УДК 531.31

О ДВИЖЕНИИ САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

© 2019 г. А. В. Карапетян[1,*], А. Ю. Шамин[1,**]

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
** e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*
*** e-mail: shamin_ay@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.09.2018 г.
После доработки 18.11.2018 г.
Принята к публикации 25.12.2018 г.

Рассматривается задача о движении саней Чаплыгина – твердого тела, опирающегося о горизонтальную плоскость тремя ножками, одна из которых снабжена полукруглым лезвием, ортогональным опорной плоскости. Как и в задаче Чаплыгина, предполагается, что лезвие не может скользить в направлении, перпендикулярном его плоскости, но может без трения скользить вдоль прямой, по которой пересекаются плоскость лезвия и опорная плоскость, и вращаться вокруг вертикального радиуса лезвия. В отличие от задачи Чаплыгина, предполагается, что в других точках опоры на тело действуют силы сухого трения. Выписаны уравнения движения системы и дан качественный анализ движения тела.

Ключевые слова: сани Чаплыгина, сухое трение

DOI: 10.1134/S0032823519020097

При отсутствии трения в точках контакта тела с плоскостью рассматриваемая задача переходит в задачу Чаплыгина [1, 2], а при отсутствии лезвия и наличии трения во всех точках контакта – в задачу о движении треноги по плоскости с трением [3–6]. Кроме того, эта система может служить моделью для процесса торможения некоторых типов колесных экипажей [7].

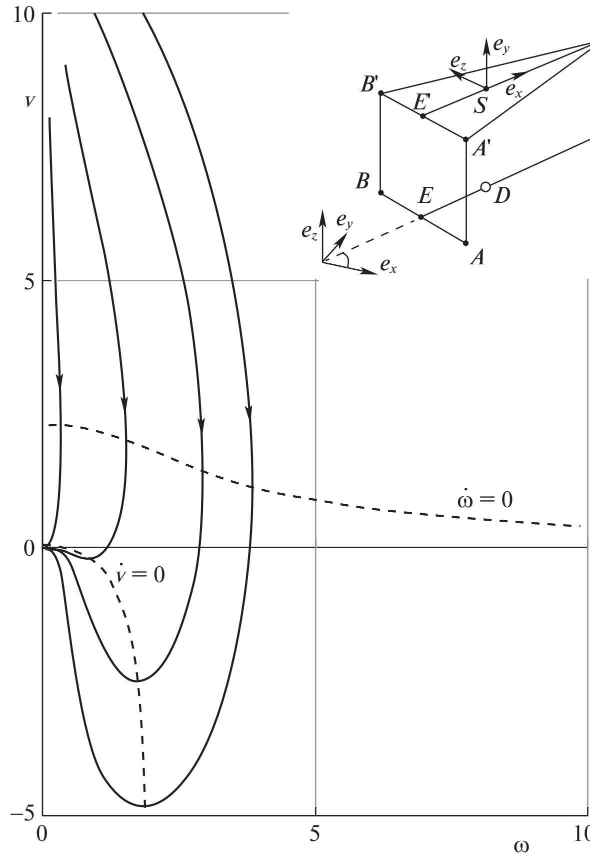
1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, опирающееся о горизонтальную плоскость тремя точками A, B и C (см. фигуру 1), которые образуют равнобедренный треугольник ($AC = BC$, C – точка опоры лезвия). Предполагается, что плоскость лезвия ортогональна опорной плоскости и пересекается с последней по оси симметрии EC треугольника ABC, а центр масс S тела проецируется в точку D на этой оси ($AE = EB = a$, $ED = b$, $DC = c$, $DS = h$).

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат (Oxy – опорная плоскость, Oz – восходящая вертикаль), а $S\xi\eta\zeta$ – главные центральные оси инерции тела, причем $S\zeta \parallel Oz$. Единичные векторы осей $Oxyz$ и $S\xi\eta\zeta$ обозначим через $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ соответственно:

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_x \cos\psi + \mathbf{e}_y \sin\psi, \quad \mathbf{e}_\eta = -\mathbf{e}_x \sin\psi + \mathbf{e}_y \cos\psi, \quad \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_z,$$

ψ – угол между осями Ox и $S\xi$.

Предположим, что скорость точки C тела $\mathbf{v}_C = v\mathbf{e}_\xi$ (тело не может скользить в направлении, ортогональном плоскости лезвия), а угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_\zeta$



Фиг. 1

($\omega = \dot{\psi}$), т.е. тело может вращаться только вокруг вертикали. При безотрывном движении тела скорость $\mathbf{v}_S$ его центра масс и скорости $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$ его точек опоры A и B определяются соотношениями

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{CS}] = v\mathbf{e}_\xi - \omega c\mathbf{e}_\eta$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{CA}] = (v + a\omega)\mathbf{e}_\xi - (b + c)\omega\mathbf{e}_\eta$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{CB}] = (v - a\omega)\mathbf{e}_\xi - (b + c)\omega\mathbf{e}_\eta$$

На тело действует сила тяжести $\mathbf{P} = -mg\mathbf{e}_\zeta$ (m — масса тела, g — ускорение свободного падения), приложенная в точке S, и реакции $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ и $\mathbf{R}_C$, приложенные в точках A, B и C:

$$\mathbf{R}_A = N_A\mathbf{e}_\zeta - kN_A\frac{\mathbf{v}_A}{v_A}, \quad \mathbf{R}_B = N_B\mathbf{e}_\zeta - kN_B\frac{\mathbf{v}_B}{v_B}, \quad \mathbf{R}_C = N_C\mathbf{e}_\zeta + R\mathbf{e}_\eta$$

$$v_{A,B} = \sqrt{(v \pm a\omega)^2 + (b + c)^2\omega^2}, \quad v = v_C$$

Здесь N_A, N_B, N_C — нормальные реакции в точках опоры, $k > 0$ — коэффициент трения Кулона, R — реакция неголономной связи $(\mathbf{v}_C, \mathbf{e}_\eta) = 0$.

2. Определение реакций. Обозначим $G_{\pm} = k\left(\frac{N_A}{v_A} \pm \frac{N_B}{v_B}\right)$, тогда главный вектор сил, действующий на тело, имеет вид

$$\mathbf{F} = F_\xi \mathbf{e}_\xi + F_\eta \mathbf{e}_\eta + F_\zeta \mathbf{e}_\zeta$$

$$F_\xi = -G_+ v - G_- a\omega, \quad F_\eta = G_+(b+c)\omega + R, \quad F_\zeta = N_A + N_B + N_C - mg$$

Найдем главный вектор моментов сил, действующих на тело, относительно его центра масс. Получим

$$\mathbf{M} = [\mathbf{SA}, \mathbf{R}_\mathrm{A}] + [\mathbf{SB}, \mathbf{R}_\mathrm{B}] + [\mathbf{SC}, \mathbf{R}_\mathrm{C}] = M_\xi \mathbf{e}_\xi + M_\eta \mathbf{e}_\eta + M_\zeta \mathbf{e}_\zeta$$

$$M_\xi = -a(N_A - N_B) + hG_+(b+c)\omega + hR, \quad M_\eta = b(N_A + N_B) - cN_C + hG_+ v + hG_- a\omega$$

$$M_\zeta = -G_- av - G_+(l^2 - c(b+c))\omega + cR; \quad l^2 = a^2 + (b+c)^2$$

Таким образом, уравнения движения тела в форме Ньютона–Эйлера, учитывающие условия безотрывного движения тела

$$(\mathbf{v}_S, \mathbf{e}_\xi) = 0, \quad (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\xi) = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_\eta) = 0$$

в проекции на его главные центральные оси инерции имеют вид (J — момент инерции тела относительно оси $S\zeta$)

$$m(\dot{v} + c\omega^2) = F_\xi, \quad m(v\omega - c\dot{\omega}) = F_\eta, \quad 0 = F_\zeta \tag{2.1}$$

$$0 = M_\xi, \quad 0 = M_\eta, \quad J\dot{\omega} = M_\zeta \tag{2.2}$$

Система (2.1), (2.2) замкнута относительно переменных v, ω, N_A, N_B, N_C и R. Реакции N_C и R можно выразить через реакции N_A и N_B (N_C — из третьего уравнения системы (2.1), а R — из второго уравнения этой системы с учетом третьего уравнения системы (2.2):

$$N_C = mg - (N_A + N_B) \tag{2.3}$$

$$R = [Jmv\omega + (mcl^2 - I(b+c))\omega G_+ + macvG_-]I^{-1}, \quad I = J + mc^2 \tag{2.4}$$

При этом реакции N_A и N_B однозначно определяются из системы

$$\begin{gathered} (b+c)(N_A + N_B) + hvG_+ + ha\omega G_- = mgc \\ Ia(N_A - N_B) - machvG_- - ml^2ch\omega G_+ = Jmv\omega h, \end{gathered} \tag{2.5}$$

которая получается из первых двух уравнений системы (2.2) с учетом соотношений (2.3) и (2.4). Очевидно, реакции N_A и N_B (а значит, и N_C и R) зависят только от фазовых переменных v, ω и параметров задачи.

Заметим, что решение системы (2.5) должно удовлетворять условиям

$$N_A \geq 0, \quad N_B \geq 0, \quad N_A + N_B \leq mg, \tag{2.6}$$

которые накладывают ограничение на высоту центра масс тела и обеспечивают (наряду с условиями (2.3) и (2.5)) безотрывное движение тела. Действительно, если зафиксируем все параметры саней, кроме h, причем $b, c > 0$, а также возьмем произвольные значения ω_0 и v_0, то из системы (2.5) получим нормальные реакции $N_A(h)$ и $N_B(h)$ как функции от высоты. Очевидно, что

$$N_A(0) = N_B(0) = \frac{mgc}{2(b+c)} \tag{2.7}$$

и условие (2.6) выполнено, причем все неравенства строгие. Но в силу того, что функции $N_A(h)$ и $N_B(h)$ непрерывны при $h = 0$, условия (2.6) будут выполнены и для любых значений $h \in [0, h_0)$ для некоторого значения h_0, зависящего от начальных скоростей v_0 и ω_0. В силу компактности множества $M = \{(v, \omega) : T(v, \omega) \le T(v_0, \omega_0)\}$ заключаем, что такое значение h_0 можно подобрать сразу для всех $(v, \omega) \in M$.

Таким образом, существует значение $h_0 > 0$, зависящее только от параметров задачи и начальных данных v_0 и ω_0, такое, что при $h < h_0$ условия (2.6) выполнены для всех значений v и ω, при которых соответствующая кинетическая энергия не превосходит начальную.

3. Уравнения движения и свойства их решений. Пусть $h < h_0$. Тогда движение саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости с сухим трением в точках опоры A и B описывается системой второго порядка относительно фазовых переменных задачи v и ω.

$$m\dot{v} + mc\omega^2 = -vG_+ - a\omega G_-, \quad I\dot{\omega} - mcv\omega = -l^2\omega G_+ - avG_- \tag{3.1}$$

Уравнения этой системы получаются из первого уравнения системы (2.1) и третьего уравнения системы (2.2) с учетом соотношений (2.3) и (2.4); при этом $N_A(v, \omega)$ и $N_B(v, \omega)$ определяются из системы (2.5).

Утверждение 1. Система (3.1) инвариантна относительно замены ω на $-\omega$.

Доказательство. При указанной замене v_A и v_B меняются местами. Следовательно (см. систему (2.5)), N_A и N_B меняются местами, т.е. система (3.1) переходит в себя.

Утверждение 2. Система (3.1) допускает инвариантное множество $\omega \equiv 0$, вдоль которого движение саней Чаплыгина определяется соотношениями

$$v(t) = v_0\left(1 \mp \frac{t}{t_\pm}\right), \quad t \in [0, t_\pm]; \quad t_\pm = \pm\frac{((b + c) \pm kh)v_0}{kgc}, \quad \operatorname{sign} v_0 = \pm 1 \tag{3.2}$$

(берутся только верхние или только нижние знаки плюс и минус, $v_0 = v(0)$, т.е. начальный момент без ограничения общности считается нулевым).

Доказательство. При $\omega = 0$ второе уравнение (3.1) выполняется тождественно при любом v, а первое уравнение принимает вид

$$\dot{v} = -\operatorname{sign} v \frac{kgc}{(b + c) + \operatorname{sign} v kh},$$

откуда немедленно следуют соотношения (3.2).

Очевидно, $t_+ > t_-$, т.е. поступательное движение саней Чаплыгина, при котором лезвие находится спереди, длится дольше, чем в случае, когда лезвие находится сзади (при одном и том же значении модуля начальной скорости).

Утверждение 3. Система (3.1) не допускает инвариантное множество $v \equiv 0$.

Доказательство. Если $v = 0$, то $v_A = v_B = l|\omega|$; следовательно (см. систему (2.5))

$$N_{A,B} = N_0(1 \pm \nu), \quad N_0 = \frac{1}{2}mg\left(1 + \frac{b}{c} + \frac{mk^2h^2}{I}\right)^{-1}, \quad \nu = \operatorname{sign}\omega\frac{mlckh}{Ia}$$

и система (3.1), (3.2) принимает вид

$$\dot{v} = -c\omega^2 - 2ck^2h\frac{N_0}{I}, \quad I\dot{\omega} = -2\operatorname{sign}\omega klN_0$$

Очевидно, $\dot{v} < 0$.

Утверждение 4. Движение саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим трением при любых начальных значениях v_0 и ω_0, одновременно не равных нулю, прекращается за конечное время (если $v_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, то $v \equiv 0$, $\omega \equiv 0$).

Доказательство. Из системы (3.1), (3.2) следует, что

$$\dot{T} = -Q(v,\omega), \quad T = \frac{mv^2 + I\omega^2}{2}, \quad Q = G_+v^2 + 2G_-va\omega + G_+l^2\omega^2, \tag{3.3}$$

где T – кинетическая энергия. Очевидно, Q – однородная функция степени 1 от фазовых переменных v и ω, причем $Q > 0$ при любых v и ω, одновременно не равных нулю. Следовательно, существует постоянная $q > 0$, такая, что $Q \geq q\sqrt{T}$. При этом соотношение (3.3) принимает вид

$$\dot{T} = \frac{d(\sqrt{T})^2}{dt} = 2\sqrt{T}\frac{d\sqrt{T}}{dt} = -Q \leq -kq\sqrt{T}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sqrt{T}}{dt} \leq -\frac{kq}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \sqrt{T} \leq \sqrt{T_0} - \frac{kqt}{2} \quad \left(T_0 = \frac{mv_0^2 + I\omega_0^2}{2}\right)$$

Учитывая, что $\sqrt{T} \geq 0$, заключаем, что движение прекращается за конечное время $t_0 \leq \dfrac{\sqrt{T_0}}{2kq}$.

4. Фазовый портрет при $h = 0$. Если $h = 0$, то уравнения (3.1) принимают вид

$$\dot{v} = -c\omega^2 - \frac{\gamma}{2v_Av_B}V, \quad V = (v_A + v_B)v - (v_A - v_B)a\omega \tag{4.1}$$

$$I\dot{\omega} = mcv\omega + \frac{m\gamma}{2v_Av_B}\Omega, \quad \Omega = (v_A - v_B)av - (v_A + v_B)l^2\omega, \quad \gamma = \frac{kgc}{b + c} \tag{4.2}$$

Очевидно, система (4.1), (4.2) допускает решение

$$\omega \equiv 0, \quad v = v_0 - \operatorname{sign} v_0\gamma t, \quad \left(t \in [0, t_0],\ t_0 = \frac{|v_0|}{\gamma}\right) \tag{4.3}$$

и, в частности, решение $\omega \equiv 0$, $v \equiv 0$.

Пусть $\omega_0 > 0$ (случай $\omega_0 < 0$ рассматривается аналогично согласно утверждению 1). Если $v_0 > 0$, то $v_A > v_B$ и $V > 0$ тогда и только тогда, когда

$$(v_A^2 + v_B^2)v^2 > (v_A^2 - v_B^2)a^2\omega^2 \Leftrightarrow v_Av_B(v^2 + a^2\omega^2) > (v^2 + l^2\omega^2)(a^2\omega^2 - v^2)$$

Если $v^2 \geq a^2\omega^2$, то $V > 0$, если же $v^2 < a^2\omega^2$, то $V > 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_A^2v_B^2(v^2 + a^2\omega^2)^2 > (v^2 + l^2\omega^2)^2(a^2\omega^2 - v^2)^2 \Leftrightarrow l^2 > a^2,$$

что заведомо выполнено, поскольку $b + c > 0$.

Таким образом, скорость $v(t)$ с момента начала движения убывает, причем $\dot{v}(t) < 0$ при $v(t) = 0$. Следовательно, функция $v(t)$ некоторое время монотонно убывает до нуля, а затем продолжает убывать до некоторого отрицательного значения, при котором правая часть уравнения (4.1) обращается в нуль, после чего меняет знак. Начиная с этого момента времени функция $v(t)$ возрастает от отрицательного значения до нуля, а $\omega(t)$ продолжает убывать от соответствующего положительного значения до нуля. Действительно, пусть $v_0 > 0$, а $0 < \omega_0 < v/a$. Тогда правая часть уравнения (4.2) положительна, и функция $\omega(t)$ начинает расти. С другой стороны, при $v = 0$ правая часть уравнения (4.2) отрицательна. Следовательно, с некоторого момента времени, для которого величина $v(t)$ еще больше нуля, функция $\omega(t)$ начинает убывать и за конечное время достигает нулевого значения. При $v < 0$ и $\omega > 0$ правая часть уравнения (4.2) всегда отрицательная и $\omega(t)$ – убывающая функция времени.

В точках $\omega = 0$ выполняются условия теоремы о единственности решения задачи Коши для системы (4.1), (4.2), откуда вытекает, что при росте скорости $v(t)$ с некоторого отрицательного значения до нуля угловая скорость обращается в нуль только вместе с $v(t)$, что означает, что вращение и скольжение саней заканчиваются одновременно.

Таким образом, фазовый портрет задачи при $h = 0$ имеет вид, указанный на фигуре 1. В силу симметрии относительно оси $\omega = 0$ показана только половина портрета для $\omega \geq 0$.

Поскольку движение тела длится конечное время, а параметр h входит в уравнения (3.1) регулярно, динамика саней Чаплыгина с малой, но ненулевой высотой центра масс близка к описанной выше динамике саней Чаплыгина с нулевой высотой центра масс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // Мат. сб. 1911. Т. 28. Вып. 2. С. 303–314.
2. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 549 с.
3. *Levi-Civita T.* Sulla stabilita delle lavagna a cavalletto // Period. Mathem. 1924. S.IV.V.IV. P. 59–73.
4. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: НИЦ "РХД", ИКИ, 2011. 302 с.
5. *Сумбатов А.С., Юнин Е.К.* Избранные задачи механики систем с сухим трением. М.: Физматлит, 2013, 200 с.
6. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Erdakova N.N.* Dynamics of a body sliding on a rough plane and supported at three points // Theor. Appl. Mech. 2016. V. 43. № 2. P. 169–190.
7. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Динамика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.