \in [0, T]$, то при $T < t \leq t_f$ движение пластины после снятия нагрузки продолжается по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{w}_a(t) = -GP_0 \quad (2.13)$$

с начальными данными $\dot{w}_a(T)$, $w_a(T)$. Момент t_f определяется из условия

$$\dot{w}_a(t_f) = 0 \quad (2.14)$$

Интегрируя уравнение движения (2.13), получим

$$\dot{w}_a(t) = \dot{w}_a(T) - GP_0(t - T) \quad (2.15)$$

$$w_a(t) = w_a(T) + \dot{w}_a(T)(t - T) - GP_0(t - T)^2/2 \quad (2.16)$$

Из уравнений (2.14) и (2.15) следует

$$t_f = \frac{1}{P_0} \int_0^T P(t) dt \quad (2.17)$$

Максимальный остаточный прогиб равен

$$w_a(t_f) = G \left[\frac{1}{2P_0} \left(\int_0^T P(t) dt \right)^2 - \int_0^T t P(t) dt \right]$$

Все прогибы в пластине определяются соотношениями (2.3).

3. Вывод уравнений движения и анализ поведения пластины. Схема 2. Рассмотрим схему 2 (фиг. 2). Скорости прогибов пластины определяются выражениями

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) \in Z_p \cup Z_d \cup Z_a: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{w}_a(t) \\ (v_1, v_2) \in Z: \quad \dot{u}(v_1, v_2, t) &= \dot{\alpha}(t)v_1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а главные кривизны поверхности скоростей прогибов в области Z

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = -\frac{\dot{\alpha}(t)}{R(v_2) - v_1} \quad (3.2)$$

Выражения (2.2) для схемы деформирования 2 примут вид

$$\begin{aligned} K &= \dot{w}_a(t) \dot{w}_a^*(t) \left[\rho_a S_a + 2 \int_0^{\pi D} \int_D B(v_2) (1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) dv_1 dv_2 \right] + \\ &+ 2 \dot{\alpha}(t) \dot{\alpha}^*(t) \int_0^{\pi D} \int_0^D B(v_2) (1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) v_1^2 dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$A = P(t) \left\{ \dot{w}_a^*(t) \left[S_a + 2 \int_0^{\pi D} \int_D B(1 - \tilde{v}_1) dv_1 dv_2 \right] + 2 \dot{\alpha}^*(t) \int_0^{\pi D} \int_0^D B(1 - \tilde{v}_1) v_1 dv_1 dv_2 \right\} \quad (3.4)$$

Мощность внутренних сил при схеме 2 равна сумме мощностей внутренних сил N_1 , N_2 и N_3 на контурах L_1 , L_p и в области Z , соответственно (фиг. 2):

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 \\ N_1 &= (1 - \eta) M_{01}(0) \oint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dl \\ N_2 &= M_{01}(D) \oint_{L_p} [\dot{\theta}^*]_{L_p} dl_p, \quad dl_p = B(1 - D/R) dv_2, \quad N_3 = \iint_Z M_{02}(v_1) |\kappa_2^*| ds \end{aligned}$$

Из соотношений (3.1) при учете того, что линия L_p и контур L_1 имеют общую нормаль, следует, что разрыв угловой скорости на L_1 и на L_p равен $\dot{\alpha}(t)$, т.е. $[\dot{\theta}]_{L_1} = [\dot{\theta}]_{L_p} = \dot{\alpha}(t)$. Тогда, учитывая соотношения (1.2) и (3.2), аналогично случаю схемы 1 получаем выражения для полной мощности внутренних сил пластины при схеме 2

$$N = 2 \dot{\alpha}^* \left[(1 - \eta) M_{01}(0) I + M_{01}(D) (I - \pi D) + \pi \int_0^D M_{02}(v_1) dv_1 \right] \quad (3.5)$$

Подставляя выражения (3.3)–(3.5) в равенство (2.1) и учитывая, что $\dot{\alpha}^*$ и \dot{w}_a^* независимы, получим уравнения движения пластины в случае деформирования по схеме 2

$$\ddot{w}_a(t) = P(t) \Sigma_1(D(t)) \quad (3.6)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = P(t)\Sigma_2(D(t)) - \Sigma_3(D(t)), \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1(D) &= \left[S_a + 2 \int_0^{\pi D} \int_0^{\pi D} B(1 - \tilde{v}_1) dv_1 dv_2 \right] \left[\rho_a S_a + 2 \int_0^{\pi D} \int_0^{\pi D} B(1 - \tilde{v}_1) \rho dv_1 dv_2 \right]^{-1} \\ \Sigma_2(D) &= \int_0^{\pi D} \int_0^{\pi D} B(v_2)(1 - \tilde{v}_1) v_1 dv_1 dv_2 \left[\int_0^{\pi D} \int_0^{\pi D} B(1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) v_1^2 dv_1 dv_2 \right]^{-1} \\ \Sigma_3(D) &= \left[(1 - \eta) M_{01}(0) I + M_{01}(D)(I - \pi D) + \pi \int_0^D M_{02}(v_1) dv_1 \right] \times \\ &\quad \times \left[\int_0^{\pi D} \int_0^{\pi D} B(1 - \tilde{v}_1) \rho(v_1) v_1^2 dv_1 dv_2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

Из непрерывности скоростей на границах областей Z и Z_p следует

$$\dot{\alpha} D = \dot{w}_a \quad (3.8)$$

Начальные условия имеют вид (2.11) и

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0 \quad (3.9)$$

Начальные значения $D_0 = D(0)$, определяются в зависимости от значения P_{\max} , как будет показано ниже.

Система уравнений (3.6)–(3.8) для функций $\dot{\alpha}$, \dot{w}_a и D с начальными условиями (2.11), (3.9) и $D_0 = D(0)$ описывает поведение армированной пластины в случае деформирования по схеме 2.

Продифференцировав уравнение (3.8) по времени, подставим полученное выражение для \dot{w}_a в уравнение (3.6) и исключим из него величину $\dot{\alpha}$ с помощью уравнения (3.7). В результате получим уравнение

$$\dot{\alpha}(t)\dot{D}(t) = P(t)[\Sigma_1(D(t)) - D(t)\Sigma_2(D(t))] + \Sigma_3(D(t))D(t), \quad (3.10)$$

которое в начальный момент при учете условий (3.9) можно записать в виде

$$P_{\max} = \Sigma_3(D_0)D_0 [\Sigma_2(D_0)D_0 - \Sigma_1(D_0)]^{-1} \quad (3.11)$$

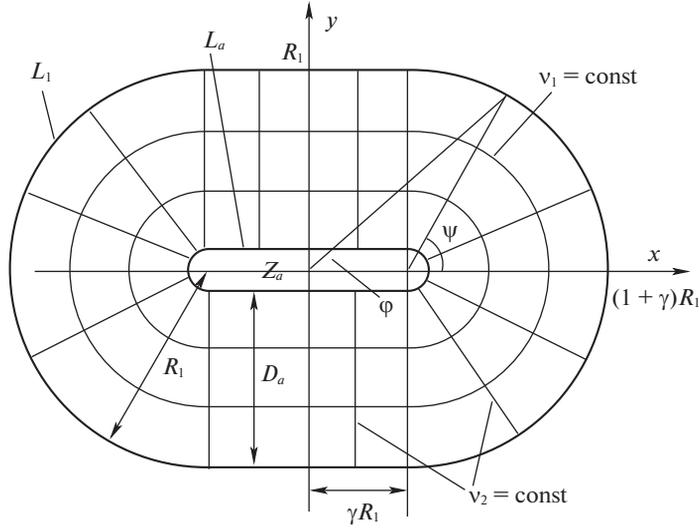
Считая, что при возникновении области Z_p выполняются равенства

$$P_{\max} = P_1, \quad D_0 = D_a - d_0,$$

из выражения (3.11) получаем значение нагрузки

$$P_1 = \Sigma_3(D_a - d_0)[\Sigma_2(D_a - d_0) - \Sigma_1(D_a - d_0)/(D_a - d_0)]^{-1} \quad (3.12)$$

Рассмотрим подробно поведение пластины под действием “высокой” нагрузки при $P_{\max} \geq P_1$. В этом случае движение пластины начнется с развитой областью Z_p и $D_0 < D_a - d_0$. В первой фазе ($0 < t \leq t_1$) деформирования движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (3.6)–(3.8) с начальными условиями (2.11), (3.9) и $D_0 = D(0)$. Величина D_0 определяется в зависимости от нагрузки P_{\max} из соотношения (3.11). В этой фазе область Z_p изменяется по закону (3.10), причем, если $P(t) = \text{const}$, то $\dot{D} = 0$ и $D(t) \equiv D_0$, а если функция $P(t)$ убывает или равна нулю, то $\dot{D} > 0$ и функция $D(t)$ возрастает. Когда величина D достигает значения D_a , области Z_p и Z_d исчезают, пластина начинает деформироваться по схеме 1 при $d_0 = 0$ и время t_1 определяется из



Фиг. 3

равенства $D(t_1) = D_a$. В этот момент определяются значения $\dot{w}_a(t_1)$, $w_a(t_1)$, $\dot{\alpha}(t_1)$ и $\alpha(t_1)$. Во второй фазе ($t_1 < t \leq t_f$) движение пластины происходит по схеме 1 при $d_0 = 0$ до остановки в момент времени t_f . Начальные условия для изучаемых функций равны соответствующим значениям в конце первой фазы. Время остановки определяется условием (2.14). Все прогибы пластины вычисляются из соотношений (3.1) и (2.3) с учетом обеих фаз движения. Определяющая система уравнений при схеме деформирования 2 в приведенных ниже примерах решалась численно методом Рунге–Кутты.

4. Численные примеры. Пластина с контуром, состоящим из двух полуокружностей и двух отрезков прямой. Рассмотрим армированную пластину с гладким контуром, состоящим из двух полуокружностей радиуса R_1 и двух отрезков прямой длиной $2\gamma R_1$ ($\gamma \geq 0$, см. фиг. 3). В силу симметрии запишем параметрические уравнения контура для четверти пластины

$$L_1 : x(\varphi) = \begin{cases} R_1(\gamma + \cos \psi), & y(\varphi) = R_1 \sin \psi, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \\ R_1 \operatorname{ctg} \varphi, & y(\varphi) = R_1, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$\psi = \varphi + a \arcsin(\gamma \sin \varphi), \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}(1/\gamma)$$

Соотношения (1.1) для координат (x, y) и (v_1, v_2) примут вид

$$x = R_1[\gamma + \cos \psi] - v_1 \cos \psi, \quad y = R_1 \sin \psi - v_1 \sin \psi \quad \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq \varphi_0$$

$$x = R_1 \operatorname{ctg} v_2, \quad y = R_1 - v_1 \quad \text{при} \quad \varphi_0 \leq v_2 \leq \pi/2$$

$$\psi = v_2 + a \arcsin(\gamma \sin v_2)$$

Также имеем

$$D_c(v_2) = R_1 \quad \text{при} \quad 0 \leq v_2 \leq \pi/2, \quad R(v_2) = \begin{cases} R_1, & 0 \leq v_2 \leq \varphi_0 \\ \infty, & \varphi_0 \leq v_2 \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$B(v_2) = \begin{cases} R_1(1 + \gamma \cos v_2 / \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 v_2}), & 0 \leq v_2 \leq \varphi_0 \\ R_1 / \sin^2 v_2, & \varphi_0 \leq v_2 \leq \pi/2 \end{cases}$$

Уравнение внешнего контура

$$L_a : v_1 = D_a, \quad 0 < D_a < R_1$$

Для площади вставки и полудлины внешнего контура пластины имеем

$$S_a = (R_1 - D_a)[4\gamma R_1 + \pi(R_1 - D_a)], \quad I = I_1 = R_1(2\gamma + \pi)$$

Поэтому на основании выражения (2.9) получим, что предельная нагрузка для рассматриваемой пластины определяется равенством

$$P_0 = 6 \min_{0 \leq d < D_a} \left\{ (1 - \eta)M_{01}(0)I_1 + M_{01}(\Delta)(I_1 - \pi\Delta) + \pi \int_0^{\Delta} M_{02}(v_1)dv_1 \right\} \times \quad (4.1)$$

$$\times \Delta^{-1} \{ 3(R_1 - D_a)(4\gamma R_1 + \pi\Delta) + 3d[2I_1 - \pi(D_a - \Delta)] + \Delta(3I_1 - 2\pi\Delta) \}^{-1},$$

из анализа которого видно уменьшение P_0 с увеличением параметра γ при одинаковых остальных параметрах пластины.

Рассмотрим четырехслойную пластину при следующих значениях параметров:

$$n = 2, \quad h_1 = 0.85H, \quad h_2 = H, \quad \rho_{0k} = \rho_0, \quad \rho_{jk}/\rho_0 = \rho_a/\rho_0 = 3$$

$$\sigma_{jk} = \sigma_j, \quad \sigma_{0k} = \sigma_0, \quad \sigma_j = 10\sigma_0, \quad j, k = 1, 2$$

Такое соотношение значений армирующих параметров возможно, например, если связующий материал – алюминий, а материал вставки и арматуры – сталь. Для рассматриваемой пластины при $\gamma = 0.5$ в верхней части фиг. 4 приведены зависимости безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 R_1^2 / (\sigma_0 H^2)$ от безразмерного размера вставки $d_a = D_a / R_1$, вычисленные по формуле (4.1), при разных значениях условий закрепления на контуре пластины и плотностей армирования ω_{jk} ($j, k = 1, 2$) при условии одинакового расхода арматуры в случае, когда в каждом слое расположено только одно семейство арматуры

$$h_1 \int_0^{\pi D_a} \int_0^{\pi D_a} \omega_{11}(v_1)B(v_2)(1 - \tilde{v}_1)dv_1 dv_2 + \quad (4.2)$$

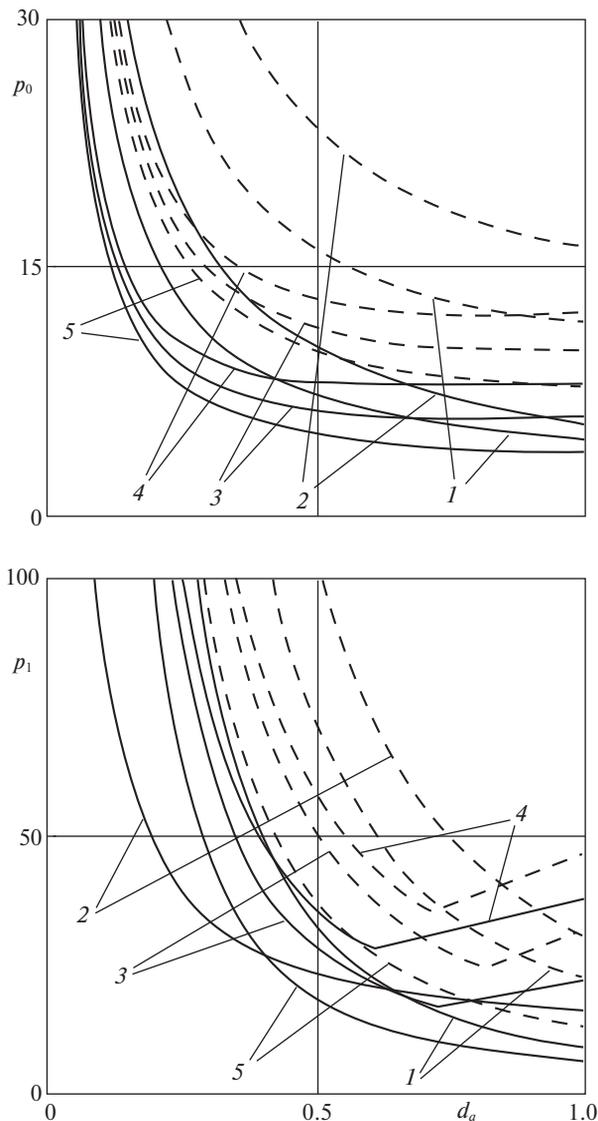
$$+ (h_2 - h_1) \int_0^{\pi D_a} \int_0^{\pi D_a} \omega_{m2}(v_1)B(v_2)(1 - \tilde{v}_1)dv_1 dv_2 = \text{const}, \quad i, m = 1, 2$$

Полагая, что функции ω_{jk} не зависят от координаты v_1 , условие (4.2) в расчетах принимали в виде

$$h_1 \omega_{i1} + (h_2 - h_1) \omega_{m2} = \text{const} = 0.1 \quad (4.3)$$

Отметим, что для выполнения условия постоянства плотности армирования ω_{1k} в каждом слое толщина армирующих волокон должна быть переменной.

На фиг. 4 сплошные кривые относятся к шарнирному опиранию контура, штриховые – к его защемлению. Кривые 1–4 соответствуют значениям $\omega_{11} = 0.1/0.85 \approx 0.118$, $\omega_{12} = 0.1/0.15 \approx 0.667$, $\omega_{21} = 0.1/0.85$, $\omega_{22} = 0.1/0.15$; остальные значения плотности армирования равны нулю. Кривые 5 соответствуют значениям p_0 для неармированной пластины. Численно получено, что в случаях 1, 2 и 5 (для них справедливо неравенство $M_{01} \geq M_{02}$), величина $d_0 \equiv 0$, независимо от размера вставки и способа крепления контура пластины, при этом в предельном состоянии пластический шарнир L_d

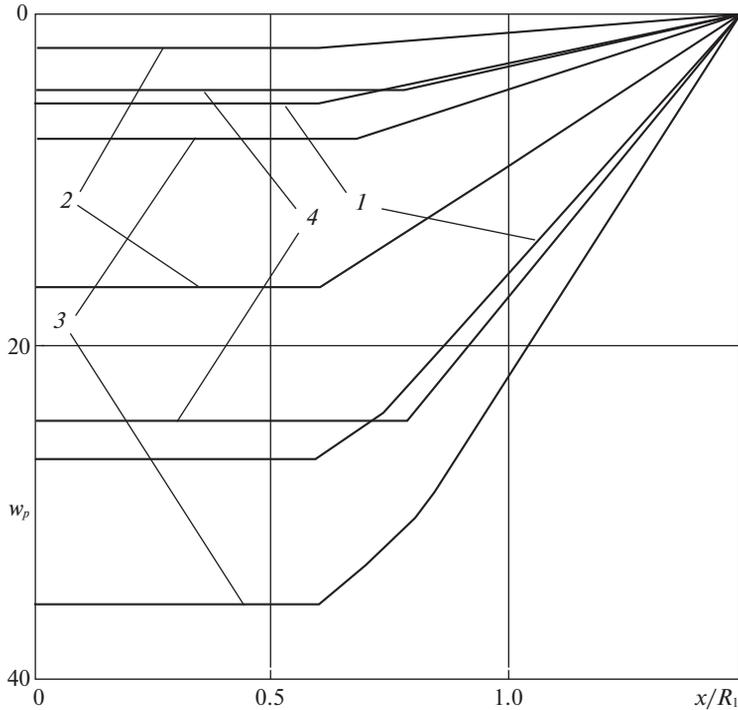


Фиг. 4

совпадает с контуром жесткой вставки L_a . В случаях армирования 3 и 4 ($M_{01} < M_{02}$), когда арматура расположена вдоль линий $v_1 = \text{const}$, величина d_0 может быть больше нуля.

Для рассматриваемой пластины функции $\Sigma_i(D)$ ($i = 1, 2, 3$) в системе уравнений движения (3.6), (3.7) имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma_1(D) &= (\xi_1 + \xi_2) / (\rho_a \xi_1 + \rho \xi_2) \\ \Sigma_2(D) &= 2 [3R_1(2\gamma + \pi) - 2\pi D] / (\rho D \xi_3) \\ \Sigma_3(D) &= 12 [(2 - \eta)M_{01}R_1(2\gamma + \pi) - \pi D(M_{02} - M_{01})] / (\rho D^3 \xi_3) \end{aligned} \quad (4.4)$$



Фиг. 5

$$\xi_1 = (R_1 - D_a)[4\gamma R_1 + \pi(R_1 - D_a)]$$

$$\xi_2 = (D_a - D)[2R_1(2\gamma + \pi) - \pi(D_a + D)], \quad \xi_3 = 4R_1(2\gamma + \pi) - 3\pi D$$

В нижней части фиг. 4 изображены зависимости безразмерной нагрузки $p_1 = P_1 R_1^2 / (\sigma_0 H^2)$ от параметра вставки d_a , вычисленные по формуле (3.12) с учетом выражений (4.4).

Из фиг. 4 видно, что при одинаковом направлении армирования нагрузки p_0 и p_1 возрастают при расположении арматуры ближе к лицевым поверхностям пластины.

На фиг. 5 приведены безразмерные остаточные прогибы

$$w = u(t_f) R_1^2 \rho_0 / (\sigma_0 H^2 T^2)$$

в сечении $y = 0$ защемленной пластины с жесткой вставкой с параметром $d_a = 0.9$ под действием нагрузок с прямоугольной формой импульса

$$P(t) = p_{\max} \sigma_0 H^2 / R_1^2 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad P(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > T$$

Кривые 1–4 соответствуют тем же значениям плотности армирования, что и на фиг. 4. Верхние кривые каждой пары относятся к расчетам при $p_{\max} = 22$, когда все пластины деформируются по схеме 1 для “средних нагрузок”, нижние – при $p_{\max} = 40$, когда для случаев 1–3 нагрузка будет “высокой”, а для случая 4 – “средней”.

Безразмерные время деформирования t_f и максимальные остаточные прогибы защемленной четырехслойной армированной пластины с контуром, состоящим из двух полуокружностей и двух отрезков прямой, приведены в таблице 1. При “средних” нагрузках получено аналитически, что

Таблица 1

Номер кривой	p_0	p_1	$p_{\max} = 22$		$p_{\max} = 40$		
			t_f/T	$\max w$	p_{\max}/p_0	t_f/T	$\max w$
1	12.24	26.09	1.80	5.51	3.27	3.24	22.72
2	17.09	36.38	1.29	2.00	2.35	2.34	16.54
3	10.21	27.55	2.15	7.49	3.92	3.99	35.61
4	12.38	42.71	1.78	4.69	3.23	3.23	24.49

$$t_f = p_{\max}T/p_0$$

(см. выражение (2.17)), а при “высоких” нагрузках получено численно, что для рассматриваемых случаев последнее равенство также приближенно выполняется.

Пластина с контуром в форме обобщенного суперэллипса. В качестве другого примера рассмотрим динамическое поведение армированной пластины с контуром в форме обобщенного суперэллипса (generalized super-ellipse) [28], заданным соотношениями (фиг. 6)

$$L_1: \quad x = a(\cos \varphi)^{2/3}, \quad y = \gamma_1 a \sin \varphi, \quad \gamma_1 \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Введем обозначения

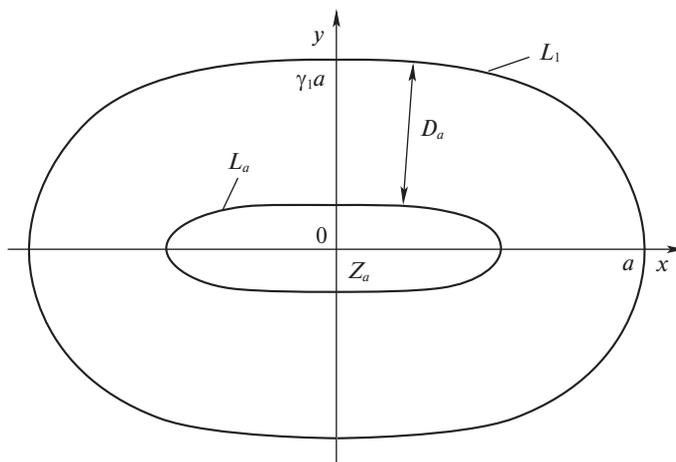
$$c = \cos v_2, \quad s = \sin v_2, \quad \tilde{B} = \sqrt{4s^2 + 9\gamma_1^2 c^{8/3}}$$

Соотношения (1.1) для координат (x, y) и (v_1, v_2) принимают вид

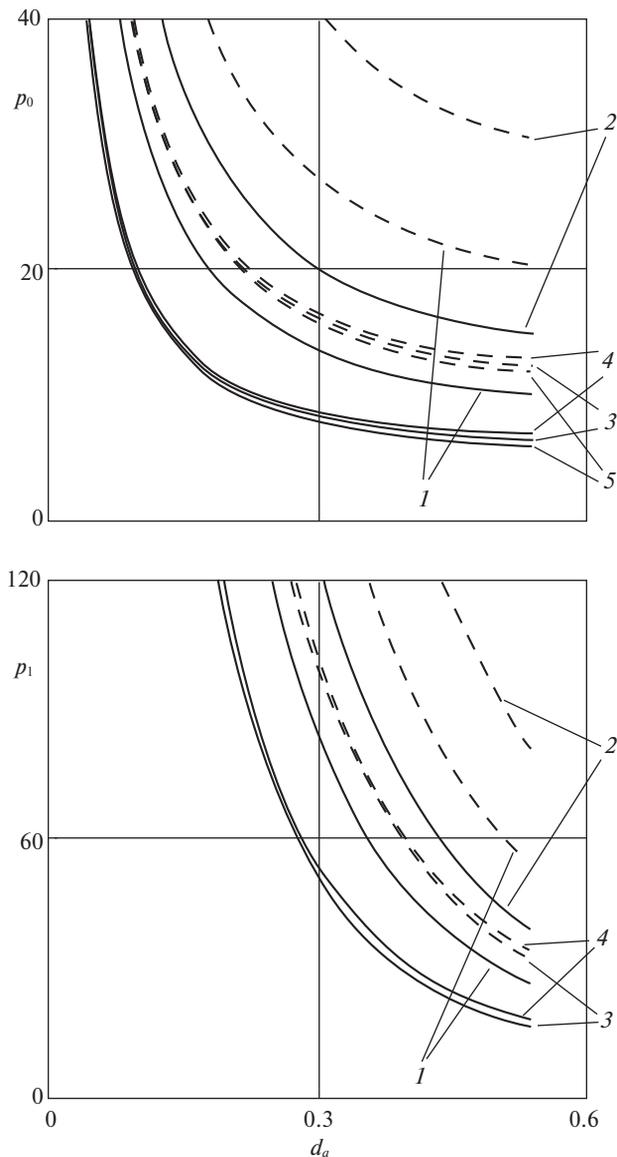
$$x = ac[c^{-1/3} + 3v_1\gamma_1c^{1/3}(a\tilde{B})^{-1}], \quad y = as[\gamma_1 - 2v_1(a\tilde{B})^{-1}]$$

$$B(v_2) = \frac{1}{3}a\tilde{B}c^{1/3}, \quad R(v_2) = \frac{a\tilde{B}^3}{6\gamma_1(3 + s^2)}c^{-2/3}$$

Тогда для выражения (1.3) получим



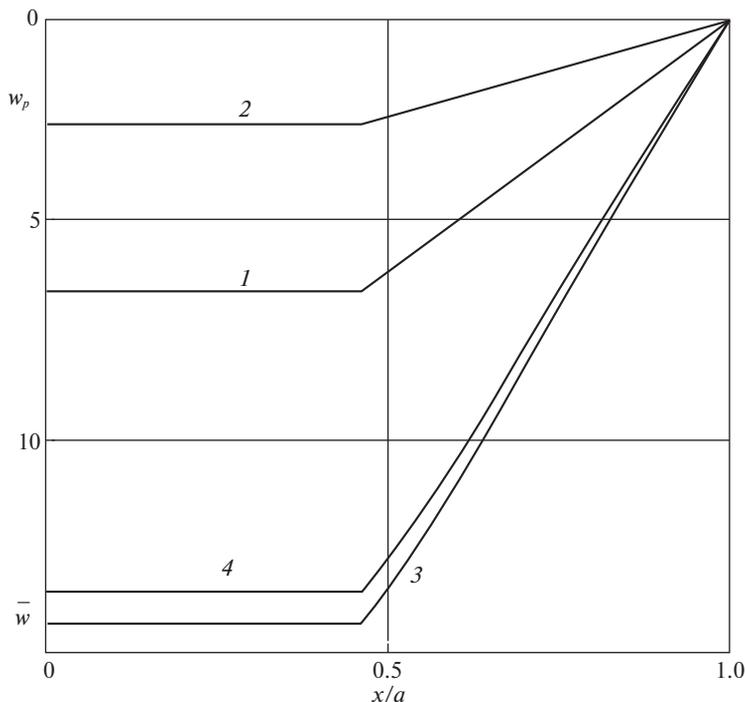
Фиг. 6



Фиг. 7

$$D_c(v_2) = \frac{1}{2} a \gamma_1 \tilde{B}$$

Рассмотрим четырехслойную пластину при $\gamma_1 = 0.6$ с параметрами армирования такими же, как и в первом примере, при условии одинакового расхода арматуры (4.3). На фиг. 7 приведены зависимости безразмерной предельной нагрузки $p_0 = P_0 a^2 / (\sigma_0 H^2)$ и нагрузки $p_1 = P_1 a^2 / (\sigma_0 H^2)$ от параметра вставки $d_a = D_a / a \leq 0.54$. Кривые 1–5 соответствуют тем же значениям плотности армирования, что и на фиг. 4.



Фиг. 8

Сплошные кривые относятся к шарнирному опиранию контура, штриховые – к его защемлению. В нижней части фиг. 7 кривая 5 практически совпадает с кривой 3. Для рассматриваемой пластины во всех случаях $d_0 \equiv 0$, что может быть объяснено большим размером жесткой вставки.

На фиг. 8 приведены остаточные безразмерные прогибы

$$w = u(t_f)a^2\rho_0/(\sigma_0H^2T^2)$$

в сечении $y = 0$ защемленной пластины в форме обобщенного суперэллипса с жесткой вставкой ($d_a = 0.54$) под действием нагрузки с линейно убывающей формой импульса

$$P(t) = 60(1 - t/T)\sigma_0H^2/a^2 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T, \quad P(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > T$$

Кривые 1–4 соответствуют тем же случаям значений плотности армирования, что и на фиг. 4. Нагрузка для случаев 1, 3 и 4 будет “высокой”, а для случая 2 – “средней”. Для рассматриваемых случаев численно получено, что для времени окончания деформирования пластины приближенно выполняется равенство (2.17).

Из проведенных расчетов видно, что при одинаковом расходе арматуры для рассматриваемых видов армирования защемленная пластина наиболее прочная (относительно критериев на основе максимума предельной нагрузки и минимума остаточного прогиба) в случае расположения арматуры в направлениях, нормальных к внешнему контуру пластины, и в слоях, находящихся ближе к ее лицевым поверхностям (т.е. в случае 2), что согласуется с идеей создания конструкций типа сэндвич-панелей [29–32].

Таким образом, разработанная модель динамического изгиба армированных криволинейных пластин дает качественно верное представление о деформации конструкции и может быть использована для инженерных приложений. Количество параметров предложенной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять схему армирования, объемное содержание армирующих волокон, а также толщину слоев, физические характеристики композита, криволинейный контур пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янковский А.П. Вязкопластическая динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волоконистой структуры при действии нагрузок взрывного типа. I. Постановка задачи и метод решения // Матем. методы физ.-мех. поля. 2012. Т. 55. № 2. С. 119–130. doi 10.1007/s10958-013-1421-7
2. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // Вычисл. мех. сплошных сред. 2016. Т. 9. № 3. С. 279–297. doi 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24
3. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Тренутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости // Вестник ТГАСУ. 2013. № 4. С. 127–142.
4. Абросимов Н.А., Елесин А.В., Новосельцева Н.А. Численный анализ влияния структуры армирования на динамическое поведение и предельную деформируемость композитных оболочек вращения // Мех. композ. матер. 2014. Т. 50. № 2. С. 313–326. doi 10.1007/s11029-014-9409-z
5. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Comp. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31. doi 10.1016/j.compstruct.2010.05.014
6. Arora H., Linz P.D., Dear J.P. Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts // Int. J. Impact Eng. 2017. V. 104. P. 95–106. doi 10.1016/j.ijimpeng.2017.01.017
7. Jones N. Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures // Ships Offshore Struct. 2006. V. 1. № 1. P. 37–44. doi 10.1533/saos.2005.0007
8. Hampson P.R., Moatamedi M. Review of composite structures subjected to dynamic loading // Int. J. Crashworthiness. 2007. V. 12. № 4. P. 411–428. doi 10.1080/13588260701483334
9. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. Новосибирск: ГЕО, 2009. 311 с.
10. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя // ПМТФ. 1969. № 5. С. 81–88. doi 10.1007/BF00907434
11. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // Arch. Inst. Inżynierii Łądowej. 1975. Т. XXI. № 1. P. 57–67.
12. Kelly A., Tyson W.R. Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13. № 6. P. 329–350. doi 10.1016/0022-5096(65)90035-9
13. Сарбаев Б.С. Анализ несущей способности слоистых волокнистых композиционных материалов // Вестник МГТУ. Сер. Машиностр. 2000. № 4. С. 59–72.
14. Сарбаев Б.С. Расчет нижней границы предельной нагрузки для многослойных волокнистых композитов при двухосном нагружении // Инж. ж.: наука инновации. 2013. Вып. 7. С. 856–1–13. URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/856.html>
15. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М.: Наука, 1983. 288 с.
16. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 391 с.
17. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. мех. 2001. Т. 37. № 12. С. 68–78. doi 10.1023/A:1014841512071
18. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двухсвязных эллиптических пластин // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 2. С. 142–154. doi 10.1023/A:1014766028870

19. *Немировский Ю.В., Романова Т.П.* Динамическое поведение жесткопластических пластин в форме сектора // Прикл. механика. 2004. Т. 40. № 4. С. 93–101. doi 10.1023/B:IN-AM.0000034467.50580.ae
20. *Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V.* Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates // J. Mech. Mater. Struct. 2008. V. 3. № 2. P. 313–334. doi 10.2140/jomms.2008.3.313
21. *Немировский Ю.В., Романова Т.П.* Динамическое деформирование криволинейной пластины с жесткой вставкой // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 2. С. 126–138. doi 10.1007/s10808-006-0051-y
22. *Немировский Ю.В., Романова Т.П.* Динамика повреждаемости пластических армированных металлокомпозитных кольцевых пластин // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Сб. матер. конф. (Томск, 12–14 апреля 2011 г.). Томск: Томский гос. ун-т, 2011. С. 253–254.
23. *Немировский Ю.В., Романова Т.П.* Динамический изгиб армированных правильных полигональных пластин с жесткой шайбой под действием взрывных нагрузок // Сб. тр. Междунар. конф. “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” (Воронеж, 20–22 сентября 2010 г.) Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2010. С. 255–269.
24. *Романова Т.П.* Моделирование динамического поведения мозаично-армированных трехслойных квадратных пластин // Пробл. прочн. пластичн. 2016. Вып. 78(2). С. 145–155.
25. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Особенности вязкопластического деформирования армированных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Прикл. мех. 2008. 44. № 2. С. 85–98. doi 10.1007/s10778-008-0030-5
26. *Немировский Ю.В., Янковский А.П.* Вязкопластическая динамика слоисто-волокнистых пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Мех. композ. матер. констр. 2006. Т. 12. № 4. С. 484–501.
27. *Ерхов М.И.* Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
28. *Zhou D., Lo S.H., Cheung Y.K., Au F.T.K.* 3-D vibration analysis of generalized super elliptical plates using Chebyshev–Ritz method // Int. J. Solids Struct. 2004. V. 41. P. 4697–4712. doi 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.045
29. *Carrera E., Brischetto S.* A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates // Appl. Mech. Reviews. Trans ASME. 2009. V. 62. № 1. P. 010803–1–17. doi 10.1115/1.3013824
30. *Панин В.Ф., Гладков Ю.А.* Конструкции с наполнителем. М.: Машиностр., 1991. 272 с.
31. *Rezaeifard M., Salami S.J., Dehkordi M.B., Sadighi M.* A new nonlinear model for studying a sandwich panel with thin composite faces and elastic-plastic core // Thin-Walled Struct. 2016. V. 107. P. 119–137. doi 10.1016/j.tws.2016.06.012
32. *Fatt M.S.H., Palla L.* Analytical modeling of composite sandwich panels under blast loads // J. Sandwich Struct. Mater. 2009. V. 11. № 4. P. 357–380. doi 10.1177/1099636209104515