

УДК 539.3

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА КАЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ ПРИ НАЛИЧИИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ СМАЗКИ

© 2019 г. П. П. Усов\*

*Национальный исследовательский университет “Московский институт электронной техники”,  
Москва, Зеленоград, Россия*

*\* e-mail: usovp@mail.ru*

Поступила в редакцию 29.08.2016 г.

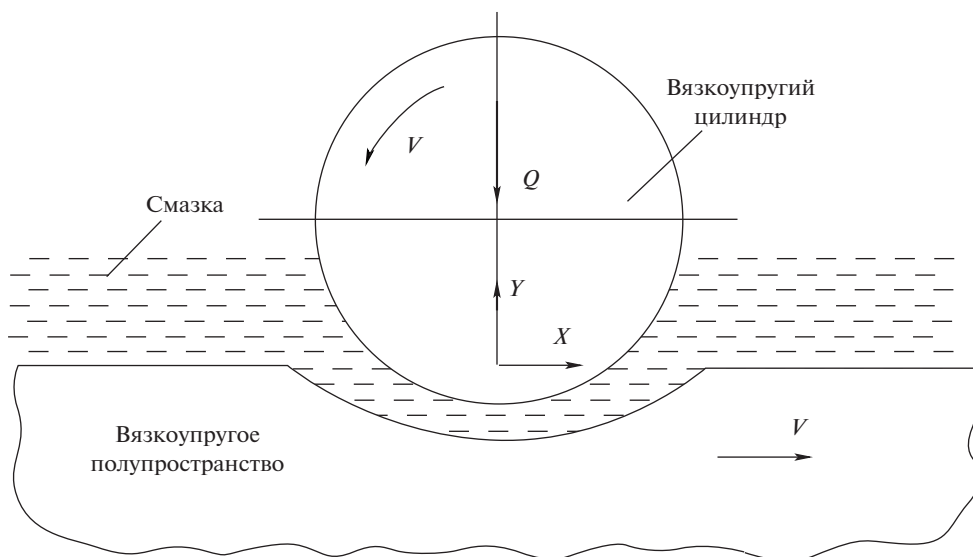
На основании модели Кельвина вязкоупругой среды рассматривается стационарное движение тонкого слоя вязкой смазки между вязкоупругим цилиндром и вязкоупругим основанием. Исследуется влияние безразмерного параметра, пропорционального времени релаксации вязкоупругих тел, на характеристики слоя смазки. Показано, что при высоком значении этого параметра решение задачи о контакте вязкоупругих тел, разделенных тонким слоем смазки, близко к решению упругогидродинамической задачи в случае модуля упругости, равного мгновенному модулю упругости вязкоупругих тел. При уменьшении значения параметра область высокого давления расширяется, а максимальное давление падает, причем второй максимум давления убывает быстрее первого и исчезает. Показано, что коэффициент трения качения как функция времени релаксации имеет максимум. При малых значениях времени релаксации зазор на входе принимает форму, при которой режим обильной смазки оказывается невозможным. В результате толщина слоя смазки быстро уменьшается с уменьшением времени релаксации.

*Ключевые слова:* вязкоупругий цилиндр, качение, толщина слоя смазки, давление в слое смазки, коэффициент трения

**DOI:** 10.1134/S0032823519010120

При анализе процессов, протекающих в тонком слое смазки, разделяющем деформируемые поверхности, контактирующие тела обычно моделируют упругой средой [1–4], что не всегда оправданно. Во-первых, механические свойства поверхностных слоев контактирующих тел могут быть отличными от свойств основного материала и могут зависеть от скоростей относительных перемещений взаимодействующих тел. Во-вторых, в последнее время наметилась тенденция использования в узлах трения различных композиционных материалов, поверхностные слои которых обладают реологическими свойствами. В связи с этим практический интерес представляет исследование влияния неупругих свойств контактирующих тел на характеристики смазываемого контакта.

Ранее [5–7] в плоской постановке было исследовано влияние вязкоупругих свойств тонких покрытий на упругих цилиндрических телах, на характеристики смазываемого контакта и показано, что это влияние существенно. Результаты значительно отличаются от случая контакта однородных упругих тел при малых скоростях относительного движения тел. Максимум давления при наличии вязкоупругих покрытий ниже, точка максимума смещена в сторону входа, а размер области высокого давления больше. С ростом скорости движения коэффициент трения уменьшается, достигает мини-



Фиг. 1

мального значения, а затем возрастает, влияние вязких свойств ослабевает. Когда время прохождения области контакта становится малым по сравнению со временем релаксации вязкоупругих покрытий, влияние вязких свойств становится несущественным.

Рассматривалась [8] задача о движении тонкого слоя вязкой смазки между поверхностями жесткой сферы и вязкоупругого слоя, сцепленного с жестким основанием. Исследовано влияние механических характеристик вязкоупругого слоя на распределение давления в слое смазки, его толщину и коэффициент трения. Показано отличие полученных результатов для вязкоупругого слоя от результатов в случае упругих тел.

Была рассмотрена [9] задача о смазываемом контакте жесткого цилиндра, поверхность которого имеет регулярный микрорельеф, и вязкоупругого слоя, движущегося относительно цилиндра с постоянной скоростью. Проведен анализ зависимости толщины слоя смазки, распределения давления в области контакта, а также силы трения от вязкоупругих характеристик поверхностного слоя и параметров рельефа.

В приведенных работах рассмотрен вопрос о влиянии вязкоупругих свойств тонких поверхностных слоев на характеристики смазываемых контактов. При этом для определения перемещений поверхности вязкоупругого слоя использовались одномерные модели. Рассмотренные модели имеют отношение к случаю, когда толщина покрытия с вязкоупругими свойствами значительно меньше ширины области контакта. Если толщина покрытия значительно больше размера области контакта, для определения перемещения поверхностей вязкоупругих тел могут быть использованы решения задач теории вязкоупругости для полупространства.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о движении тонкого слоя вязкой жидкости между вращающимся вязкоупругим цилиндром и подвижным вязкоупругим основанием (фиг. 1). Полагаем, что скорость поверхности цилиндра  $V$  равна скорости движения основания, т.е. имеет место режим чистого качения. Полагаем также, что механические свойства цилиндра и основания одни и те же.

Считаем, что радиус цилиндра велик по сравнению с размером области контакта, и для определения перемещений поверхности цилиндра можно использовать решение задачи плоской теории вязкоупругости для полупространства.

Перемещение поверхности вязкоупругого основания также будем находить из решения плоской задачи для полупространства.

Введем систему координат  $OXY$ , в которой центр цилиндра покоится. Начало системы координат поместим на поверхности недеформированного основания в точке, через которую проходит линия действия нагрузки. Ось  $X$  направим в сторону движения поверхностей, а ось  $Y$  — по внешней нормали к поверхности основания.

В системе координат  $OXY$  выражение для толщины слоя смазки с учетом деформаций контактирующих тел запишем в виде

$$H(X) = H_c + \frac{X^2 - X_c^2}{2R} - 2(U(X) - U(X_c)), \quad H_c = H(X_c), \quad (1.1)$$

где  $X_c$  — координата выходной границы слоя смазки,  $U(X)$  — перемещение по нормали вследствие деформаций контактирующих тел одной поверхности в точке с координатой  $X$ ,  $R$  — радиус цилиндра. Перемещение  $U(X)$  считаем положительным, если оно направлено по внешней нормали к поверхности.

Рассматривая движение вязкой ньютоновской жидкости в узком зазоре, полагаем, что выполнены все допущения, какие делаются при выводе уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\rho H^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - V \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} = 0 \quad (1.2)$$

из уравнений Навье—Стокса [10]. Здесь  $\rho$  и  $\mu$  — плотность и вязкость смазки,  $P$  — давление в слое смазки.

Зависимость плотности смазки от давления принимаем в виде [10]

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{C_1 P}{1 + C_2 P} \right) \quad (1.3)$$

где  $\rho_0$  — плотность смазки при атмосферном давлении,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, типичные значения которых для минеральных масел [10]

$$C_1 = 0.6 \times 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad C_2 = 1.7 \times 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$$

Для учета зависимости вязкости смазки от давления приемлем модель Баруса [10]

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha_0 P), \quad (1.4)$$

где  $\mu_0$  — вязкость смазки при атмосферном давлении,  $\alpha_0$  — пьезокэффициент вязкости.

Толщина слоя смазки  $H(X)$  и распределение давления в нем  $P(X)$  определяют момент сил, действующих на цилиндр со стороны слоя смазки, и касательные силы, действующие на поверхности:

$$M = \int_A^{X_c} X P(X) dX, \quad T_{\text{up}} = \int_A^{X_c} \frac{H}{2} \frac{dP}{dX} dX, \quad T_{\text{down}} = - \int_A^{X_c} \frac{H}{2} \frac{dP}{dX} dX$$

Здесь  $A$  — координата входной граничной точки слоя смазки. В условиях обильной смазки при теоретических исследованиях полагают  $A = -\infty$ . При численном решении задачи значение  $A$  ограничивают таким образом, чтобы увеличение модуля  $A$  незначительно изменяло результаты расчетов. Из результатов расчетов следует, что в случае упругих тел значение  $|A|$ , в полтора раза превышающее размер области контакта при сухом контакте тел, обеспечивает высокую точность. При увеличении  $|A|$  в десять раз численное значение любого параметра изменяется не более чем в третьей значащей цифре. В случае вязкоупругих тел значение  $|A|$  необходимо увеличивать, так как график функции распределения давления расположен левее, чем в случае упругих тел.

В этом случае при выборе значения  $|A|$  используем критерий: при увеличении  $|A|$  в десять раз численное значение любого параметра должно изменяться не более чем в третьей значащей цифре.

Функция  $U(X)$  в уравнении (1.1) неизвестна. Она зависит от распределения давления по области контакта и может быть определена путем решения уравнений теории вязкоупругости. Эти уравнения должны быть записаны в системе координат, в которой среда неподвижна.

Введем систему координат  $O^0 X^0 Y^0$ , жестко связанную с основанием. Координаты в разных системах координат связаны соотношениями

$$X^0 = X - Vt, \quad Y^0 = Y$$

В качестве реологической модели вязкоупругих тел используется модель Кельвина [7, 11], согласно которой соотношения между деформациями и напряжениями в системе координат  $O^0 X^0 Y^0$  имеют вид (случай плоской деформации изотропного вязкоупругого тела)

$$\begin{aligned} \sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} &= \lambda \left( \theta_{x^0 y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \theta_{x^0 y^0}}{\partial t} \right) + 2\mu \left( \varepsilon_{x^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x^0}}{\partial t} \right) \quad (x \leftrightarrow y) \\ \tau_{x^0 y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0 y^0}}{\partial t} &= 2\mu \left( \gamma_{x^0 y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x^0 y^0}}{\partial t} \right) \\ -\infty < X^0 < +\infty, \quad -\infty < Y^0 < 0, \quad t > 0, \quad \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \varepsilon_{x^0} = \frac{\partial U_{x^0}}{\partial X^0}, \quad \varepsilon_{y^0} = \frac{\partial U_{y^0}}{\partial Y^0}, \quad 2\gamma_{x^0 y^0} = \frac{\partial U_{x^0}}{\partial Y^0} + \frac{\partial U_{y^0}}{\partial X^0}, \quad \theta_{x^0 y^0} &= \frac{\partial U_{x^0}}{\partial X^0} + \frac{\partial U_{y^0}}{\partial Y^0} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$U_{x^0}, U_{y^0}$  – компоненты вектора перемещения точки  $(X^0, Y^0)$ .

Параметр  $E$  – длительный модуль упругости (используемый ниже параметр  $E_t = ET_\sigma/T_\sigma$  – мгновенный модуль упругости) [7, 11].

Рассматриваем установившийся режим, когда в системе координат  $OXY$  центр цилиндра, а также область контакта неподвижны, а толщина слоя смазки и распределение давления в нем не меняются со временем, т.е.  $U_y^0(X^0, Y^0) = U_y^0(X - Vt, Y) = U_y(X, Y)$  и т.д.

В системе координат  $OXY$  уравнения (1.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} &= \lambda \left( \theta_{xy} + T_\varepsilon V \frac{\partial \theta_{xy}}{\partial X} \right) + 2\mu \left( \varepsilon_x + T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X} \right) \quad (x \leftrightarrow y) \\ \tau_{xy} + T_\sigma V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} &= 2\mu \left( \gamma_{xy} + T_\varepsilon V \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X} \right) \\ -\infty < X < +\infty, \quad -\infty < Y < 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\sigma_x = \sigma_x(X, Y)(x, X \leftrightarrow y, Y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(X, Y), \quad \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial X}(x, X \leftrightarrow y, Y)$$

$$2\gamma_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial Y} + \frac{\partial U_y}{\partial X}, \quad \theta_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial U_y}{\partial Y}, \quad U_x = U_x(X, Y), \quad U_y = U_y(X, Y)$$

Следуя Л.А. Галину [11], введем новые переменные

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \sigma_x + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial X}(x, X \leftrightarrow y, Y), & \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} + T_\sigma V \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X} \\ U_x^* &= U_x + T_\varepsilon V \frac{\partial U_x}{\partial X}(x, X \leftrightarrow y, Y)\end{aligned}\quad (1.7)$$

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial X}(x, X \leftrightarrow y, Y), \quad 2\gamma_{xy}^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial Y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial X}, \quad \theta_{xy}^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial X} + \frac{\partial U_y^*}{\partial Y}$$

Из уравнений (1.6) следует, что переменные  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$ ,  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия для изотропного упругого тела. Кроме того [11], эти переменные будут удовлетворять уравнениям, эквивалентным уравнениям совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела. В частности, величины  $U_x^*$  и  $U_y^*$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta U_x^* = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta^*}{\partial X}(x, X \leftrightarrow y, Y)\quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) определяют функции  $U_x^*(X, Y)$ ,  $U_y^*(X, Y)$  в области  $-\infty < X < +\infty$ ,  $-\infty < Y \leq 0$ , если заданы граничные условия. Такими условиями на бесконечностях ( $X = \pm\infty$ ,  $Y = -\infty$ ) являются условия ограниченности функций  $U_x^*$ ,  $U_y^*$ . На границе  $Y = 0$  эти условия – следствие условий

$$\sigma_y(X, 0) = -P(X), \quad \tau_{xy}(X, 0) = 0,\quad (1.9)$$

где  $P(X)$  – приложенное к поверхности нормальное давление. Влиянием касательных напряжений, действующих со стороны слоя смазки на поверхности, на перемещение поверхностей пренебрегаем (допущение, применяемое в теории смазки).

Соотношения между напряжениями  $\sigma_y(X, Y)$ ,  $\tau_{xy}(X, Y)$  и функциями  $U_x^*(X, Y)$ ,  $U_y^*(X, Y)$  имеют вид

$$\sigma_y^* = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_y^*}{\partial Y} + \lambda \frac{\partial U_x^*}{\partial X} = \sigma_y + VT_\sigma \frac{\partial \sigma_y}{\partial X}, \quad \tau_{xy}^* = \mu \left( \frac{\partial U_x^*}{\partial Y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial X} \right) = \tau_{xy} + VT_\sigma \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X}\quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) следуют граничные условия

$$Y = 0: \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_y^*}{\partial Y} + \lambda \frac{\partial U_x^*}{\partial X} = -P(X) - VT_\sigma \frac{dP(X)}{dX}, \quad \frac{\partial U_x^*}{\partial Y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial X} = 0\quad (1.11)$$

Уравнения (1.8) совместно с условиями (1.11) и условиями ограниченности решения однозначно определяют функции  $U_x^*(X, Y)$ ,  $U_y^*(X, Y)$ . Определив эти функции из уравнений (1.7), можно определить функции  $U_x(X, Y)$ ,  $U_y(X, Y)$ , после чего определить функцию  $U(X) = U_y(X, 0)$ .

Пусть  $b$  – полуширина площадки контакта упругих тел с модулем упругости  $E_t$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  при отсутствии смазки. Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned}x &= X/b \quad (x, X \leftrightarrow y, Y), & u_x^* &= R' U_x^*/b^2, & u_x^* &= R' U_x^*/b^2 \quad (x, X \leftrightarrow y, Y) \\ h &= R'H/b^2, & \bar{\mu} &= \mu/\mu_0, & \bar{\rho} &= \rho/\rho_0, & p &= P/P_g\end{aligned}$$

где  $P_g = \sqrt{\frac{QE'}{2\pi R}}$ ,  $b = \sqrt{8QR'/(\pi E_t')}$ ,  $E_t' = E_t/(1 - \nu^2)$ .

$R' = R/2$  – приведенный радиус,  $Q$  – нагрузка на единицу длины цилиндра.

В безразмерных переменных уравнения (1.1)–(1.4), (1.7), (1.8) и условия (1.11) принимают вид

$$h(x) = h_c + \frac{x^2 - c^2}{2} - 2(u(x) - u(c)) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\bar{\rho} h^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - S \frac{\partial (\bar{\rho} h)}{\partial x} = 0 \quad (1.13)$$

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{K_1 p}{1 + K_2 p}, \quad \bar{\mu} = \exp(-Gp) \quad (1.14)$$

$$u(x) = u_y(x, 0), \quad u_x^* = u_x + \tau_\varepsilon \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (x \leftrightarrow y) \quad (1.15)$$

$$(m+1) \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^2} = -m \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^2} + (m+1) \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^2} = -m \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y \partial x} \quad (1.16)$$

$$y = 0: (m+1) \frac{\partial u_y^*}{\partial y} + (m-1) \frac{\partial u_x^*}{\partial x} = -\frac{m}{m+1} \left[ p(x) + \tau_\sigma \frac{dp}{dx} \right], \quad \frac{\partial u_x^*}{\partial y} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x} = 0, \quad (1.17)$$

где

$$S = \frac{3\pi^2 \mu_0 V R E'_t}{4Q^2}, \quad G = \alpha_p P_g, \quad K_1 = C_1 P_g, \quad K_2 = C_2 P_g, \quad m = \frac{\lambda + \mu}{\mu}$$

$$\tau_\varepsilon = \frac{VT_\varepsilon}{b}, \quad \tau_\sigma = \frac{VT_\sigma}{b}, \quad c = \frac{X_c}{b}$$

Чтобы выразить функцию  $u(x)$  через функцию  $p(x)$ , надо решить систему уравнений (1.16) при условиях (1.17), временно считая функцию  $p(x)$  известной. Будем искать решение в классе обобщенных функций [12], используя преобразование Фурье по переменной  $x$ . Пусть

$$p(x) = \delta(x), \quad (1.18)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция [12]. Решение задачи при давлении (1.18) будем обозначать нижним индексом  $\delta$ . Фурье-образы функций будем обозначать теми же символами, только волнистой чертой сверху, т.е.

$$\tilde{u}(\alpha, y) = F_x[u(x, y)](\alpha, y),$$

где  $F_x[g(x)](\alpha)$  – Фурье-образ функции  $g(x)$ .

Применяя к уравнениям (1.16) и условиям (1.17) преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} -\alpha^2 (m+1) \tilde{u}_{x,\delta}^*(\alpha, y) + \frac{d^2 \tilde{u}_{x,\delta}^*(\alpha, y)}{dy^2} &= i\alpha m \frac{d\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, y)}{dy} \\ -\alpha^2 \tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, y) + (m+1) \frac{d^2 \tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, y)}{dy^2} &= i\alpha m \frac{d\tilde{u}_{x,\delta}^*(\alpha, y)}{dy} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}
 (m+1) \frac{d\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, y)}{dy} \Big|_{y=0} - i\alpha(m-1)\tilde{u}_{x,\delta}^*(\alpha, 0) &= -(1-i\alpha\tau_\sigma) \\
 \frac{d\tilde{u}_{x,\delta}^*}{dy} \Big|_{y=0} - i\alpha\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, 0) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Из уравнений (1.19) следуют уравнения

$$\alpha^4 \tilde{u}_{x,\delta}^* - 2\alpha^2 \frac{d^2 \tilde{u}_{x,\delta}^*}{dy^2} + \frac{d^4 \tilde{u}_{x,\delta}^*}{dy^4} = 0, \quad \tilde{u}_{y,\delta}^* = i \frac{2m+1}{\alpha m} \frac{d\tilde{u}_{x,\delta}^*}{dy} - i \frac{m+1}{\alpha^3 m} \frac{d^3 \tilde{u}_{x,\delta}^*}{dy^3} \tag{1.21}$$

Общее решение первого уравнения (1.21), ограниченное на бесконечности, имеет вид

$$\tilde{u}_{x,\delta}^*(\alpha, y) = C_1 \exp(|\alpha|y) + C_2 y \exp(|\alpha|y), \tag{1.22}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные. Подставляя это решение во второе уравнение (1.21), получаем

$$\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, y) = i \frac{|\alpha|}{\alpha} \exp(|\alpha|y) (C_1 + C_2 y) - i C_2 \frac{m+2}{\alpha} \frac{1}{m} \exp(|\alpha|y) \tag{1.23}$$

Подставляя выражения (1.22) и (1.23) в граничные условия (1.20), находим

$$2i \left( \alpha C_1 - \frac{m+1}{m} \frac{|\alpha|}{\alpha} C_2 \right) = -(1-i\alpha\tau_\sigma), \quad 2|\alpha| C_1 - \frac{2}{m} C_2 = 0$$

откуда следует, что

$$\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, 0) = -\frac{m+1}{2m} \frac{1}{|\alpha|} (1-i\alpha\tau_\sigma)$$

Подставляя это выражение в выражение

$$\tilde{u}_{y,\delta}(\alpha, 0) = \frac{\tilde{u}_{y,\delta}^*(\alpha, 0)}{1-i\alpha\tau_\varepsilon}$$

найденное из соотношения (1.15), получаем равенство

$$\tilde{u}_{y,\delta}(\alpha, 0) = \frac{1}{2m} \left( -\frac{m+1}{|\alpha|} \right) \frac{1-i\alpha\tau_\sigma}{1-i\alpha\tau_\varepsilon} = -\frac{1}{|\alpha|} \left[ 1 - \frac{\alpha^2 \tau_\varepsilon (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \alpha^2 \tau_\varepsilon^2} + i \frac{\alpha (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \alpha^2 \tau_\varepsilon^2} \right]$$

Применяя к нему обратное преобразование Фурье и учитывая, что [12]

$$F^{-1} \left[ \frac{1}{|\alpha|} \right] = -\frac{1}{\pi} \ln|x| - \frac{C}{\pi},$$

где  $C$  – постоянная Эйлера, получаем после преобразований

$$u_{y,\delta}(x, 0) = \frac{1}{\pi} \left[ \ln|x| + \frac{C}{\pi} + \Psi(x) \right]; \quad \Psi(x) = (\tau_\varepsilon - \tau_\sigma) \int_0^\infty \frac{\tau_\varepsilon \alpha \cos \alpha x - \sin \alpha x}{1 + \alpha^2 \tau_\varepsilon^2} d\alpha$$

Если нормальное давление распределено по поверхности, то для ее перемещения получаем выражение

$$u(x) + \tilde{C} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) [\ln|x - \xi| + \Psi(x - \xi)] d\xi, \quad \tilde{C} = \text{const}$$

Используя значения интегралов ([13], с. 420 и 421, формулы 3.723.1 и 3.723.5), выражение для функции  $\Psi(x)$  можно привести к следующему:

$$\Psi(x) = -\left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \exp\left(-\frac{x}{\tau_\varepsilon}\right) E_i\left(\frac{x}{\tau_\varepsilon}\right); \quad \zeta = \frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{t} dt, \quad x < 0$$

В результате уравнение (1.12) принимает вид

$$h(x) = h_c + \frac{x^2 - c^2}{2} - \frac{\zeta}{\pi} \int_a^c p(\xi) \left[ \ln \left| \frac{x - \xi}{c - \xi} \right| + \Psi(x - \xi) - \Psi(c - \xi) \right] d\xi; \quad a = \frac{A}{b} \quad (1.24)$$

Функция  $p(x)$  должна удовлетворять условиям

$$p(a) = 0, \quad p(c) = 0, \quad \left. \frac{dp}{dx} \right|_{x=c} = 0 \quad (1.25)$$

используемым в теории смазки. Условие равновесия вала в безразмерных переменных имеет вид

$$\int_a^c p(x) dx = \frac{\pi}{2} \quad (1.26)$$

Уравнения (1.13), (1.14), (1.24) и условия (1.25), (1.26) определяют координату точки обрыва слоя смазки  $c$  и функции  $h(x)$  и  $p(x)$ , если заданы значения входных параметров  $a, S, G, K_1, K_2, \tau_\varepsilon, \zeta$ .

После решения этой системы уравнений деформационную составляющую коэффициента трения  $f_r$  и составляющую  $f_i$ , обусловленную сдвиговыми напряжениями, определяем по формулам

$$f_r = -\frac{M}{QR} = \frac{2}{\pi} \frac{b}{R'} \bar{f}_r, \quad f_i = \frac{T_{\text{уп}}}{Q} = \frac{2}{\pi} \frac{b}{R'} \bar{f}_i; \quad \bar{f}_r = -\int_a^c x p(x) dx, \quad \bar{f}_i = \int_a^c \frac{h}{2} \frac{dp}{dx} dx$$

( $f = f_r + f_i$  – коэффициент трения).

Проинтегрируем уравнение (1.13), учитывая правое граничное условие (1.25). В результате получим

$$\bar{\rho} h^3 \exp(-Gp) \frac{dp}{dx} - S \bar{\rho} h = -Sh_c \quad (1.27)$$

**2. Метод решения задачи.** Введем на отрезке  $[a, c]$  неравномерную сетку  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = c$ .

В случае смазываемого контакта упругих тел в окрестности выходной граничной точки области контакта может иметь место второй максимум давления. При его наличии функция  $p(x)$  быстро изменяется в окрестности этой точки. В то же время, во входной области функция  $p(x)$  – монотонно возрастающая, и в малом шаге сетки здесь необходимости нет. Поэтому целесообразно разбиение области контакта по закону

$$x_0 = a, \quad x_k - x_{k-1} = \frac{(1-q)q^{k-1}}{1-q^N} (c-a), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $q < 1$ . Число  $q$  определяет степень уменьшения шага сетки при движении от входа к выходу. Например, при  $N = 300$  и  $q = 0.992$  получаем

$$x_1 - x_0 = 0.0088(c-a), \quad x_{300} - x_{299} = 0.0008(c-a)$$

Число  $q$  также является входным параметром.



Проинтегрируем уравнение (1.27) на интервале  $(x_k, x_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . При вычислении интеграла функции  $h(x)$  аппроксимируем ее на этом интервале линейной функцией, а при вычислении интеграла первого члена в левой части уравнения (1.27) воспользуемся приближенной формулой

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[ \bar{\rho} h^3 \exp(-Gp) \frac{dp}{dx} \right] dx &= -\frac{1}{G} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \bar{\rho} h^3 d \exp(-Gp) = \\ &= \frac{1}{G} \bar{\rho}_{k+1/2} h_{k+1/2}^3 [\exp(-Gp_k) - \exp(-Gp_{k+1})], \end{aligned}$$

где

$$p_k = p(x_k), \quad h_{k+1/2} = \frac{1}{2}(h_k + h_{k+1}), \quad \bar{\rho}_{k+1/2} = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_k + \bar{\rho}_{k+1/2}), \quad h_k = h(x_k), \quad \bar{\rho}_k = \bar{\rho}(x_k)$$

После интегрирования получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{G} \bar{\rho}_{k+1/2} h_{k+1/2}^3 [\exp(-Gp_k) - \exp(-Gp_{k+1})] \\ &- \frac{1}{2} S(x_{k+1} - x_k) (\bar{\rho}_k h_k + \bar{\rho}_{k+1} h_{k+1}) = -Sh_c(x_{k+1} - x_k), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$k = 0, 1, \dots, N - 1$$

При вычислении интеграла в левой части равенства (1.26) функцию  $p(x)$  заменяем сплайн-функцией первого порядка:

$$p(x) = \sum_{r=0}^N p_r v_r(x),$$

где  $v_r(x)$  — линейная функция,  $v_r(x) = 1$ , если  $x = x_r$  и  $v_r(x) = 0$ , если  $x = x_i$ ,  $i \neq r$ . Принимая в равенстве (1.24)  $x = x_k$  и интегрируя, получаем

$$h_k = h_c + \frac{x_k^2 - c^2}{2} + \frac{\zeta}{\pi} \sum_{j=0}^N p_j [g_j(x_k) - g_j(c)], \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где

$$g_j(x) = A_j^1(x) + A_j^2(x) + B_j^1(x) + B_j^2(x), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$$A_0^1(x) = 0, \quad B_N^2(x) = 0$$

$$A_j^1(x) = [F_2(x)]_j, \quad j = 1, \dots, N; \quad A_j^2(x) = (x - x_{j-1})[F_1(x)]_j, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$$B_j^1(x) = (x_{j+1} - x)[F_1(x)]_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N;$$

$$B_j^2(x) = -[F_2(x)]_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$[F_l(x)]_j = \frac{1}{x_j - x_{j-1}} [F_l(x_j - x) - F_l(x_{j-1} - x)], \quad l = 1, 2$$

$$F_1(x) = x(\ln|x| - 1) + \int \Psi(x) dx, \quad F_2(x) = \frac{1}{2} x^2 \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \right) + \int x \Psi(x) dx$$

При вычислении интегралов функции  $\Psi(x)$  представим функцию  $E_i(x)$  в виде степенного ряда [13]

$$E_i(x) = C + \ln|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{kk!},$$

где  $C$  – постоянная Эйлера. После интегрирования получаем

$$\int \Psi(x) dx = -\tau_\varepsilon(\zeta - 1) \left[ \ln |\tilde{x}| (1 - \exp(-\tilde{x})) - \exp(-\tilde{x}) \left( C + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}^k \frac{1}{kk!} \right) \right]$$

$$\int x \Psi(x) dx = -\tau_\varepsilon^2(\zeta - 1) \left\{ \tilde{x} + \ln |\tilde{x}| [1 - (1 + \tilde{x}) \exp(-\tilde{x})] - \right.$$

$$\left. - (1 + \tilde{x}) \exp(-\tilde{x}) \left( C + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}^k \frac{1}{kk!} \right) \right\};$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{\tau_\varepsilon}$$

Граничные условия (1.25) в конечных разностях имеют вид

$$p_0 = 0, \quad p_N = 0, \quad p_{N-1} = 0 \quad (2.3)$$

Заменяя в условии (1.26) интеграл конечной суммой, получаем

$$\sum_{k=1}^{N-1} p_k (x_{k+1} - x_{k-1}) = \pi \quad (2.4)$$

Принимая в первом уравнении (1.14)  $x = x_k$ , получаем

$$\bar{p}_k = 1 + \frac{K_1 p_k}{1 + K_2 p_k}, \quad k = 0, \dots, N \quad (2.5)$$

Уравнения (2.1)–(2.5) представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом Ньютона.

**3. Анализ результатов.** Ниже приведены результаты расчетов при значениях параметров

$$a = -8.5, \quad S = 0.25, \quad G = 7, \quad K_1 = 0.6, \quad K_2 = 1.7, \quad \zeta = 3, \quad N = 1200$$

и разных значениях параметра  $\tau_\varepsilon$ , т.е. все параметры смазки, скорость качения и все параметры вязкоупругих тел, кроме времен релаксации  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$ , остаются неизменными, а времена релаксации  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$  изменяются таким образом, что их отношение остается постоянным. Это означает, что как длительный, так и мгновенный модули упругости вязкоупругих тел не изменяются.

Параметр  $\tau_\varepsilon$  равен отношению времени релаксации  $T_\varepsilon$  к времени, за которое точка поверхности, двигаясь со скоростью  $V$ , пройдет расстояние  $b$ . До входа в область высокого давления поверхности цилиндров не нагружены, а после входа давление на поверхности цилиндров быстро возрастает, и деформации поверхностей происходят при модуле упругости, близком к мгновенному модулю. Если значение  $\tau_\varepsilon$  велико, то точка поверхности пройдет область контакта за малую часть времени релаксации. За это время релаксации деформаций незначительны и модуль упругости остается высоким в течение всего процесса. Поэтому значению  $\tau_\varepsilon = \infty$  соответствует случай упругогидродинамического контакта цилиндров при модуле упругости, равном мгновенному модулю упругости вязкоупругой среды.

При невысоких значениях параметра  $\tau_\varepsilon$  в течение времени прохождения некоторой точки поверхности через область контакта податливость поверхности в этой точке постоянно изменяется, причем в данный момент времени она зависит от давления, которое действовало в данной точке в предыдущие моменты времени. Это приводит к

тому, что распределение давления по области контакта в случае вязкоупругих тел отличается от распределения в случае упругих тел.

Изменения распределения давления, толщины слоя смазки и коэффициентов  $\bar{f}_r$ ,  $\bar{f}_t$  и  $\bar{f} = (2b/\pi R')f$  по мере уменьшения параметра  $\tau_\epsilon$  от высокого до малого значения иллюстрируются результатами, приведенными на фиг. 2–5 при  $0.09 \leq \tau_\epsilon \leq 34.2$ . При  $\tau_\epsilon = 34.2$  решение рассматриваемой задачи менее чем на один процент отличается от решения задачи для упругих тел. Значение  $\tau_\epsilon = 0.09$  – предельное, ниже которого смазываемый контакт переходит в сухой контакт. Чтобы наглядно продемонстрировать изменения функций  $h(x)$  и  $p(x)$  при уменьшении  $\tau_\epsilon$  до минимального значения весь интервал изменения  $\tau_\epsilon$  разбит на четыре интервала:  $3.9 \leq \tau_\epsilon \leq 34.2$  (фиг. 2),  $0.2 \leq \tau_\epsilon \leq 3.9$  (фиг. 3),  $0.1 \leq \tau_\epsilon \leq 0.2$ , (фиг. 4),  $0.09 \leq \tau_\epsilon \leq 0.1$  (фиг. 5). В каждом из представленных интервалов имеются характерные особенности изменения решения с изменением параметра  $\tau_\epsilon$ . В интервале  $3.9 \leq \tau_\epsilon \leq 34.2$  функция  $p(x)$  имеет два максимума, в интервале  $0.2 \leq \tau_\epsilon \leq 3.9$  второй максимум исчезает и выходная граница смещается вправо, в интервале  $0.1 \leq \tau_\epsilon \leq 0.2$  на входе имеется область, в которой функция  $h(x)$  возрастает и которая смещается вправо, в интервале  $0.09 \leq \tau_\epsilon \leq 0.1$  происходит быстрое падение толщины слоя смазки. На фиг. 6 приведены зависимости  $\bar{f}_r$ ,  $\bar{f}_t$  и  $\bar{f}$  от  $\tau_\epsilon$  в интервале  $0.09 \leq \tau_\epsilon \leq 30$ .

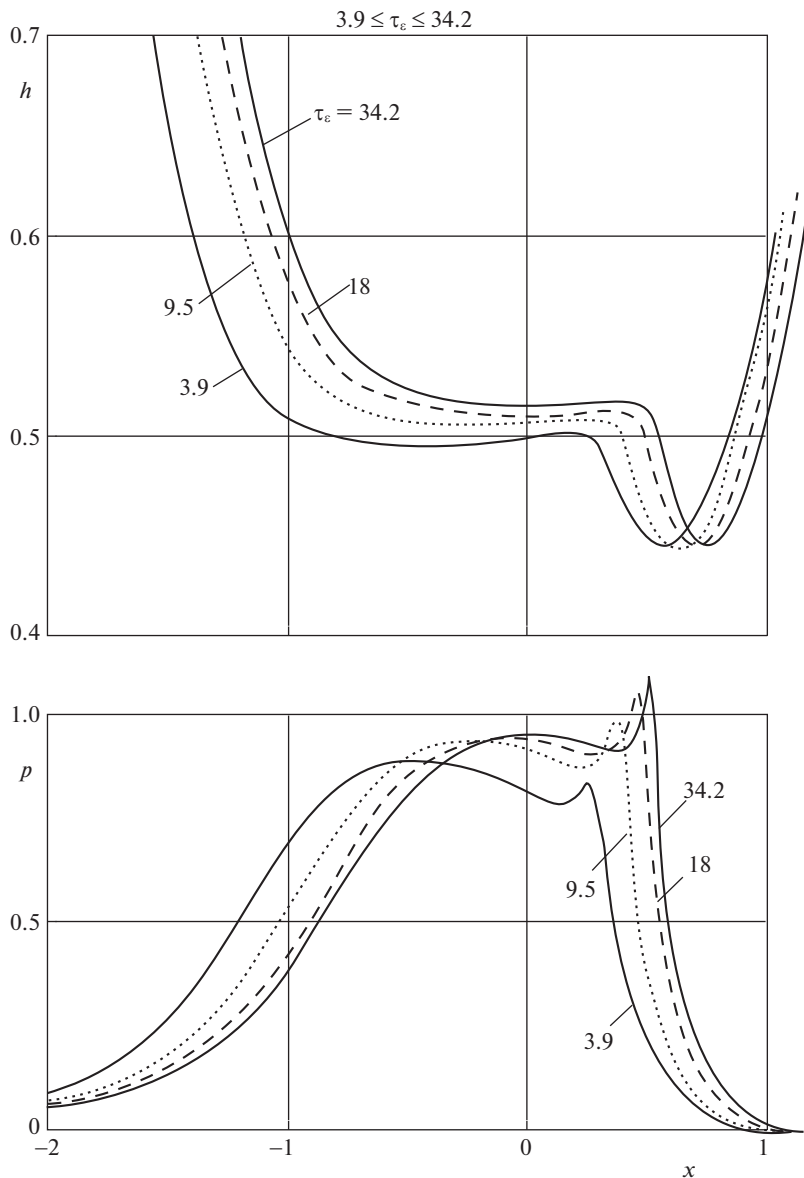
При  $\tau_\epsilon = 34.2$  (фиг. 2) решение задачи близко к решению упругогидродинамической задачи при мгновенном модуле упругости. Функция  $p(x)$  при этом имеет высокий второй максимум давления. При уменьшении  $\tau_\epsilon$  область высокого давления сдвигается влево, к входной границе слоя смазки, а размер этой области слабо возрастает, причем оба максимума давления понижаются и сдвигаются влево. Второй (правый) максимум давления понижается быстрее, чем первый (левый), и при значении  $\tau_\epsilon = 3.9$  он становится ниже первого.

График толщины слоя смазки (верхняя часть фиг. 2) сдвигается влево вместе с областью высокого давления, при этом толщина слоя смазки в области высокого давления слабо убывает. Вследствие смещения графика функции  $p(x)$  влево растет его асимметрия относительно линии действия нагрузки. Это приводит к росту  $\bar{f}_r$ , что подтверждают результаты, приведенные на фиг. 6, из которых следует, что коэффициент  $\bar{f}_r$  растет при уменьшении  $\tau_\epsilon$  от значения 30 до значения 1.4.

При изменении  $\tau_\epsilon$  от значения 3.9 до 1.4 (фиг. 3) область высокого давления расширяется, в основном влево. При этом асимметрия графика функции  $p(x)$  относительно линии действия нагрузки возрастает, коэффициент  $\bar{f}_r$  также возрастает. При дальнейшем уменьшении параметра  $\tau_\epsilon$  область высокого давления расширяется только вправо, график функции становится более симметричным и коэффициент  $\bar{f}_r$  падает. В результате функция  $\bar{f}_r(\tau_\epsilon)$  имеет максимум при  $\tau_\epsilon = 1.4$ .

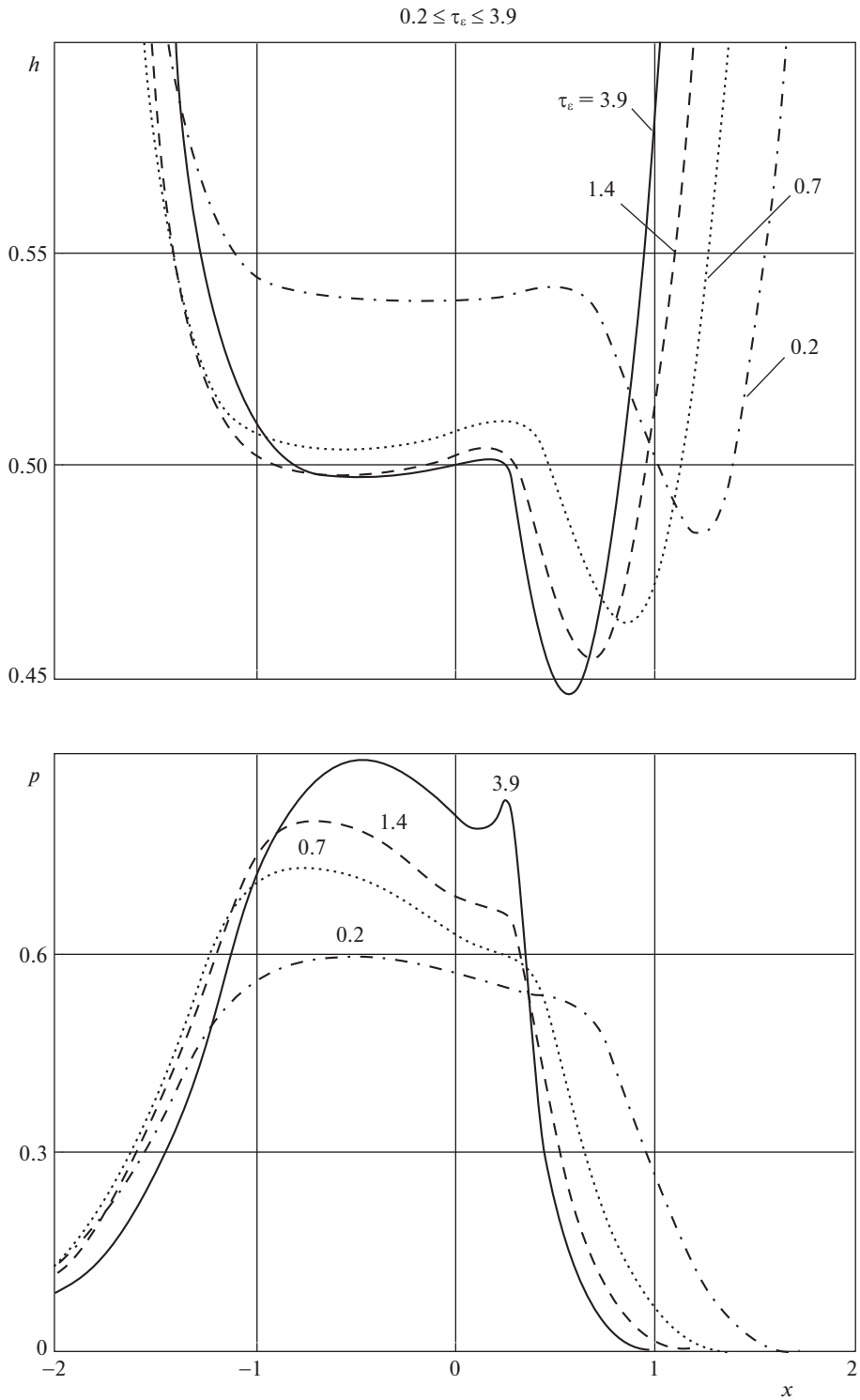
Существенный рост размера области высокого давления при изменении параметра  $\tau_\epsilon$  от значения 1.4 до 0.2 приводит к небольшому росту толщины слоя смазки, что следует из результатов, приведенных на фиг. 3.

Дальнейшее поведение функций  $h(x)$  и  $p(x)$  при уменьшении  $\tau_\epsilon$  от значения 0.2 обусловлено изменением формы зазора до входа в область, в которой развивается высокое давление. Смещение области высокого давления влево приводит к увеличению расстояния между поверхностями на входе в область высокого давления. В результате при значении  $\tau_\epsilon = 0.2$  толщина слоя смазки является возрастающей в некоторой окрестности точки  $x = a$ , что следует из результатов, приведенных на фиг. 4.

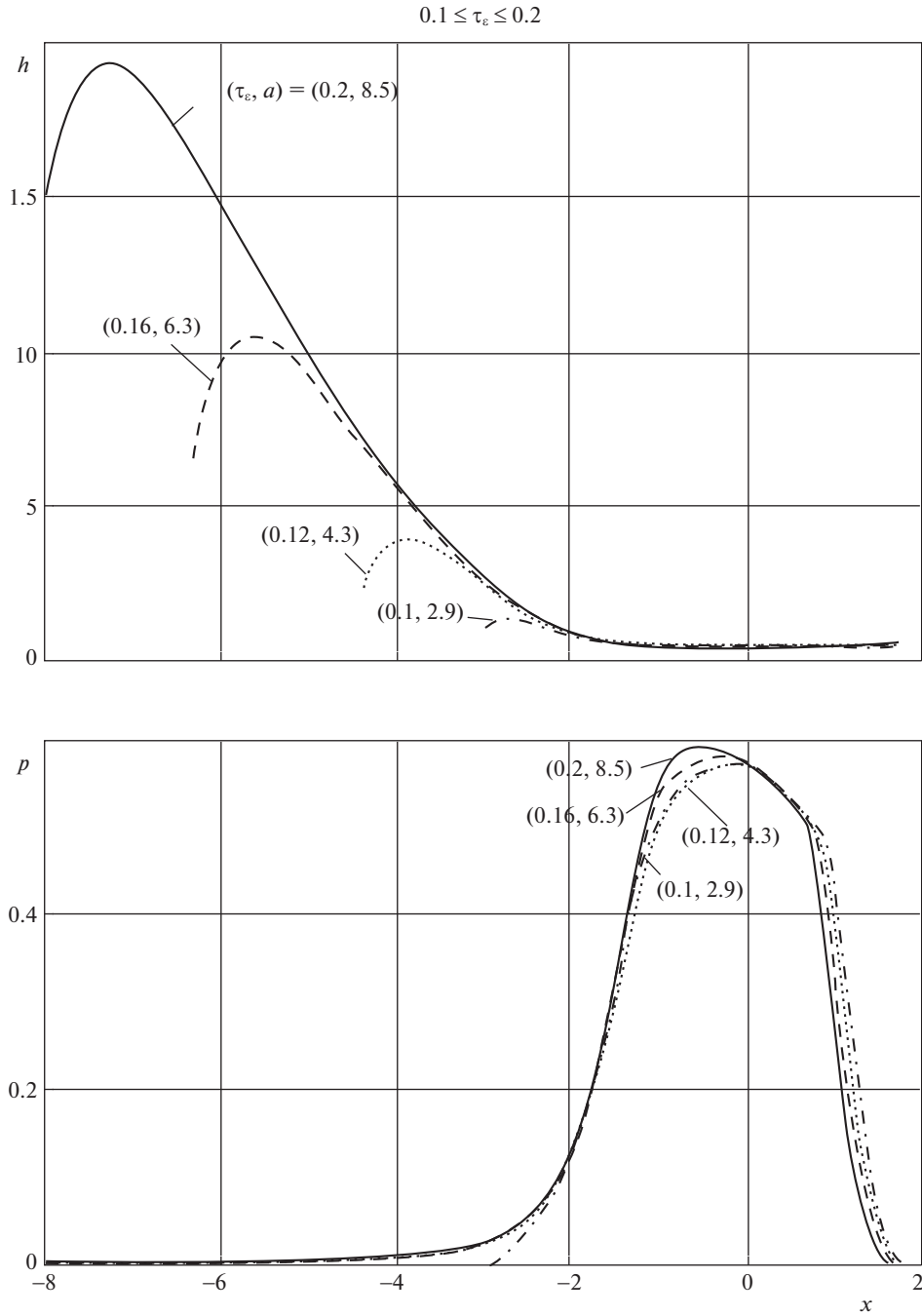


Фиг. 2

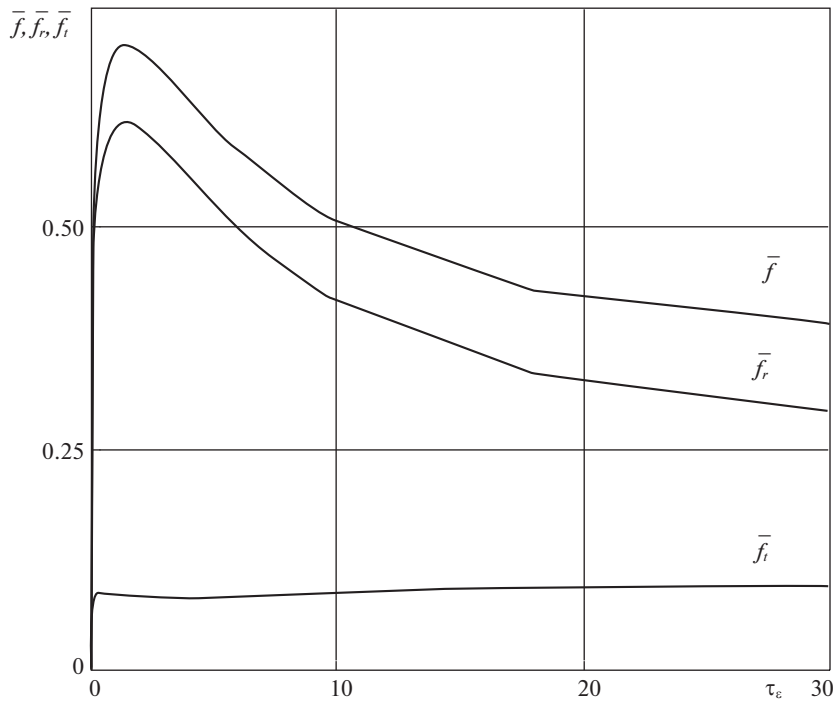
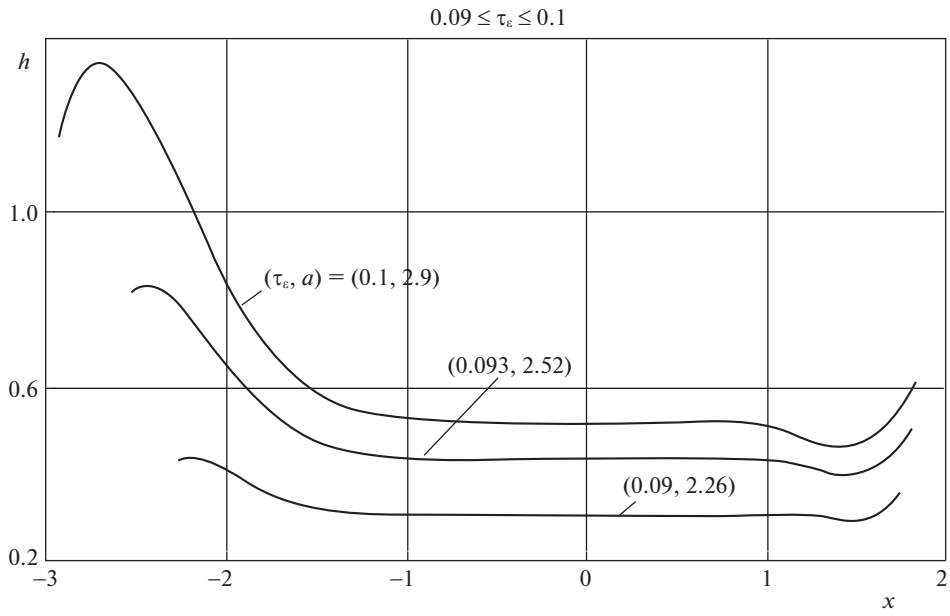
Чтобы между контактирующими телами образовался слой смазки, зазор между ними должен удовлетворять определенным требованиям, основным из которых является требование сужения зазора. Смещение области высокого давления влево приводит к тому, что при значениях  $\tau_\varepsilon < 0.2$  слой смазки не может формироваться при значении входной координаты  $a = 8.5$ . Однако слой смазки может формироваться, если входная координата смещается вправо. На фиг. 4 для каждого значения  $\tau_\varepsilon$  указано максимальное значение входной координаты  $a$ , при которой получено решение задачи.



Фиг. 3



Фиг. 4



Из результатов, приведенных на фиг. 4, следует, что при изменении  $\tau_e$  от значения 0.2 до 0.1 толщина слоя смазки в области высокого давления изменяется слабо. Функция  $p(x)$  также изменяется слабо, но она становится более симметричной относительно линии действия нагрузки и коэффициент  $\bar{f}_r$  продолжает падать (фиг. 6).

Дальнейшее уменьшение параметра  $\tau_e$  от значения  $\tau_e = 0.1$  приводит к дальнейшему сдвигу левой граничной точки слоя смазки вправо. При этом толщина слоя смазки в области высокого давления быстро падает. Это следует из результатов, приведенных на фиг. 5.

Быстрое падение толщины слоя смазки при уменьшении параметра  $\tau_e$  от значения 0.1 можно объяснить следующим образом. В УГД контакте в условиях обильной смазки давление начинает заметно возрастать на большом расстоянии от области, в которой развивается высокое давление. В случае контакта вязкоупругих тел, когда время релаксации мало, давление не может возрасти на большом расстоянии от области высокого давления. Этому препятствуют деформации тел. В результате область, в которой начинает развиваться давление, смещается вправо. В УГД контакте такая ситуация имеет место, когда смазка поступает в зазор в недостаточном количестве, чтобы обеспечить режим обильной смазки. При этом толщина слоя смазки падает из-за недостатка смазки. Уменьшение координаты  $a$  в контакте вязкоупругих тел эквивалентно уменьшению количества смазки, подаваемой в зазор, и приводит к падению толщины слоя смазки.

Результаты расчетов, приведенные на фиг. 6, свидетельствуют о том, что значение коэффициента  $f_i$  слабо зависит от параметра  $\tau_e$ . Коэффициент трения  $f$ , также как и  $f_r$  имеет максимум.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kudish II.* Elastohydrodynamic lubrication for line and point contacts. Asymptotic and numerical approaches. Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. 672 p.
2. *Usov P.P.* Effects of lubricant viscoelasticity on film thickness in elastohydrodynamic line contacts during start-up // Proc. IMechE. Part J: J. Engng. Tribol. 2016. V. 230. № 7. P. 769–782.
3. *Usov P.P.* EHD effects in lubricated journal bearing // Lubricants. 2018. V. 6. № 12. P. 1–16.
4. *Усов П.П.* Численный анализ характеристик слоя смазки в опорном подшипнике скольжения при реверсивном движении // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 3. С. 1–11.
5. *Kalker J.J.* Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction // J. Appl. Mech. 1991. V. 58. P. 666–679.
6. *Goryacheva I.G., Sadeghi F., Xu G.* Viscoelastic effects in lubricated contacts // Wear. 1996. V. 198. P. 307–312.
7. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
8. *Горячева И.Г., Усов П.П.* Численный анализ вязкоупруго-гидродинамического точечного контакта при стационарных условиях // Трение и износ. 2010. Т. 31. № 1. С. 1–10.
9. *Горячева И.Г., Усов П.П.* Численный анализ контакта вязкоупругих шероховатых тел при наличии слоя вязкой смазки // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 766–778.
10. *Dowson D., Higginson G.R.* Elastohydrodynamic Lubrication. The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication. Oxford: Permagon, 1966.
11. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 302 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 436 с.
13. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962. 1100 с.