УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ С ЗАДЕЛАННЫМИ КРАЯМИ ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ К БЕСКОНЕЧНЫМ СИСТЕМАМ УРАВНЕНИЙ© 2019 г. О. Ф. Иванова^{1,*}, Н. Н. Павлов^{1,**}, Ф. М. Федоров^{1,***}¹СВФУ им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

* e-mail: o_buskarova@mail.ru

** e-mail: pnn10@mail.ru

*** e-mail: foma_46@mail.ru

Поступила в редакцию 20.04.2017 г.

После доработки 13.02.2018 г.

Принята к публикации 10.10.2018 г.

Рассматривается известная задача об изгибе пластинки с заделанными краями и равномерно распределенной нагрузкой, решение которой сводится к решению бесконечных систем уравнений. Из построения решения бигармонических уравнений с краевыми условиями доказывается, что эти бесконечные системы имеют единственное решение, причем ограниченное. Использовано существование специального частного (“строго частного”) решения (СЧР) систем, к которому сходится решение методом простой редукции. Оно существует всегда, если общая система совместна, и обладает особыми свойствами: 1) это единственное частное решение, которое выражается формулой Крамера, 2) оно не содержит как аддитивное слагаемое нетривиальное решение соответствующей однородной системы, 3) хорошо известное главное решение бесконечной системы, на самом деле, совпадает с СЧР. Найденное СЧР позволяет вычислить значения прогиба пластинки, изгибающих моментов и давлений на ее контуре. Показано, что построение СЧР (на самом деле, точного решения) полученной бесконечной системы не зависит от ее регулярности или нерегулярности.

Ключевые слова: статическая теория упругости, изгиб пластинки, бесконечные системы уравнений, частное решение

DOI: 10.1134/S0032823519020085

Необходимость в исследовании бесконечной системы линейных алгебраических уравнений возникает при рассмотрении методом Ламе граничных задач статической теории упругости для прямоугольной пластинки [1–4]. Интерес к этой теме еще не исчерпан [5, 6]. Вместе с тем вполне приемлемая для практики теория бесконечных систем разработана в основном только для регулярных (вполне регулярных, квазирегулярных) систем, основной метод решения бесконечных систем – метод последовательных приближений, и теория его применения в достаточной мере развита только для регулярных систем. Поэтому изучение вышеприведенных задач статической теории упругости ограничивается рассмотрением только регулярных систем. В последние годы разработан новый подход к изучению бесконечных систем с общей позиции [7–10], который реализован на практике [9, 10].

Цель настоящей работы – доказательство единственности решения бесконечной системы, к которой приводится решение рассматриваемой дифференциальной задачи. Доказательство проводится именно из построения единственного решения бигар-

монических уравнений с соответствующими краевыми условиями. Последнее обстоятельство позволяет применить новую, общую, теорию бесконечных систем [7–10], в частности, построить специальное частное (“строго частное”) решение (СЧР) бесконечных систем, тем самым найти решение соответствующей бигармонической задачи.

Здесь необходимо отметить следующее. До настоящего времени задачи, связанные со статической теорией упругости, в основном решены с помощью регулярных или вполне регулярных бесконечных систем [4, 6, 11]. Но теория регулярных бесконечных систем основывается на существовании главного решения, т.е. решения, полученного методом последовательных приближений [4]. Недавно показано [10], что если существует главное решение, то оно совпадает с СЧР. Но СЧР может существовать и тогда, когда не существует главного решения, т.е. когда метод последовательных приближений не сходится [10]. Таким образом, нет необходимости доказательства регулярности бесконечных систем, к которым сводится решение задачи статической теории упругости, так как единственность решения бесконечных систем следует из единственности решения самой исходной краевой задачи. Этому вопросу и посвящены последующие разделы. Бесконечные системы в них изучаются в бесконечномерном векторном пространстве над полем действительных или комплексных чисел и сходимость в нем рассматривается покоординатная, т.е. с точки зрения функционального анализа достаточно предположить слабую сходимость. Последнее значительно расширяет класс разрешимых бесконечных систем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изгиб пластинки, жесткость которой D , со сторонами a и b под равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q . Чтобы воспользоваться условиями симметрии, расположим координатные оси x и y параллельно сторонам пластинки с центром в ее середине [2, 11]. Краевая задача определения прогиба пластинки $\omega = \omega(x, y)$ (задача 1) имеет вид

$$DL\omega = q; \quad L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (1.1)$$

Края пластинки заделаны и не поворачиваются:

$$\omega\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \omega\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (1.3)$$

Положим

$$\omega = \frac{q}{8D} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + w_1, \quad (1.4)$$

где $\omega_1 = \omega_1(x, y)$ – новая функция; она определяется как решение следующей краевой задачи [2] (задача 2):

$$L\omega_1 = 0 \quad (1.5)$$

$$\omega_1\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = 0, \quad \omega_1\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\left(\pm \frac{a}{2}, y\right) = \pm \frac{q}{8D} a \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right), \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = \pm \frac{q}{8D} b \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \quad (1.7)$$

Далее будет рассматриваться краевая задача для функции $u(x, y)$, соответствующая задаче (1.5)–(1.7) при $q \equiv 0$ (задача 2⁰).

Таким образом, решение рассматриваемой статической задачи теории упругости сводится к решению бигармонического уравнения для функции $u(x, y)$ с соответству-

ющими нулевыми граничными условиями. Известно, что решение бигармонического уравнения для $u(x, y)$ — гармоническая функция, которая единственным образом разлагается в ряд Фурье. Сначала подробно рассмотрим вопрос сведения решения задачи 2^0 к решению парных однородных бесконечных систем. Затем полностью аналогично сведем решение задачи 2 к решению парных неоднородных бесконечных систем.

2. Сведение задачи 2^0 к парным однородным бесконечным системам. Функция $u(x, y)$, очевидно, будет четной относительно x и y . Будем искать ее в виде

$$u = -U \left(\sum_n A_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{n\pi\mu}{2} Y_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_n B_n \frac{4\mu^3}{n^2 \pi^2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{n\pi}{2\mu} X_n \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (2.1)$$

$$U = \frac{qa^3}{64D}, \quad \mu = \frac{b}{a}$$

Множитель U введен для удобства выкладок. Здесь и далее, если не оговорено иное, индекс n принимает значения 1, 3, 5, ..., по которым ведется суммирование, это относится также к индексам i, j, r и др. Y_n — функция только от y и X_n — функция только от x . Их подберем так, чтобы каждый член рядов, входящих в равенство (2.1), представлял собой четную функцию x и y , удовлетворял уравнению (1.5) и обращался в нуль на контуре пластинки (удовлетворял условиям (1.6)).

Подставляя выражение (2.1) в уравнение (1.5), получаем для X_n и Y_n линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$X_n^{(4)} - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n^{(2)} + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 X_n = 0 \quad (X \leftrightarrow Y, a \leftrightarrow b),$$

решая которые, находим X_n и Y_n , удовлетворяющие поставленным условиям:

$$X_n = a \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} - 2x \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \quad (X \leftrightarrow Y, a \leftrightarrow b, x \leftrightarrow y) \quad (2.2)$$

Произвольные постоянные A_n и B_n , входящие в выражение (2.1), подберем так, чтобы выполнялись однородные условия (1.7) на краях пластинки. Функции X_n и Y_n , как четные, могут быть представлены в виде таких рядов:

$$\frac{n\pi}{b} X_n = \sum_j D_j \cos \frac{j\pi x}{a}, \quad (X \leftrightarrow Y, a \leftrightarrow b, C \leftrightarrow D, x \leftrightarrow y), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.3)$$

где

$$C_j = \frac{16j\mu^2}{n^2\pi} \left(\mu^2 + \frac{j^2}{n^2} \right)^{-2} \sin \frac{j\pi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi\mu}{2}, \quad D_j = \frac{16j\mu^2}{n^2\pi} \left(1 + \frac{j^2}{n^2} \mu^2 \right)^{-2} \sin \frac{j\pi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{n\pi}{2\mu} \quad (2.4)$$

$$j, n = 1, 3, 5, \dots$$

Подставляя в однородные условия (1.7) выражения (2.1) и (2.2) и учитывая равенства (2.4), получаем

$$U \sum_n \sum_j A_n \frac{64}{n^3 \pi^3} \frac{j\mu^2}{n} \left(\mu^2 + \frac{j^2}{n^2} \right)^{-2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{j\pi y}{b} +$$

$$+ U \sum_n B_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \mu^3 \operatorname{ch}^{-2} \frac{n\pi}{2\mu} \left(\frac{n\pi}{\mu} + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{\mu} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$U \sum_n A_n \frac{4}{n^2 \pi^2} \operatorname{ch}^{-2} \frac{n\pi\mu}{2} (n\pi\mu + \operatorname{sh}(n\pi\mu)) \cos \frac{n\pi x}{a} +$$

$$+ U \sum_n \sum_j B_n \frac{64}{n^3 \pi^3} \frac{j}{n} \mu^5 \left(1 + \frac{j^2}{n^2} \mu^2\right)^{-2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{j\pi x}{a} = 0$$

Пусть числа $A_1, A_3, A_5, \dots; B_1, B_3, B_5, \dots$ ограничены сверху по модулю. Тогда в виду абсолютной сходимости рассматриваемых рядов можно поменять порядок суммирования. Выделяя из двойных сумм члены, для которых $j = n$, и приравнявая нулю коэффициенты при каждом $\cos \frac{n\pi y}{b}$ и $\cos \frac{n\pi x}{a}$, приходим к системам, которые, введя обозначения

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{16} \mu^{-5} \frac{n\pi\mu + \operatorname{sh}(n\pi\mu)}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi\mu}{2}}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{16} \mu \frac{\mu + \operatorname{sh} \frac{n\pi}{2\mu}}{\operatorname{ch}^2 \frac{n\pi}{2\mu}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

и представив индексы n и r в виде $n = 2i - 1, r = 2j - 1, i, j = 1, 2, \dots$, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1} B_{2i-1} &= -\frac{(2i-1)^4}{\beta_{2i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} A_{2j-1}}{\Delta_{ij}} \\ (-1)^{i-1} A_{2i-1} &= -\frac{(2i-1)^4}{\alpha_{2i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} B_{2j-1}}{\Delta_{ji}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Delta_{ij} = ((2i-1)^2 + (2j-1)^2 \mu^2)^2; \quad i = 1, 2, \dots$$

3. Единственность решений парных бесконечных систем (2.5). Итак, задача 2^0 приводится к парным однородным системам (2.5). Обратное, ввиду эквивалентности всех преобразований, системы (2.5) приводятся к задаче 2^0 . Таким образом, между решением однородной задачи 2^0 и решениями парных однородных бесконечных систем (2.5) существует взаимно-однозначное соответствие. Поскольку задача 2^0 имеет только нулевое решение, то парные однородные системы (2.5) имеют только тривиальное решение. Это утверждение можно доказать и непосредственно, следуя Р.О. Кузьмину [11].

Функцию u внутри пластинки можно разложить по косинусам нечетных кратных углов x и y и притом единственным образом:

$$u = \sum_n \sum_m a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}; \quad a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_S u \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} dx dy$$

Так как $u \equiv 0$, то и коэффициент $a_{nm} = 0$. С другой стороны, подставляя в равенство (2.1) вместо X_n и Y_n их выражения по формулам (2.3), а вместо C_j и D_j — их выражения по формулам (2.4), после преобразований получим

$$\begin{aligned} u = & -\frac{qa^2 b^2}{D\pi^4} \left(\sum_n \sum_j A_n a^4 \frac{j}{n(b^2 n^2 + a^2 j^2)^2} \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{j\pi y}{b} \cos \frac{n\pi x}{a} + \right. \\ & \left. + \sum_n \sum_j B_n b^4 \frac{j}{n(a^2 n^2 + b^2 j^2)^2} \sin \frac{j\pi}{2} \cos \frac{j\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right) \end{aligned}$$

Во второй сумме поменяв местами индексы j и n и учитывая, что коэффициент $a_{nj} = 0$, получим

$$\frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} j a^4 A_n}{n} + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n b^4 B_j}{j} = 0$$

Представим индексы n и j в виде $n = 2\nu - 1$, $j = 2\lambda - 1$. Тогда

$$\frac{a^4 A_{2\nu-1}}{(2\nu-1)^2} + \frac{b^4 B_{2\lambda-1}}{(2\lambda-1)^2} = 0 \quad (3.1)$$

Очевидно, соотношение (3.1) верно для любых индексов ν и λ . Предположим, что не все коэффициенты $A_{2\nu-1}$ равны нулю, т.е. $A_{2\nu_0-1} \neq 0$ при некотором $\nu = \nu_0$. Тогда из равенства (3.1) следует, что при неограниченном возрастании λ коэффициент $B_{2\lambda-1}$ также неограниченно возрастает, что противоречит разложению (2.1). Пришли к противоречию; следовательно, $A_{2\nu-1} \equiv 0$ для любого ν . Поэтому из равенства (3.1) получим, что и $B_{2\lambda-1} \equiv 0$ для любого λ , т.е. парные однородные системы (2.5) имеют только тривиальное решение.

4. Сведение задачи 2 к парным неоднородным бесконечным системам. Аналогично тому, как краевая задача 2^0 приводится к системам (2.5), задача 2 сводится к парным неоднородным системам уравнений:

$$\begin{aligned} B_{2i-1} &= -\frac{16(2i-1)^3}{\pi S_{2i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} A_{2j-1}}{\Delta_{ij}} + \frac{16(-1)^i}{\pi(2i-1)S_{2i-1}} \\ A_{2i-1} &= -\frac{16(2i-1)^3}{\pi \bar{S}_{2i-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} B_{2j-1}}{\Delta_{ji}} + \frac{16(-1)^i \mu^{-4}}{\pi(2i-1)\bar{S}_{2i-1}} \\ S_{2i-1} &= \frac{16}{(2i-1)\pi} \beta_{2i-1}, \quad \bar{S}_{2i-1} = \frac{16}{(2i-1)\pi} \alpha_{2i-1}; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

и их можно написать в виде одной системы [3]:

$$\begin{aligned} F_i &= -\sum_{j=1}^{\infty} H_{ij} F_j + G_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1) \\ F_{2i} &= y_{2i} = (-1)^{i+1} A_{2i-1}, \quad F_{2i-1} = x_{2i-1} = (-1)^{i+1} B_{2i-1} \\ G_i &= \begin{cases} \frac{1}{\beta_i}, & i \text{ неч.} \\ \frac{1}{\alpha_{i-1}\mu^4}, & i \text{ чет.} \end{cases}, \quad H_{i,j} = \begin{cases} 0, & i, j \text{ оба чет. или неч.} \\ \frac{1}{\beta_i} \left[\frac{i^2}{i^2 + (j-1)^2 \mu^2} \right]^2, & i \text{ неч., } j \text{ чет.} \\ \frac{1}{\alpha_{i-1}} \left[\frac{(i-1)^2}{\mu^2 (i-1)^2 + j^2} \right]^2, & i \text{ чет., } j \text{ неч.} \end{cases} \end{aligned}$$

Решение имеет вид

$$\mathbf{F} = (x_1, y_2, x_3, y_4, \dots, x_{2i-1}, y_{2i}, \dots)^T$$

(T – знак транспонирования). Так как соответствующие парные однородные системы (2.5) имеют только нулевое решение, неоднородная система (4.1) имеет единственное решение, причем ограниченное.

5. Специальное частное (“строго частное”) решение системы (4.1). Бесконечную систему можно написать в матричной форме:

$$Ax = b, \quad (5.1)$$

где A – бесконечная матрица коэффициентов, бесконечный определитель которой отличен от нуля, x и b – соответственно столбцы неизвестных и свободных членов

системы. Было показано [7], что любая бесконечная матрица A с определителем, отличным от нуля, т.е. бесконечного ранга, представляется в виде произведения бесконечной треугольной матрицы B и бесконечной гауссовой матрицы C .

Матрица B имеет единственную обратную матрицу B^{-1} [12]. Следовательно, общая бесконечная система (5.1) сводится к эквивалентной, так называемой гауссовой, системе $Cx = B^{-1}b = \bar{b}$, которая в обычной, покоординатной записи имеет вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_{j,j+p} x_{j+p} = b_j; \quad j = 1, 2, \dots, \quad c_{j,j} \neq 0 \quad \forall j \quad (5.2)$$

Неоднородная гауссова система (5.2) решается методом простой редукции (редукции в узком смысле), а соответствующая однородная система – редукцией в широком смысле. Решение, полученное простой редукцией, названо *СЧР* гауссовой системы (5.2) [8, 9]. Установлено [8], что *общая гауссова система (5.2) совместна тогда и только тогда, когда существует СЧР*.

Решение урезанной по простой редукции гауссовой системы (5.2) порядка n , определяется [10] по формуле

$$x_j^{(n)} = \frac{\Delta_n^{(j)}}{\Delta_n} = \sum_{p=0}^{n-j} (-1)^p C_p(j) \frac{b_{j+p}}{c_{j+p,j+p}}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

где

$$C_p(j) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \frac{c_{j+k,j+p}}{c_{j+k,j+k}} C_k(j), \quad C_0(j) = 1$$

Здесь Δ_n – определитель урезанной системы порядка n , $\Delta_n^{(j)}$ – определитель Δ_n в котором j -й столбец заменен столбцом свободных членов b_j , $c_{j+k,j+p}$ – соответствующие коэффициенты матрицы системы, урезанной от гауссовой системы (5.2).

Вычисление по формуле (5.3) осуществляется таким образом: для каждого j при $n \rightarrow \infty$ вычисляем абсолютное значение разности последних двух членов суммы (5.3), и если это значение не превышает заданной точности ε , останавливаем вычисления (при некотором $n = N_j$). Естественно, для каждого j существует свое N_j , а это в свою очередь позволяет следить за невязкой, т.е. за разницей между левой и правой частями системы (5.2) для найденных значений x_j для каждого j . Если эти невязки стремятся к нулю, то полученные числа x_j будут приближенными решениями системы (5.2) с гарантированной точностью.

Поясним вышесказанное. Действительно, если числовая последовательность $x_j^{(n)}$ сходится при увеличении n , то это говорит о том, что простая редукция имеет предел, т.е. сходится. Здесь необходимо помнить о том, что на самом деле формула (5.3) дает точное решение урезанной конечной системы n -го порядка для каждого n в единой записи. Но сходимость редукции еще не говорит о том, что редукция сходится именно к решению гауссовой бесконечной системы (5.2) [10]. Но если она сходится, то она сходится непременно к значению, определяемому формулой Крамера для соответствующего j . Для того чтобы показать, что простая редукция сходится к решению системы (5.2), необходимо следить за невязкой.

Очевидно, из формулы (5.3) следует

$$\left| x_j^{(n)} - x_j^{(n+1)} \right| = \left| C_{n+1-j}(j) \frac{b_{n+1}}{c_{n+1,n+1}} \right|$$

Если теперь предположить, что правая часть последнего выражения стремится к нулю при увеличении n , то это значит: 1) числовая последовательность $x_j^{(n)}$ имеет предел по критерию сходимости Коши, 2) необходимое условие сходимости числового ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C_p(j) \frac{b_{j+p}}{c_{j+p, j+p}} \quad (5.4)$$

выполняется. Отсюда очевидным образом следует вышеприведенное рассуждение. Таким образом, если ряд (5.4) сходится, то решение (5.3) в пределе при $n \rightarrow \infty$ дает СЧР системы (6.3), тем самым решение самой общей системы. Если ряд (5.4) расходится, то гауссова система (5.2) не совместна, т.е. исходная общая бесконечная система не имеет решения.

Выше показано, что система (4.1) совместна, более того, она имеет единственное решение. Естественно, этим решением будет ее СЧР, был описан алгоритм его определения и приведена реализация алгоритма на ПК [9].

Найдено СЧР полученной системы (4.1). Например, при абсолютной погрешности $\varepsilon = 10^{-8}$ для $\mu = 2$ и 100 вычисляемых неизвестных получаем невязку порядка 10^{-6} . Для квадратной пластинки ($\mu = 1$) сравнение приближенных результатов (например, $A_{25} = -0.0042$) [4] и полученных здесь решений (например, $A_{25} = -0.0041$) показывает достаточно хорошее совпадение.

6. Пример нерегулярной системы. Рассмотрим задачу о дифракции на толстой полубесконечной пластине [13]. Пусть плоская волна

$$\varphi_i = \exp(-ikx \cos \theta - iky \sin \theta)$$

падает под углом θ на пластину $x \geq 0$, $-b \leq y \leq b$, на поверхности которой должно выполняться условие $\partial \varphi_i / \partial n = 0$. Здесь φ_i – полный потенциал скоростей, φ – потенциал скоростей вторичного поля, определяемые соотношением $\varphi_i = \varphi + \varphi_i$, и потенциал φ удовлетворяет стационарному волновому уравнению.

При некоторых предположениях и упрощениях в этой задаче приходят [13] к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения x_{2s+1}

$$\lambda_{2r+1} x_{2r+1} = \frac{1}{2r+1} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)x_{2s+1}}{(r+s+1)\lambda_{2s+1}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda_m = 2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) m^{1/2} \exp\left(\frac{m}{2}(1 - \ln(2m))\right) \quad (6.1)$$

$$(\lambda_1 = 2.33, \quad \lambda_3 = 4.22, \quad \lambda_5 = 5.51, \quad \lambda_7 = 6.55, \dots)$$

Система (6.1) нерегулярная и была решена [13] приближенно; в ней оставили первые четыре уравнения и, положив $x_{2s+1} = 0$ для $s > 3$, получили систему ([13], гл. 5, § 5.4, стр. 219). Решая первые n уравнений для n неизвестных и полагая $x_{2r+1} = 0$ для $r \geq n$, получили приближенное решение бесконечной системы. Обозначая корни n -го приближения через $x_{2r+1}^{(n)}$, получили [13]

$$x_1^{(1)} = 0.3624$$

$$x_1^{(2)} = 0.3550, \quad x_3^{(2)} = 0.0577$$

$$x_1^{(3)} = 0.3524, \quad x_3^{(3)} = 0.0566, \quad x_5^{(3)} = 0.0246$$

$$x_1^{(4)} = 0.3512, \quad x_3^{(4)} = 0.0560, \quad x_5^{(4)} = 0.0242, \quad x_7^{(4)} = 0.0140$$

Авторами найдено СЧР системы (6.1). Например, при абсолютной погрешности $\varepsilon = 10^{-5}$ и 10 вычисляемых неизвестных получены решения

$$x_1 = 0.3483, \quad x_3 = 0.0545, \quad x_5 = 0.0231, \quad x_7 = 0.0132, \quad x_9 = 0.0087, \dots$$

Сравнение результатов ясно показывает неэффективность известного метода [13], даже в случае быстрой сходимости корней системы с увеличением порядка n .

Отметим, что были проанализированы [14] основные трудности решения бесконечных систем. В частности, на конкретном примере показано, что поиск решения общих бесконечных систем в нормированных пространствах не может иметь успеха. Кроме того, указано, что исследование однородных бесконечных систем гораздо сложнее, чем изучения неоднородных бесконечных систем (что было отмечено еще 100 лет назад [15]). Существование нетривиальных решений однородных систем играет особую роль для анализа бесконечных систем, поскольку единственность их решения зависит только от существования нетривиальных решений. А эти решения могут существовать даже при ненулевом бесконечном определителе системы (принципиальное отличие бесконечных систем от конечных). Чтобы избежать необходимости исследования однородной бесконечной системы, здесь показано, что единственность решения исходной краевой задачи гарантирует единственность решения соответствующей бесконечной системы.

Результаты были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.6069.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коялович Б.М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. Спб.: Изд. Спб. ун-та, 1902. № 4. С. 515–546.
2. Timoshenko S.P. Theory of Elasticity. N.Y.: McGraw-Hill, 1934.
3. Абрамян Б.Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением // ПММ. 1950. Т. 14. № 3. С. 265–276.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
5. Wang Chunling, Huang Yi, Jia Jihong. Analytical solution of steady vibration of free rectangular plate on semi-infinite elastic foundation // Appl. Math. Mech. 2007. V. 28. № 2. P. 173–182.
6. Панков С.О. Бесконечные системы линейных уравнений в случае первой основной граничной задачи для прямоугольной призмы // Динам. системы. 2010. Вып. 28. С. 89–98.
7. Федоров Ф.М. Об алгоритме Гаусса для бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. Вып. 1. С. 133–140.
8. Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Сходимость метода редукции и совместность бесконечных систем // Вестник СВФУ. 2014. Т. 11. № 2. С. 14–21.
9. Федоров Ф.М., Павлов Н.Н., Иванова О.Ф. Алгоритмы реализации решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. Вып. 1. С. 215–223.
10. Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. О главных и строго частных решениях бесконечных систем // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56. № 3. С. 351–362.
11. Кузьмин Р.О. Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений // Изв. АН СССР. сер. VII. Отд. матем. и естеств. наук. 1934. № 4. С. 515–546.
12. Cooke R.G. Infinite Matrices and Sequence Spaces. N.Y.: Dover, 1956.
13. Noble B. The Wiener–Hopf Method. Oxford: Pergamon, 1958.
14. Федоров Ф.М., Иванова О.Ф., Павлов Н.Н. Об особенностях бесконечных систем // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22. № 4. С. 62–78.
15. Riesz F. Les systemes d'equations lineaires a une infinite d'inconnues. Paris: Gauthier-Villars, 1913. 182 p.