
УДК 531.31 + 539.3

ТОРМОЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО ЦИЛИНДРА, СКОЛЬЗЯЩЕГО ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ОСНОВАНИЮ

© 2019 г. И. Г. Горячева^{1,*}, А. А. Зобова^{2,**}

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского, Москва, Россия*

² *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: goryache@ipmnet.ru*

*** e-mail: azobova@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 07.02.2019 г.

После доработки 14.03.2019 г.

Принята к публикации 19.03.2019 г.

Изучается торможение бесконечного жесткого цилиндра при его скольжении по поверхности вязкоупругого полупространства (ось цилиндра, движущегося плоскопараллельно, горизонтальна). Предполагается, что касательные напряжения в области контакта отсутствуют. Распределение контактных давлений, размер области контактного взаимодействия и зависимость силы сопротивления от скорости оси цилиндра определяются из решения квазистатической задачи теории вязкоупругости. На основании разработанной математической модели качественно и численно изучены особенности процесса торможения и их зависимость от вязкоупругого параметра основания.

Ключевые слова: вязкоупругое основание, жесткий цилиндр, контактное давление, сила сопротивления

DOI: 10.1134/S0032823519020073

1. Введение. При контактировании движущихся относительно друг друга тел вследствие неидеальной упругости материалов восстановление деформированной области сопровождается потерями механической энергии и возникновением сил сопротивления движению. Изучение влияния релаксационных свойств материалов на силу сопротивления движению и динамику механических систем – важная задача на стыке механики сплошной среды и теоретической механики.

В механике сплошной среды базовыми задачами являются квазистационарные задачи об относительном движении тел из деформируемых материалов. В ряде работ [1–5] рассматривалось плоско-параллельное движение бесконечного цилиндра по опорной плоскости из деформируемого материала с разными законами, связывающими напряжения и деформации в материале. При этом предполагалось, что скорость оси цилиндра, во-первых, постоянна, а во-вторых, много меньше скоростей распространения волн деформаций в материале, движение среды принимали установившимся, а инерционными членами в уравнениях механики сплошной среды пренебрегали.

Рассматривались нестационарные задачи о движении цилиндра по вязкоупругому полупространству с учетом инерционных членов в уравнениях движения среды [6, 7]. Изучалась релаксация к стационарному движению вязкоупругой среды [6], при этом скорость оси цилиндра предполагалась постоянной; найдены поправки к коэффициенту трения, вычисленному в квазистационарной постановке. Рассматривались не-

стационарные движения цилиндра по вязкоупругому полупространству [7]. При постановке задачи вертикальная нагрузка и скорость оси цилиндра задавались как функции времени. Построен численный алгоритм определения силы сопротивления, распределения давления и параметров области контактного взаимодействия, проведено сравнение полученного решения с квазистационарным решением. Отметим, что в этих работах динамика цилиндра под действием приложенных к нему сил не изучалась: предполагалось, что цилиндр совершает заранее предписанное движение.

Феноменологические модели вязкоупругого основания [8–11] использовались при изучении динамики цилиндра, движущегося под действием приложенных к нему сил, в том числе силы взаимодействия цилиндра с вязкоупругой средой. Аналогично подходу А.Ю. Ишлинского [12], в этих работах вязкоупругая среда описывалась моделями пружинного основания. Предполагалось [8, 9, 12], что скорость оси цилиндра и его глубина погружения в вязкоупругое полупространство постоянны. Эти параметры явно входят в выражения для распределения нормального давления и силы сопротивления. При нестационарных движениях шара [10] и цилиндра [11] параметры контактного взаимодействия зависят также от вертикальной составляющей скорости оси цилиндра или центра шара.

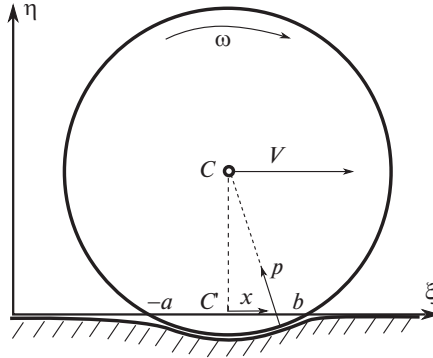
При условии, что касательные напряжения в контактной области описываются законом Амонтона–Кулона, поставлена и решена динамическая задача о движении диска по вязкоупругому основанию с наклонной прямолинейной границей под действием силы тяжести и силы сопротивления со стороны опоры [11]. Однако оказалось, что зависимость силы сопротивления от скорости оси цилиндра качественно отличается от полученной при решении соответствующей задачи вязкоупругости [1, 2].

Рассматривалась задача о неравномерном скольжении штампа по вязкоупругому основанию [13]. Контактные давления описывались упрощенной моделью Кельвина, сила сопротивления движению вычислялась из энергетических соотношений в предположении малой кривизны штампа, проведены расчеты торможения клиновидного штампа для модели Кельвина–Фойхта. Таким образом, одновременно решалась нестационарная задача теории вязкоупругости и динамическая задача о торможении тела.

В настоящей работе рассматривается плоскопараллельное движение жесткого кругового цилиндра, ось которого горизонтальна, по вязкоупругой горизонтальной плоскости. Предполагается, что касательные напряжения в области контактного взаимодействия равны нулю. Изучается торможение цилиндра за счет действующей на него силы сопротивления, возникающей в области контактного взаимодействия. Для расчета силы сопротивления как функции скорости скольжения цилиндра используется решение контактной задачи теории вязкоупругости в квазистатической постановке [1, 2]. Проведен качественный анализ уравнений движения. Численно найдены решения задачи Коши для некоторых реальных значений параметров вязкоупругого материала. При заданных начальных условиях найдена зависимость скорости центра цилиндра, длины участка контактного взаимодействия и его смещения от времени, распределение нормальных напряжений в области контакта, найдена зависимость времени остановки и пути торможения от вязкоупругих характеристик материала основания. Представленная работа – продолжение исследования [16, 17], в котором решение контактных задач используется для изучения динамики системы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим скольжение жесткого однородного цилиндра (1) с удельной (на единицу длины) массой m и радиуса R по вязкоупругому основанию (2) без трения. Распределение масс в цилиндре предполагается осесимметричным, так что центр масс каждого сечения цилиндра C лежит на его оси.

Введем неподвижную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$, ось $O\xi$ которой принадлежит недеформированной опорной плоскости, ось $O\eta$ направлена вертикально вверх, ось $O\zeta$ перпендикулярна плоскости движения и сонаправлена с осью цилиндра. Горизон-



Фиг. 1

танальную скорость оси цилиндра обозначим $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_\xi$, а угловую скорость обозначим $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_\zeta$. Положительное значение ω соответствует вращению по часовой стрелке, если смотреть с конца оси $O\xi$ (фиг. 1). Введем также подвижную декартову систему координат $C'x\eta z$ с осями, параллельными $O\xi\eta\zeta$ с началом в точке C' – проекции центра сечения цилиндра на недеформированную плоскость. Предполагается, что скорость движения оси цилиндра мала по сравнению со скоростями распространения возмущений в вязкоупругой среде, поэтому для определения распределения давлений в области контакта цилиндра с вязкоупругим основанием будем использовать решение контактной задачи теории вязкоупругости в плоской квазистатической постановке [1, 2, 14]. Приведем далее ее постановку.

В силу предположения о малости деформаций, контур цилиндра в области контакта заменим параболой $f(x) = x^2/(2R)$. Граничные условия на поверхности вязкоупругой полуплоскости отнесем к недеформированной границе ($y = 0$). Из условия контакта следует, что для всех точек площадки контакта $(-a, b)$ для перемещений u_y по нормали к поверхности ($y = 0$) выполняется соотношение $u_y = f(x) + \text{const}$, или

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad y = 0$$

Заметим, что границы $-a$ и b области контакта – функции времени. Поверхности взаимодействующих тел вне площадки контакта $(-a, b)$ не нагружены. На всей площадке контакта касательные напряжения нулевые:

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in (-a, b)$$

Соотношения между компонентами деформации и напряжения в изотропном вязкоупругом теле примем в следующем виде (случай плоской деформации):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{x^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) \\ \varepsilon_{y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_{y^0}}{\partial t} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{y^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{y^0}}{\partial t} \right) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{x^0} + T_\sigma \frac{\partial \sigma_{x^0}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_{x^0y^0} + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma_{x^0y^0}}{\partial t} = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{x^0y^0} + T_\sigma \frac{\partial \tau_{x^0y^0}}{\partial t} \right)$$

Величины T_ε и T_σ характеризуют вязкие свойства среды, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона соответственно. Случай плоского напряженного состояния рассматривается аналогично. Эти уравнения являются двумерным аналогом модели Максвелла–Томсона, для которой величина $H = T_\varepsilon E / T_\sigma$ – мгновенный модуль упругости, $T_\varepsilon > T_\sigma$.

Введем обозначение для контактного давления:

$$p(x) = -\sigma_y(x, 0)$$

Со стороны основания на цилиндр действуют силы $P\mathbf{e}_y$ и $Q\mathbf{e}_x$, являющиеся результирующими контактного давления $p(x)$. Поскольку цилиндр жесткий, отнесем нормальные напряжения к окружности цилиндра и, пользуясь малостью контактной области, получим

$$P = \int_{-a}^b p(x) dx, \quad Q = -\frac{M_1}{R}; \quad M_1 = \int_{-a}^b xp(x) dx$$

Поскольку все элементарные силы, действующие на границе цилиндра, направлены к его оси, получаем, что их суммарный момент относительно оси цилиндра равен нулю: $\mathbf{M} = 0$.

Динамика цилиндра описывается уравнениями:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + P\mathbf{e}_y + Q\mathbf{e}_x, \quad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = 0, \quad \mathbf{K}_C = -J\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_z, \quad J = \frac{1}{2}mR^2, \quad (2.1)$$

где \mathbf{a} – ускорение центра масс, \mathbf{K}_C – кинетический момент относительно центра масс, J – момент инерции относительно оси цилиндра, \mathbf{g} – ускорение свободного падения.

В скалярном виде уравнения (2.1) имеют вид

$$ma_\eta = P - mg, \quad m\dot{V} = Q, \quad J\dot{\omega} = 0 \quad (2.2)$$

Предполагается, что $a_\eta = 0$, и, следовательно, $P = mg$. Последнее уравнение показывает, что угловая скорость цилиндра остается постоянной $\omega \equiv \omega(0)$. Далее это уравнение не рассматривается. Добавим к уравнениям (2.2) кинематическое соотношение

$$\frac{d\xi}{dt} = V, \quad (2.3)$$

задающее зависимость от времени абсолютной координаты оси цилиндра.

Будем изучать процесс торможения, т.е., задаваясь начальной скоростью оси цилиндра $V(0)$ и начальной координатой оси цилиндра $\xi(0) = 0$, будем решать задачу Коши для уравнений (2.2) и (2.3). По полученной функции $V(t)$ будут определяться границы участка контактного взаимодействия в разные моменты времени, а также распределение давлений.

3. Безразмерные переменные, метод решения, качественные результаты. Перейдем к безразмерным переменным. Решение задачи теории вязкоупругости описывается двумя безразмерными параметрами [2]

$$\alpha = \frac{T_\varepsilon}{T_\sigma}, \quad \kappa = \frac{R}{l_0} = \sqrt{\frac{E'R}{32P}} \quad \left(E = \frac{\pi E}{1-\nu^2} \right)$$

Параметр $\alpha \geq 1$ задает отношение времени последствия к времени релаксации и равен единице для упругих материалов; параметр κ представляет собой отношение ра-

диуса цилиндра к длине участка контактного взаимодействия в покое $l_0 = \sqrt{32RP/E}$. Так как в постановке задачи вязкоупругости предполагается малость области контактного взаимодействия по сравнению с радиусом цилиндра [2], то $\kappa \gg 1$.

Помимо этого, для решения поставленной задачи о торможении требуется ввести третий безразмерный параметр

$$\gamma = \frac{PT_\varepsilon^2}{mR} = \frac{gT_\varepsilon^2}{R},$$

задающий соотношение масштаба времени, задаваемого ускорением свободного падения и радиусом цилиндра, и времени последствия T_ε .

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = t/T_\varepsilon, \quad \tilde{\xi} = \xi/R, \quad \tilde{V} = T_\varepsilon V/R, \quad \tilde{Q} = Q/P,$$

представляющие собой безразмерные время, координату оси цилиндра, скорость и силу сопротивления. Тогда уравнения торможения (2.2) и (2.3) принимают вид

$$\frac{d\tilde{\xi}}{d\tilde{t}} = \tilde{V}, \quad \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{t}} = \gamma\tilde{Q} \quad (3.1)$$

Здесь $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\tilde{V})$ – сила сопротивления, вычисляемая по квазистатическому решению задачи теории вязкоупругости, постановка которой дана в предыдущем разделе.

Для вычисления силы в зависимости от текущего значения скорости \tilde{V} требуется выполнить следующие шаги [2].

1. Вычислить безразмерную длину участка контакта

$$\lambda = \frac{a+b}{l_0} = \kappa \frac{l}{R}$$

как решение уравнения

$$[1 - \lambda^2][I_0(\alpha\zeta)K_1(\zeta) + K_0(\zeta)I_1(\alpha\zeta)] + \frac{2}{\zeta}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\lambda^2 I_1(\alpha\zeta)K_1(\zeta) = 0 \quad (3.2)$$

Здесь переменная

$$\zeta = \frac{a+b}{2T_\varepsilon V} = \frac{\lambda}{2\kappa\tilde{V}} \quad (3.3)$$

является отношением времени, за которое каждый элемент проходит расстояние, равное полуширине области контакта, ко времени последствия T_ε , $I_0(x)$ и $I_1(x)$ – бесселевы функции мнимого аргумента, $K_0(x)$ и $K_1(x)$ – цилиндрические функции мнимого аргумента.

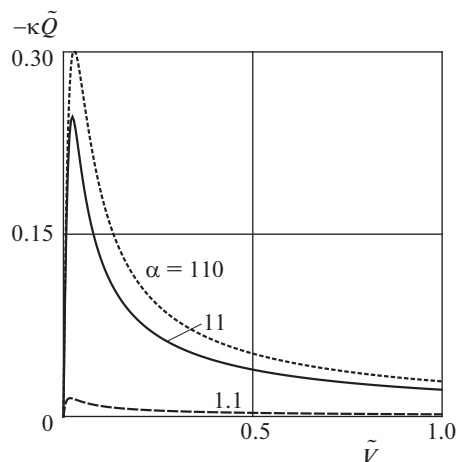
2. Вычислить относительное смещение участка контакта относительно оси $C'y$

$$\varepsilon = \frac{b-a}{b+a} = \frac{1}{2}(\lambda^{-2} - 1) \frac{K_0(\zeta)}{K_1(\zeta)}$$

3. Вычислить силу сопротивления

$$\tilde{Q} = -\kappa^{-1}\lambda \left[\frac{\varepsilon}{2}(1 - \lambda^2) + \frac{1}{2\zeta} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (3.4)$$

На фиг. 2 приведен график зависимости силы сопротивления от скорости при $\kappa = 29.1$ и $\alpha = 1.1, 11, 110$.



Фиг. 2

Выражение для распределения давления $p(\tilde{x})$ по безразмерной координате \tilde{x} в области контактного взаимодействия имеет вид [1, 2]

$$\frac{p(\tilde{x})}{E'} = -\frac{\alpha}{2\pi\kappa^2\tilde{V}} \int_{-\tilde{a}}^{\tilde{x}} \frac{\lambda^2 + 4(x' - \kappa\tilde{V})(\lambda\varepsilon - 2x') + 1}{16\sqrt{(x' + \tilde{a})(\tilde{b} - x')}} \exp\left(\frac{\alpha}{\kappa\tilde{V}}(\tilde{x} - x')\right) dx' \quad (3.5)$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{l_0} \in [-\tilde{a}, \tilde{b}], \quad \tilde{a} = \frac{\lambda(1 - \varepsilon)}{2}, \quad \tilde{b} = \frac{\lambda(1 + \varepsilon)}{2}$$

В заключение приведем здесь важные качественные свойства силы $\tilde{Q}(\tilde{V})$ и решений уравнений (3.1). Доказательства представлены в Приложении.

1. Сила сопротивления – непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при нулевой и бесконечной скорости оси цилиндра (утверждения 1, 2, 4).

2. Задание меньшего значения \tilde{V}_0 начальной скорости эквивалентно некоторому конечному сдвигу по времени исходного решения уравнения (утверждение 5).

3. Справедливо

Следствие 1. Если в начальный момент $\tilde{V}(0) \neq 0$, то функция $\tilde{V}(\tilde{t})$ строго монотонна (убывает при $\tilde{V}(0) > 0$ и возрастает при $\tilde{V}(0) < 0$) и не меняет знака, $\tilde{V}(\tilde{t}) \rightarrow 0$ при $\tilde{t} \rightarrow \infty$, $\tilde{V}(\tilde{t}) \neq 0 \forall \tilde{t} \in R$. Время до остановки бесконечно.

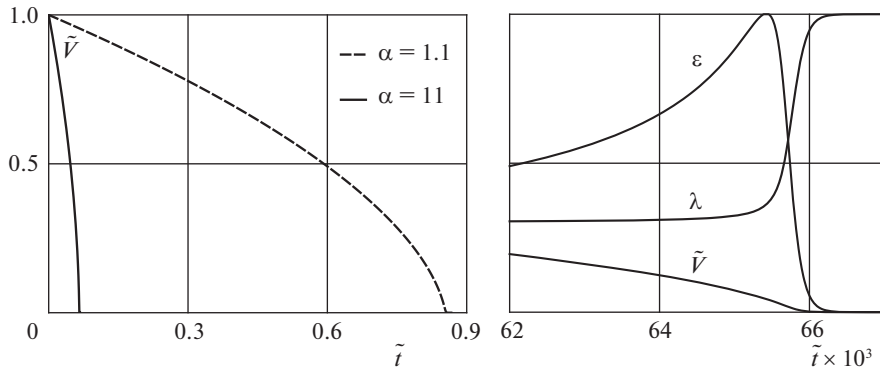
4. Путь торможения цилиндра конечен: $\tilde{\xi}(\infty) < \infty$ (теорема 2).

Таким образом, ось цилиндра, начав движение с ненулевой скоростью, будет двигаться бесконечно долго, проходя при этом конечный путь торможения. Однако, с практической точки зрения, а также для анализа численных расчетов полезно ввести следующее определение.

Определение. Будем называть временем до остановки цилиндра время \tilde{T}^* , за которое безразмерная скорость убывает от начального значения до некоторой заранее заданной малой величины ε .

Для достаточно малых ε выполнено условие

$$\tilde{Q}(\tilde{V}) \leq -\frac{\alpha - 1}{2\alpha}\tilde{V} \quad \text{при} \quad \tilde{V} \in [0, \varepsilon]$$



Фиг. 3

Тогда справедливо

Следствие 2. Путь торможения $\xi(\infty)$ превышает путь ξ^* , пройденный за время \tilde{T}^* , не более чем на величину $\frac{2\gamma\alpha}{\alpha-1}\epsilon$.

4. Пример расчета изменения контактных характеристик и скорости цилиндра при торможении. Приведем пример расчета торможения жесткого цилиндра на вязкоупругом полупространстве с параметрами материала, соответствующими некоторому образцу резины. Возьмем следующие значения размерных параметров цилиндра:

$$\rho = 1131 \text{ кг/м}^3, \quad R = 10 \text{ см}, \quad m = \pi R^2 \rho = 35.5 \text{ кг/м}, \quad P = mg = 348.2 \text{ Н/м}$$

и материала вязкоупругой полуплоскости:

$$E = 22.8 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.49, \quad T_{\sigma} = 0.971 \text{ с}^{-1}, \quad T_{\epsilon} = 10.684 \text{ с}^{-1}$$

Отметим, что при этих значениях параметров длина участка контактного взаимодействия в покое $l_0 = 3.4$ мм. Безразмерные параметры задачи принимают значения

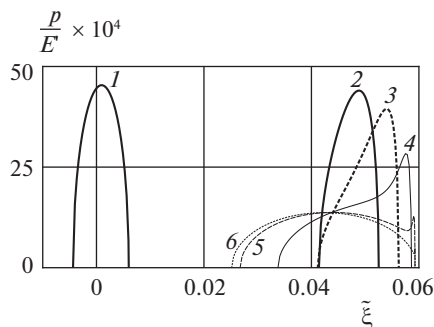
$$\nu = 0.49, \quad \kappa = 29.1, \quad \alpha = 11, \quad \gamma = 1.1 \times 10^4$$

Пусть в начальный момент $\tilde{V}_0 = 1$. Это значение соответствует размерному значению скорости $V = 0.54$ м/мин и выбрано так, чтобы при численном интегрировании учесть характерные участки возрастания и убывания силы сопротивления, т.е. значение V_0 больше значения скорости, при котором сила сопротивления максимальна (см. фиг. 2). Положим начальную координату оси цилиндра равной нулю: $\xi(0) = 0$.

При численном решении задачи использовался алгоритм Брента–Деккера решения алгебраического уравнения (3.2); алгоритм Адамса в форме Нордсика для решения задачи Коши уравнений (2.2), (2.3). Оба алгоритма реализованы в открытой библиотеке GNU Scientific Library¹.

График функции $\tilde{V}(\tilde{t})$, являющейся решением уравнения (3.1), приведен в левой части фиг. 3 сплошной линией. Обратим внимание, что при малых скоростях функция $\tilde{V}(\tilde{t})$ довольно быстро убывает: этот участок соответствует максимуму функции $\tilde{Q}(\tilde{V})$. При увеличении масштаба (см. правую часть фигуры) видно, что график функции $\tilde{V}(\tilde{t})$ при $\tilde{t} \rightarrow \infty$ касается горизонтальной прямой $\tilde{V} = 0$ (решение $\tilde{V}(\tilde{t})$ не обраша-

¹ <https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html>



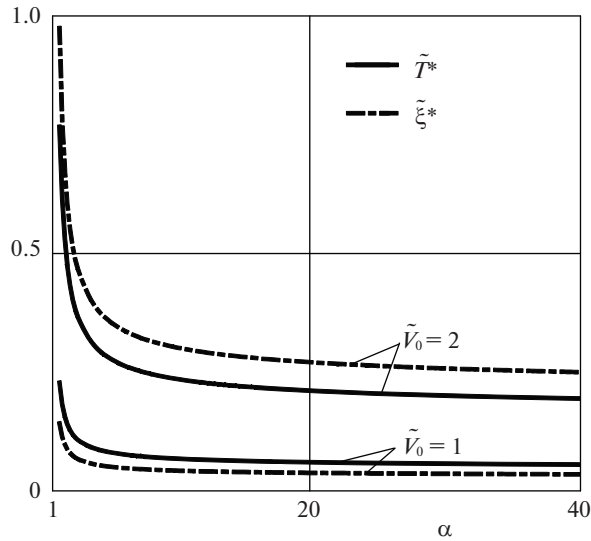
Фиг. 4

ется в нуль, однако график практически сливается с горизонтальной осью). Там же приведены соответствующие этому решению графики зависимости смещения $\epsilon(\tilde{t})$ и безразмерной длины $\lambda(\tilde{t})$ участка контактного взаимодействия. Отметим, что при $\tilde{t} < 0.062$ обе функции $\epsilon(\tilde{t})$ и $\lambda(\tilde{t})$ медленно монотонно возрастают.

На фиг. 4 приведены графики распределения контактных давлений (3.5), ось абсцисс соответствует безразмерной абсолютной координате ξ оси цилиндра. Распределение 1 соответствует начальному моменту времени, когда координата оси цилиндра $\xi = 0$; распределения (2–6) – финальному интервалу $\tilde{t} \in [0.065, 0.0672]$, путь торможения $\xi^* = 0.042$. Таким образом, на финальном участке движения эпюра контактного давления “расплывается” и становится симметричной.

5. Анализ зависимости времени до остановки и пути торможения от параметра α . Зафиксируем теперь безразмерные параметры $\gamma = 1.1 \times 10^4$, $\kappa = 29.1$ и будем варьировать вязкоупругий параметр $\alpha \in (1.1, 40)$. В левой части фиг. 3 представлены функции $\tilde{V}(\tilde{t})$ при $\alpha = 1.1$ (штриховая кривая) и при $\alpha = 11$ (сплошная кривая). Характер убывания скорости одинаков при разных α , причем чем больше значение параметра α , тем быстрее происходит остановка цилиндра. На фиг. 5 при разных начальных скоростях $\tilde{V}_0 = 1$ и $\tilde{V}_0 = 2$ построены графики зависимостей времени до остановки \tilde{T}^* (сплошные кривые) и пути торможения ξ^* (штриховые кривые) от параметра α (выбрано значение $\epsilon = 10^{-7}$). Результаты расчетов показывают, что обе функции монотонно убывают с ростом вязкости материала основания. Заметим, что при $\alpha \rightarrow 1+$ (упругий материал) время до остановки и путь торможения стремятся к бесконечности: действительно, при скольжении цилиндра по упругой полуплоскости сила сопротивления равна нулю в силу симметрии распределения контактного давления по области контакта.

6. Заключение. Построено решение задачи в плоской постановке о торможении жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому полупространству, проведен его качественный и численный анализ. Сила сопротивления движению цилиндра получена из решения квазистатической задачи теории вязкоупругости. Аналитически показано, что эта сила равна нулю при нулевой и бесконечной скорости оси цилиндра, а ее производная в нуле – функция отношения α времени последействия ко времени релаксации. Установлено, что решение задачи зависит от трех безразмерных параметров, два из которых совпадают с параметрами квазистатической задачи вязкоупругости, а третий параметр задает соотношение двух масштабов времени: динамического,



Фиг. 5

задаваемого ускорением свободного падения и радиусом цилиндра, и времени последнего действия материала. Аналитически показано, что время до остановки цилиндра бесконечно, а путь торможения конечен. На основании численных расчетов изучены процесс торможения и характер распределения контактных давлений в разные моменты времени, а также влияние релаксационных характеристик основания на путь торможения и время до остановки. Показано, что при увеличении вязкости основания время до остановки и путь торможения монотонно убывают, при этом для упругих материалов эти величины равны бесконечности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00140) и в рамках Госзадания (АААА-А17-117021310379-5).

А. Приложение

Приведем формулировки и доказательства утверждений, используемых для анализа свойств силы сопротивления и уравнений движения.

Утверждение 1.

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \alpha^{-1/2}, \quad \tilde{Q} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tilde{V} \rightarrow \infty$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотическими разложениями функций Бесселя [15]

$$\begin{aligned} K_0(z) &= -\ln z(1 + o(1)), & K_1(z) &= \frac{1}{z}(1 + o(1)) \\ I_0(z) &= 1 + o(1), & I_1(z) &= \frac{z}{2}(1 + o(1)), \quad z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

При $\tilde{V} \rightarrow \infty$ переменная λ ограничена, следовательно, $\zeta \rightarrow 0$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\lambda^{-2} - 1)(-\zeta \ln \zeta)(1 + o(1)) \rightarrow 0,$$

т.е. справедлива первая часть утверждения. Для доказательства второй части разложим функции, входящие в уравнение (3.2), в окрестности $\zeta = 0$. Получим равенство

$$(1 - \lambda^2) \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta}{2} \ln \zeta \right) (1 + o(1)) + \frac{\alpha}{\zeta} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \lambda^2 (1 + o(1)) = 0$$

Воспользовавшись предельным соотношением $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \ln \zeta = 0$ и преобразовав выражения, получим

$$\lambda^2 = \alpha^{-1} (1 + o(1))$$

Непосредственной подстановкой полученных асимптотик в выражение для функции сопротивления (3.4) получим третью часть утверждения.

Утверждение 2.

$$\varepsilon = 0, \quad \lambda = 1, \quad \tilde{Q} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{V} = 0, \quad (\text{A.1})$$

причем функция $\lambda(\tilde{V})$ дифференцируема при $\tilde{V} = 0$ и

$$\frac{d\lambda}{d\tilde{V}} = \kappa \frac{1 - \alpha}{\alpha} \quad (\text{A.2})$$

Доказательство. Вторая часть утверждения следует из определения переменной λ как отношение длины участка контактного взаимодействия к той же длине в покое. Докажем непрерывность функции λ , пользуясь асимптотиками функций Бесселя при большом значении аргумента [15]

$$I_i(\zeta) = \frac{e^\zeta}{\sqrt{2\pi\zeta}} (1 + O(\zeta^{-1})), \quad K_i = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\zeta}}{\sqrt{2\zeta}} (1 + O(\zeta^{-1})), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2$$

Тогда из уравнения (3.2) получаем

$$\frac{1}{\zeta} \left(1 - \lambda^2 + \frac{(1 - \alpha)\lambda^2}{\alpha\zeta} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = \left(1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha\zeta} \right)^{-1/2}, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

Отсюда следует, что $\lambda \rightarrow 1$ при $\zeta \rightarrow \infty$ и следовательно, стремление $\tilde{V} \rightarrow 0$ соответствует стремлению $\zeta \rightarrow \infty$. Подставляя выражение (3.3) для ζ , получим

$$\lambda = \left(1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} \frac{2\kappa\tilde{V}}{\lambda} \right)^{-1/2} = 1 + \kappa \frac{1 - \alpha}{\alpha} V + o(V), \quad V \rightarrow 0$$

откуда сразу следует равенство (A.2). Пользуясь указанными асимптотиками, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\lambda^{-2} - 1) (1 + O(\zeta^{-1})) = 0 \Rightarrow \tilde{Q}(0) = 0$$

Утверждение 3.

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\tilde{V}}(0) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

Доказательство. Непосредственным дифференцированием выражения (3.4) получаем

$$\frac{d\tilde{Q}}{d\tilde{V}} = \kappa^{-1} \frac{d\lambda}{d\tilde{V}} \frac{1 - \alpha}{2\zeta\alpha} - \kappa^{-1} \frac{1 - \alpha}{2\zeta^2\alpha} \frac{d\zeta}{d\tilde{V}} - \kappa^{-1} \frac{1}{\zeta} \frac{d\lambda}{d\tilde{V}} \quad (\text{A.3})$$

Заметим, что так как $\frac{d\lambda}{d\tilde{V}} < \infty$, то $\frac{1}{\zeta} \frac{d\lambda}{d\tilde{V}} = 0$ при $\tilde{V} = 0$. Далее вычислим

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{d\zeta}{d\tilde{V}} = \frac{4\kappa^2 \tilde{V}^2}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2\kappa \tilde{V}} \frac{d\lambda}{d\tilde{V}} - \frac{1}{2\kappa \tilde{V}^2} \right) \Rightarrow \lim_{\tilde{V} \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta^2} \frac{d\zeta}{d\tilde{V}} = -2\kappa$$

Подстановка полученного выражения в (А.3) завершает доказательство.

Заметим, что в постановке задачи вязкоупругости направление оси $O\xi$ выбирается так, что $\tilde{V} > 0$, и формула (3.4) задает выражение силы сопротивления для неотрицательной скорости \tilde{V} .

Утверждение 4. Сила сопротивления строго диссипативна: $\tilde{Q} < 0$ при $\tilde{V} > 0$.

Численно установлено, что уравнение (3.2) имеет единственное решение, причем $\frac{1}{\alpha} \leq \lambda^2 \leq 1$. Тогда из равенства (3.4) следует, что $\tilde{Q} < 0$.

Доопределим силу сопротивления естественным образом: $\tilde{Q}(-\tilde{V}) = -Q(\tilde{V})$. Функция $Q(\tilde{V})$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$: существование производной в нуле показано выше, при остальных значениях \tilde{V} существование и гладкость производных следует из гладкости алгебраических функций и функций Бесселя, входящих в уравнение (3.2).

Рассмотрим теперь второе уравнение системы (3.1)

$$\frac{d\tilde{V}}{d\tilde{t}} = \gamma \tilde{Q} \tag{А.4}$$

Сформулированные далее свойства этого уравнения имеют место при выполнении естественных условий

$$\tilde{Q}(\tilde{V}) \in C^1(\mathbb{R}), \quad Q(\tilde{V}) = -\tilde{Q}(-\tilde{V}), \quad \tilde{Q}(\tilde{V}) < 0 \quad \text{при} \quad \tilde{V} > 0 \tag{А.5}$$

Теорема 1. Уравнение (А.4) имеет единственную глобально асимптотически устойчивую особую точку $\tilde{V} = 0$.

Доказательство проводится применением теоремы Барбашина–Красовского с использованием функции $\tilde{V}^2/2$ в качестве функции Ляпунова.

Из этой теоремы вытекает следствие 1.

Не ограничивая общности, далее рассматриваем случай $\tilde{V}(0) = V_0 > 0$, так как из нечетности функции $\tilde{Q}(\tilde{V})$ следует, что если $\tilde{V}(\tilde{t})$ – решение системы, то и $-\tilde{V}(\tilde{t})$ – решение системы.

Так как уравнение (А.4) автономно и любое его решение строго монотонно убывает к нулю, то верно

Утверждение 5. Задание меньшего значения \tilde{V}_0 начальной скорости эквивалентно некоторому конечному сдвигу по времени исходного решения уравнения.

Вернемся к рассмотрению решения задачи Коши для полной системы уравнений торможения (3.1) с начальными условиями

$$\xi(0) = 0, \quad \tilde{V}(0) = \tilde{V}_0$$

Теорема 2. Если дополнительно к (А.5) выполнено условие

$$\left. \frac{d\tilde{Q}}{d\tilde{V}} \right|_{\tilde{V}=0} = -k < 0,$$

то для любой начальной скорости $\tilde{V}(0) = V_0$ путь торможения конечен:

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \xi(\tilde{t}) < \infty$$

Доказательство. Необходимо доказать сходимость интеграла

$$\xi(\infty) = \int_0^{\infty} \tilde{V}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

Из разложения функции $\tilde{Q}(\tilde{V})$ в ряд Тейлора в нуле $\tilde{Q}(\tilde{V}) = -k\tilde{V} + O(\tilde{V}^2)$ следует, что

$$\exists \epsilon > 0: \tilde{Q}(\tilde{V}) \leq -\frac{k}{2}\tilde{V} \quad \text{при} \quad \tilde{V} \in [0, \epsilon]$$

Если $\tilde{V}_0 > \epsilon$, то так как скорость $\tilde{V}(\tilde{t})$ строго монотонно убывает к нулю, то существует момент времени \tilde{t}^* : $\tilde{V}(\tilde{t}^*) = \epsilon$. Пройденный за это время путь $\xi(\tilde{t}^*)$ конечен и оценивается сверху:

$$\xi^* = \xi(\tilde{t}^*) = \int_0^{\tilde{t}^*} \tilde{V} d\tilde{t} \leq \tilde{t}^* \tilde{V}_0$$

Если $\tilde{V}_0 < \epsilon$, то переходим сразу к следующему шагу. Оценим сверху путь торможения при $\tilde{t} \in [\tilde{t}^*, \infty)$. На этом интервале имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{dV^2}{dt} = \gamma Q\tilde{V} \leq -\gamma \frac{k}{2} V^2, \quad \tilde{V}^2(\tilde{t}^*) = \epsilon^2$$

Тогда по лемме Гронуолла

$$V^2 \leq \epsilon^2 \exp(-\gamma k(\tilde{t} - \tilde{t}^*)) \Rightarrow V \leq \epsilon \exp\left(-\gamma \frac{k}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^*)\right)$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \xi(\infty) &= \xi^* + \int_{\tilde{t}^*}^{\infty} \tilde{V}(\tilde{t}) d\tilde{t} \leq \xi^* + \int_{\tilde{t}^*}^{\infty} \epsilon \exp\left(-\gamma \frac{k}{2}(\tilde{t} - \tilde{t}^*)\right) d\tilde{t} = \\ &= \tilde{t}^* \tilde{V}_0 + \frac{2}{k} \gamma \epsilon \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В определении в разд. 3 временем до остановки назван момент \tilde{T}^* достижения скорости величины ϵ . Тогда, пользуясь утверждением 3, получим следствие 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer, 1998. 344 p.
2. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
3. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // Proc. R. Soc. A. 1926. V. 112. P. 151–157.
4. *Hunter S.C.* The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half space // J. Appl. Mech. 1961. V. 28. № 4. P. 611–617.
5. *Golden J.M.* The problem of a moving rigid punch on an unlubricated visco elastic half-plane // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1979. V. 32. № 1. P. 25–52.
6. *Golden J.M., Graham G.A.C.* The transient quasi-static plane viscoelastic moving load problem // Intern. J. Eng. Sci. 1987. V. 25. № 1. P. 65–84.
7. *Chertok D.L., Golden J.M., Graham G.A.C.* Hysteretic friction for the transient rolling contact problem of linear viscoelasticity // J. Appl. Mech. 2001. V. 68. № 4. P. 589–595.
8. *Pöschel T., Schwager T., Brilliantov N.V.* Rolling friction of a hard cylinder on a viscous plane // Eur. Phys. J. B. 1999. V. 10. P. 169–174.
9. *Pöschel T., Brilliantov N., Zaikin A.* Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // Europhys. Letters. 2005. V. 69. № 3. P. 371–377.

10. Вильке В.Г., Мигунова Д.С. О движении мяча по травяному газону // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 801–812.
11. Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С. Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 601–625.
12. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260.
13. Солдатенков И.А. Задача о неравномерном скольжении штампа по вязкоупругому основанию с приложениями к расчету динамики подвижного контакта // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 3. С. 257–277.
14. Горячева И.Г. Об одном предельном случае качения цилиндра по вязкоупругому основанию // Научные труды аспирантов отд. мех. мех.-мат. фак. МГУ. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 96–105.
15. Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1972. = Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
16. Горячева И.Г., Зобова А.А. Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому основанию // ДАН. 2018. Т. 481. № 1. С. 24–26.
17. Горячева И.Г., Зобова А.А. Динамика движения упругого цилиндра по упругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 39–46.