УДК 539.3:534.1

СТРАННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ТЕЛА С ЗАТУПЛЕННЫМ ПИКОМ

© 2019 г. С. А. Назаров*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

** e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Поступила в редакцию 24.08.2018 г.
После доработки 18.12.2018 г.
Принята к публикации 25.12.2018 г.

Острие пика на поверхности упругого тела Ω порождает непрерывный спектр, провоцирующий волновые процессы в конечном объеме (“черные дыры” для упругих волн). Спектр тела Ω^h с затупленным пиком дискретный, но входящие в него нормальные собственные числа приобретают “странное поведение” при стремлении к нулю длины h обломанного кончика. В разных ситуациях обнаружены собственные числа, не покидающие малой окрестности фиксированной точки или наоборот ниспадающие вдоль вещественной оси с большой скоростью, но плавно опускающиеся на нижний порог непрерывного спектра тела Ω. Может случиться и хаотичное блуждание собственных чисел выше второго порога. Обнаружен новый механизм формирования непрерывного спектра тела Ω с острием из семейства дискретных спектров тел Ω^h с затупленным пиком, $h > 0$.

Ключевые слова: затупленный пик, дискретный и непрерывный спектр, асимптотика, “мигающие” и “планирующие” собственные частоты

DOI: 10.1134/S0032823519020115

1. Тело с пиком. Деформируемое тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничено поверхностью $\partial\Omega$, гладкой (класса C^∞ для простоты) всюду кроме точки $\mathbb{O}$, начала декартовых координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. В окрестности этой точки тело имеет форму пика (левая часть фигуры 1)

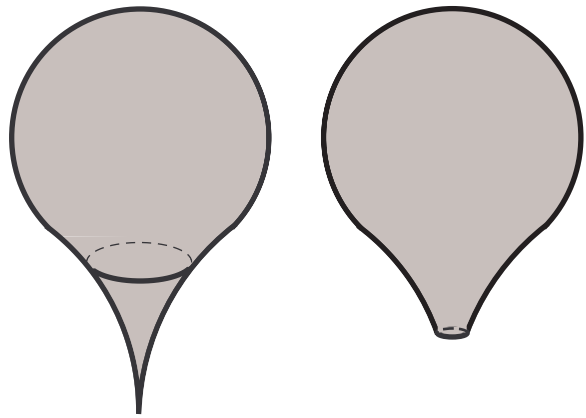
$$\Pi^d = \{x = (y, z) : z = x_3 \in (0, d),\ \eta := z^{-m} y \in \omega \subset \mathbb{R}^2\} \tag{1.1}$$

Здесь $d > 0$ – длина пика (1.1), $m \geq 1$ – показатель заострения, а ω – эталонное сечение, ограниченное простым замкнутым гладким контуром $\partial\omega$. Масштабированием сведем характерный размер области ω к единице и сделаем декартовы координаты и геометрические параметры безразмерными.

Рассмотрим задачу о гармонических во времени упругих колебаниях анизотропного и однородного тела, записанную в краткой форме

$$Lu = \Lambda u \text{ в } \Omega, \quad Bu = 0 \text{ на } \partial\Omega \backslash \mathbb{O} \tag{1.2}$$

При этом u – вектор смещений, $\Lambda = \rho\gamma^2$ – спектральный параметр, $\gamma \geq 0$ – частота колебаний, $\rho > 0$ – плотность материала, $n = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней



Фиг. 1

нормали, а дифференциальные операторы L и B второго и первого порядков соответственно выражаются через декартовы компоненты σ_{jk} тензора напряжений

$$(Lu)_j = -\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{kj}(u), \quad (Bu)_j = \sum_{k=1,2,3} n_k \sigma_{kj}(u)$$

Установлено [1–3], что при $m \in [1,2)$ спектр задачи (1.2) дискретный, т.е. состоит из нормальных собственных чисел (СЧ) конечных кратностей с единственной точкой сгущения на бесконечности, однако при $m \geq 2$ спектр приобретает непрерывную компоненту $[\Lambda^\dagger, +\infty)$. В рассматриваемом далее случае

$$m = 2$$

точка отсечки $\Lambda^\dagger$ положительна, но $\Lambda^\dagger = 0$ при $m > 2$. Непрерывный спектр порождает волновые процессы в конечном объеме (1.1), известные [4–6] в инженерной практике как “черные дыры” для упругих и акустических волн. Вместе с тем, в реальности идеальное острие недостижимо, и далее изучается задача

$$Lu^h = \Lambda^h u^h \text{ в } \Omega^h, \quad Bu^h = 0 \text{ на } \partial\Omega^h \tag{1.3}$$

о колебаниях тела с затупленным пиком (правая часть фигуры 1)

$$\Omega^h = \Omega \setminus \overline{\Pi^h}, \quad h \ll d \tag{1.4}$$

Поверхность $\partial\Omega^h$ липшицева, а значит, у задачи (1.3) при $h > 0$ формируется полностью дискретный спектр

$$0 = \Lambda_1^h = \ldots = \Lambda_6^h < \Lambda_7^h \leq \Lambda_8^h \leq \ldots \leq \Lambda_p^h \leq \ldots \to +\infty \tag{1.5}$$

Шесть нулевых СЧ отвечают смещениям тела (1.4) как жесткого целого.

Далее исследуется асимптотика при $h \to +0$ положительных членов последовательности (1.5), среди которых выявлены “малоподвижные”, “планирующие” и “блуждающие” СЧ (разд. 5, 8 и 9 соответственно). Кроме того, описан (разд. 8) новый способ формирования непрерывного спектра $[\Lambda^\dagger, +\infty)$ из семейства дискретных спектров (1.5): всякая точка $\Lambda > \Lambda^\dagger$ становится СЧ задачи (1.4) для почти периодической в логарифмическом масштабе $|\ln h|$ бесконечно малой последовательности $\{h_n(\Lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, однако обычно лежит вне спектра (1.5) в промежутках между критическими длинами $h_n(\Lambda)$ и $h_{n+1}(\Lambda)$. Иными словами, выше порога $\Lambda^{\dagger}$ непрерывного спектра наблюдается эффект “мигания” СЧ при уменьшении длины обломка Π^h и восстановлении идеального острия (разд. 7).

2. Асимптотическое поведение упругих полей в пике. Поскольку диаметр $O(\zeta^2)$ сечения

$$\omega^{\zeta} = \{x = (y, z) \in \Pi^d : z = \zeta\}, \quad \zeta > 0 \tag{2.1}$$

много меньше расстояния $\zeta \ll d$ до вершины $\mathcal{O}$, применим процедуру понижения размерности [1–7], в которой удобно использовать матричную форму [8–10] записи определяющих соотношений теории упругости. Вектор смещений u представим как столбец $(u_1, u_2, u_3)^{\top}$ в фиксированной системе координат x; здесь $\top$ — знак транспонирования и u_j — проекция вектора на ось x_j, $j = 1, 2, 3$. Закон Гука

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u)$$

включает симметричную положительно определенную постоянную (6×6)-матрицу A упругих модулей и связывает столбец напряжений

$$\sigma(u) = (\sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sqrt{2}\sigma_{12}(u), \sqrt{2}\sigma_{13}(u), \sqrt{2}\sigma_{23}(u), \sigma_{33}(u))^{\top} \tag{2.2}$$

со столбцом деформаций такого же строения

$$\varepsilon(u) = D(\nabla_x)u$$

$$D(\nabla_x)^{\top} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 & 2^{-1/2}\partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

$$\nabla_x = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Множители $2^{1/2}$ и $2^{-1/2}$ введены в определения (2.2) и (2.3) для того, чтобы уравнять естественные нормы тензоров второго ранга и изображающих их столбцов высотой шесть.

Асимптотическое разложение поля смещений вблизи вершины пика имеет вид [1, 3, 7]

$$u(y, z) = U^{-2}(z) + U^{-1}(y, z) + U^{0}(y, z) + U^{-1}(y, z) + U^{-2}(y, z) + \tilde{u}(y, z) \tag{2.4}$$

$$U^{-2}(z) = \sum_{j=1,2} e_{(j)} w_j(z), \quad U^{-1}(y, z) = e_{(3)}\left(w_3(z) - \sum_{j=1,2} y_j \frac{\partial w_1}{\partial z}(z)\right) + w_4(z)\theta(y) \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \theta(y) = 2^{-1/2}(y_1 e_{(2)} - y_2 e_{(1)}) = z^2\theta(\eta) \\ w_j(z) = z^{\kappa-5/2}\mathcal{W}_j, \quad j = 1, 2, \quad w_3(z) = z^{\kappa-3/2}\mathcal{W}_3, \quad w_4(z) = z^{\kappa-7/2}\mathcal{W}_4 \end{gathered} \tag{2.6}$$

Свойства малого остатка $\tilde{u}$ будут описаны в разд. 3 и 5, $e_{(k)}$ — орт оси x_k, $\theta(y)$ — поворот вокруг оси x_3, а комплексные число $\kappa \in \mathbb{C}$ и столбец $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \mathcal{W}_4)^{\top} \in \mathbb{C}^4$ подлежат определению вместе со слагаемыми суммы (2.4)

$$U^p(y, z) = z^{p+2+\kappa-5/2}\mathcal{U}^p(\eta), \quad p = 0, 1, 2 \tag{2.7}$$

Причина введения вычитаемого 5/2 в показатели степеней переменной z станет понятной в разд. 3. Согласно равенствам

$$\nabla_y(z^\tau \mathcal{V}(z^{-2}y)) = z^{\tau-2}\nabla_\eta \mathcal{V}(\eta)\Big|_{\eta=z^{-2}y}$$
$$\partial_z(z^\tau \mathcal{V}(z^{-2}y)) = z^{\tau-1}\left(\tau\mathcal{V}(\eta) - 2\eta^\top\nabla_\eta\mathcal{V}(\eta)\right)\Big|_{\eta=z^{-2}y}$$

градиент-оператор $\nabla_y = (\partial_1, \partial_2)^\top$ понижает показатель однородности τ сложной функции $z^\tau\mathcal{V}(z^{-2}y)$ на два, а дифференцирование по продольной координате z – только на единицу.

Обозначим $\nu = (\nu_1, \nu_2)^\top$ единичный вектор внешней нормали к контуру $\partial\omega \subset \mathbb{R}^2$. Трехмерная нормаль на поверхности $\Gamma^d = \{x : z \in (0, d), \eta \in \omega\}$ принимает вид

$$n = n_0^{-1}(\nu_1, \nu_2, -2z\eta^\top\nu)^\top, \quad n_0 = (1 + 4z^2\left|\eta^\top\nu\right|^2)^{1/2}$$

Матричные дифференциальные операторы $L(\nabla_x)$ и $B(x, \nabla_x)$ из уравнений (1.2) допускают расщепления

$$L = L^0 + L^1 + L^2, \quad n_0^{1/2}B = B^0 + B^1 + B^2$$

$$L^0(\nabla_y) = D(-\nabla_y, 0)^\top AD(\nabla_y, 0), \quad L^2(\partial_z) = D(0, -\partial_z)^\top AD(\partial_z, 0)$$

$$L^1(\nabla_y, \partial_z) = D(-\nabla_y, 0)^\top AD(0, \partial_z) + D(0, -\partial_z)^\top AD(0, \nabla_y) \tag{2.8}$$

$$N^0(y, z, \nabla_y) = D(\nu(z^{-2}y), 0)^\top AD(\nabla_y, 0), \quad N^2(y, z, \partial_z) - 2zD(0, z^{-2}y^\top\nu(z^{-2}y))AD(0, \partial_z)$$

$$N^1(y, z, \nabla_y, \partial_z) = D(\nu(z^{-2}y), 0)^\top AD(0, \partial_z) - 2zD(0, z^{-2}y^\top\nu(z^{-2}y))^\top AD(\nabla_y, 0)$$

При этом операторы L^q и B^q понижают порядки однородностей вектор-функций (2.7) на $q - 4$ и $q - 2$ соответственно.

Подставим разложения (2.4) и (2.8) в уравнения (1.2) и соберем члены с одинаковыми порядками относительно переменной z. В результате получим последовательность плоских задач теории упругости на сечениях пика (1.1)

$$\begin{aligned} L^0U^q &= F^q := -L^1U^{q-1} - L^2U^{q-2} + \Lambda\delta_{2,q}U^{-2} \text{ на } \omega^z \\ N^0U^q &= G^q := -B^1U^{q-1} - B^2U^{q-2} \text{ на } \partial\omega^z \end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь $q = -2, \ldots, 2$, $U^p = 0$ при $p < -2$, $\delta_{p,q}$ – символ Кронекера.

Вектор-функции (2.5) удовлетворяют задачам (2.9) при $q = -2$ и $q = -1$ соответственно. Проверено [1, 7], что поочередное решение задач (2.9), точнее, соблюдение условий их разрешимости

$$\begin{aligned} &\int_{\omega^z} F_k^q(y, z)dy + \int_{\partial\omega^z} G_k^q(y, z)ds_y = 0, \quad k = 1, 2, 3 \\ &\int_{\omega^z} \theta(y)^\top F^q(y, z)dy + \int_{\partial\omega^z} \theta(y)^\top G^q(y, z)ds_y = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^\top$. Для ее описания частично воспроизведем выкладки из [10], гл. 5, и [1, 7].

При учете связи

$$D(\nabla_y, 0)U^{-1} + D(0, \partial_z)U^{-2} = 0$$

правые части задачи (2.9) с индексом $q = 0$ принимают вид

$$\begin{gathered} F^0 = D(\nabla_y, 0)^\top AD(0, \partial_z)U^{-1}, \quad G^0 = -D(\nu, 0)^\top AD(0, \partial_z)U^{-1} \\ D(0, \partial_z)U^{-1}(y, z) = \mathbf{Y}(y)\mathbf{D}(\partial_z)w(z) \\ \mathbf{Y}(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2/2 & y_1/2 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad \mathbf{D}(\partial_z) = \begin{pmatrix} \partial_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_z \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.11}$$

При помощи формулы интегрирования по частям проверено ([10], гл. 5, и [1, 7]), что выполнены все условия разрешимости (2.10) задачи (2.9) с индексом $q = 0$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\begin{gathered} U^0(y, z) = \mathbf{X}(y, z)\mathbf{D}(\partial_z)w(z), \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3, \mathbf{X}^4) \\ \mathbf{X}^l(y, z) = z^4 X^l(z^{-2}y), \quad l = 1, 2, 4, \quad \mathbf{X}^3(y, z) = z^2 X^3(z^{-2}y) \end{gathered} \tag{2.12}$$

Матрица $\mathbf{X}$ размером 4×3 находится из разрешимой задачи

$$L^0\mathbf{X} = D(\nabla_y, 0)^\top A\mathbf{Y} \text{ на } \omega^z, \quad B^0\mathbf{X} = -D(\nu, 0)^\top A\mathbf{Y} \text{ на } \partial\omega^z \tag{2.13}$$

Установлено [1, 7], что первые два ($k = 1, 2$) условия разрешимости задачи (2.9) с индексом $q = 1$ выполнены автоматически, а два остальных условия превращаются в две нижние строки искомой системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{D}(-\partial_z)^\top \mathbf{A}(z)\mathbf{D}(\partial_z)w(z) = \Lambda\mathbf{T}z^4 w(z), \quad z > 0 \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}(z) = \int_{\omega^z} \mathbf{Y}(y)^\top A(D(\nabla_y, 0)\mathbf{X}(y, z) + \mathbf{Y}(y))dy = \mathbf{D}(z^2)^\top \mathbf{A}(1)\mathbf{D}(z^2) \\ \mathbf{T} = \operatorname{diag}\{|\omega|, |\omega|, 0, 0\}, \quad \mathbf{D}(z^2) = \operatorname{diag}\{z^4, z^4, z^2, z^2\} \end{gathered} \tag{2.15}$$

Две верхние строки системы (2.14), включающие спектральный параметр Λ и площадь $|\omega|$ области $\omega \subset \mathbb{R}^2$, – результат выполнения первых двух условий разрешимости (2.10) задачи (2.9) с индексом $q = 2$. Доказано [1], что (4×4)-матрица $\mathbf{A}(1)$ симметрична и положительно определена.

Предельная одномерная задача на оси пика получена. В случае изотропного материала с модулем Юнга E и модулем сдвига μ имеем

$$\mathbf{A}(1) = \begin{pmatrix} EI_{11} & EI_{12} & -E|\omega|P_1 & 0 \\ EI_{12} & EI_{22} & -E|\omega|P_2 & 0 \\ -E|\omega|P_1 & -E|\omega|P_2 & E|\omega| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu G/2 \end{pmatrix}$$

При этом P, I и G – центр тяжести, тензор инерции и жесткость кручения области $\omega \subset \mathbb{R}^2$ (см., например, [10], гл. 5 и приложение G в книге [11]). Задача (2.9) распадается на плоскую и антиплоскую задачи для плоского изотропного тела.

3. Упругие волны в пике. Разобьем матрицу $\mathbf{A}(z)$ на блоки размером 2×2 и введем (2×2)-матрицу $\mathbf{M}(z)$, также симметричную и положительно определенную:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\#\#} & \mathbf{A}_{\#\bullet} \\ \mathbf{A}_{\bullet\#} & \mathbf{A}_{\bullet\bullet} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{M} = \mathbf{A}_{\#\#} - \mathbf{A}_{\#\bullet}\mathbf{A}_{\bullet\bullet}^{-1}\mathbf{A}_{\bullet\#} \\ \mathbf{M}(z) = z^4\mathbf{M}(1)z^4 \end{matrix} \tag{3.1}$$

Исключим неизвестные $w_\bullet = (w_3, w_4)^\top$ из системы (2.14) и образуем систему двух уравнений для вектор-функции $w_\# = (w_1, w_2)^\top$

$$-\partial_z^2\mathbf{M}(z)\partial_z^2 w_\#(z) = \Lambda z^4 |\omega| w_\#(z), \quad z > 0 \tag{3.2}$$

Пусть $0 < \mathbf{m}_1 \le \mathbf{m}_2$ – СЧ матрицы $\mathbf{M}(1)$, а $\mathcal{W}_\#^1$ и $\mathcal{W}_\#^2$ – соответствующие ортонормированные собственные векторы (СВ). Показатели однородности $\kappa - 5/2$ функций w_1 и w_2 из списка (2.6) подобраны так, что характеристические биквадратные уравнения для системы (3.2) эйлеровского типа принимают простой вид

$$\mathbf{m}_j(4\kappa^2 - 49)(4\kappa^2 - 25) = 16\Lambda|\omega| \tag{3.3}$$

При условии

$$\Lambda > \Lambda_j^\dagger := \mathbf{m}_j \frac{1225}{16|\omega|} \tag{3.4}$$

уравнение (3.3) имеет два вещественных и два чисто мнимых корня

$$\kappa_j^{i\pm} = \pm i\sqrt{K_j^-}, \quad \kappa_j^{r\pm} = \pm\sqrt{K_j^+}, \quad K_j^\pm = \sqrt{9 + \Lambda\frac{|\omega|}{\mathbf{m}_j}} \pm \frac{37}{4} > 0 \tag{3.5}$$

В случае $\Lambda < \Lambda_j^\dagger$ все корни уравнения (3.3) вещественные.

Корни (3.5) и СВ $\mathcal{W}_\#^j$ формируют решения

$$w_{(j\#)}^{b\pm}(z) = z^{\kappa_j^{\flat\pm} - 5/2}\mathcal{W}_\#^j, \quad \flat = i, r \tag{3.6}$$

укороченной системы уравнений (3.2), но проверенная ([7], разд. 2, § 3) формула

$$w_{(j\bullet)}^{b\pm}(z) = \int \mathbf{A}_{\bullet\bullet}(z)^{-1}\mathbf{A}_{\bullet\#}(z)\partial_z^2 w_{(j\#)}^{b\pm}(z)dz \tag{3.7}$$

восстанавливает недостающую часть вектора $w_{(j)}^{b\pm}$ высотой четыре.

Еще два решения системы (2.14)

$$w^{30} = (0,0,1,0)^\top, \quad w^{40} = (0,0,0,1)^\top \tag{3.8}$$

подчинены соотношениям (2.6) с показателями $\kappa_3 = 3/2$, $\kappa_4 = 7/2$ и связаны с продольным жестким смещением пика и поворотом вокруг оси z. Наконец, решения

$$w^{p1}(z) = z^{-\kappa_p - 5/2}(\mathcal{W}_1^{p1}, \mathcal{W}_2^{p1}, z\mathcal{W}_3^{p1}, z^{-1}\mathcal{W}_4^{p1})^\top, \quad p = 3, 4 \tag{3.9}$$

отвечают продольной силе и крутящему моменту. При исследовании волновых процессов решения (3.8) и (3.9) не играют существенной роли.

Далее рассматриваем две принципиально разные ситуации

$$\Lambda \in (\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger), \quad \Lambda^\dagger := \Lambda_1^\dagger < \Lambda_2^\dagger \tag{3.10}$$

$$\Lambda \in (\Lambda_2^\dagger, +\infty), \quad \Lambda_1^\dagger \le \Lambda_2^\dagger \tag{3.11}$$

В случае (3.11) выполнены оба ($j = 1, 2$) требования (3.4), а значит, в списке (3.6) имеются четыре решения с комплексными показателями степени переменной z, но в случае (3.10) – только два, так как все корни уравнения (3.3) при $j = 2$ вещественные.

При $\Lambda < \Lambda^{\dagger}$ комплексных корней нет вообще, а на порогах $\Lambda = \Lambda_j^{\dagger}$ нулевые корни уравнений (3.3) кратные, т.е. согласно правилу решения дифференциальных уравнений эйлеровского типа компоненты (2.6) вектор-функции w приобретают линейную зависимость от $\ln z$. Пороговые значения $\Lambda = \Lambda_j^{\dagger}$ далее не анализируются, поскольку при них обсуждаемые эффекты исчезают.

Каждое решение w системы (2.14) порождает [3, 7] трехмерное поле w, допускающее представление (2.4), например, в пике $\Pi_{3d/4}$ и удовлетворяет задаче (1.2), суженной на $\Pi_{d/2}$ и $\Gamma_{d/2}$ (уменьшение размеров до $3d/4$ и $d/2$ необходимо). Согласно формулам (2.5) и (2.12) столбец деформаций принимает вид

$$\varepsilon(u; y, z) = (\mathbf{Y}(y) + D(\nabla_y, 0)\mathbf{X}(y, z))\mathbf{D}(\partial_z)w(z) + \tilde{\varepsilon}(u; y, z) \tag{3.12}$$

Оценки остатков в представлениях (3.12) и (2.4) зависят от инициирующего поле смещений u вектора w, в частности, от показателя κ в соотношениях (2.6) для его компонент. Обозначим $u_{(j)}^{i\pm}$ поле смещений, порожденное мнимыми корнями (3.5) биквадратных уравнений (3.3). Далее понадобятся известные [3, 7] оценки

$$\begin{gathered} \left|u_{(j)}^{i\pm}(y, z) - w_{(j)1}^{i\pm}(z)e_{(1)} - w_{(j)2}^{i\pm}(z)e_{(2)}\right| \le cz^{-3/2}, \quad (y, z) \in \overline{\Pi_{d/2}} \\ \left|\tilde{\varepsilon}(u_{(j)}^{i\pm}; y, z)\right| \le cz^{-3/2}, \quad (y, z) \in \overline{\Pi_{d/2}} \end{gathered} \tag{3.13}$$

Аналогичные оценки верны и для полей $u_{(j)}^{r\pm}$, инициированных вещественными корнями, однако множитель $z^{-3/2}$ в мажорантах превращается в множитель $z^{\kappa_j^{r\pm}-3/2}$.

Формулы (3.13) и (2.15), (3.1) для столбца $\tilde{\varepsilon}$ и матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ соответственно позволяют вычислить функционал упругой энергии на сечении (2.1)

$$\begin{aligned} E(u; \omega^z) &= \frac{1}{2}\int_{\omega^z} \overline{\varepsilon(u; y, z)}^{\top}\sigma(u; y, z)dy = \\ &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{D}(\partial_z)w(z)})^{\top}\int_{\omega^z}(D(\nabla_y, 0)\mathbf{X}(y, z) + \mathbf{Y}(y))^{\top}A(D(\nabla_y, 0)\mathbf{X}(y, z) + \\ &\qquad + \mathbf{Y}(y))dy\mathbf{D}(\partial_z)w(z) + \ldots = \\ &= \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{D}(\partial_z)w(z)})^{\top}\mathbf{A}(z)\mathbf{D}(\partial_z)w(z) + \ldots = \frac{1}{2}\overline{\partial_z^2 w_{\#}(z)}\mathbf{M}(z)\partial_z^2 w_{\#}(z) + \ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

Многоточие заменяет младшие по порядку слагаемые при $z \to +0$.

Таким образом, погонная энергия (3.14), вычисленная для вектор-функции w с компонентами (2.6), имеет порядок $z^{-1+2\operatorname{Re}\kappa}$, т.е. интеграл энергии в пике (1.1)

$$E(u; \Pi^d) = \int_0^d E(u; \omega^z)dz \tag{3.15}$$

сходится при $\operatorname{Re}\kappa > 0$, но заведомо расходится при $\operatorname{Re}\kappa < 0$. Соответственно поле u и вектор w называем энергетическими и неэнергетическими. При чисто мнимом показателе $\kappa_j^{i\pm}$ величина (3.14) принимает [7] вид

$$E(u_{(j)}^{i\pm}; \omega^z) = \frac{1}{2z}\left(\frac{25}{4} + \left|\kappa_j^{i\pm}\right|^2\right)\left(\frac{49}{4} + \left|\kappa_j^{i\pm}\right|^2\right)\mathbf{m}_j\left|\mathcal{W}_{\#}^{j\pm}\right|^2 + \ldots \tag{3.16}$$

и также обеспечивает расходимость интеграла (3.15). Погонная упругая энергия (3.16) обладает примечательным свойством, характерным для волновых процессов: упругая энергия $E(u^{i\pm}_{(j)}; \Pi^{2\rho} \setminus \Pi^{\rho})$, запасенная фрагментом пика Π^d, не зависит в главном от расстояния ρ до вершины $\mathcal{O}$. Иными словами, волна $u^{i\pm}_{(j)}$ переносит энергию и потому называется распространяющейся. На основе принципов излучения Зоммерфельда и Умова—Мандельштама (см. [12], гл. 1, [13, 14] и др.) показано ([7], § 4), что волны $u^{i-}_{(j)}$ распространяются в сторону к вершине $\mathcal{O}$, а волны $u^{i+}_{(j)}$ — из вершины в сторону массивной части тела. Эти волны называются уходящими и приходящими соответственно.

4. Матрица рассеяния и коэффициент рассеяния; захваченные волны. Вычислен ([7], разд. 1, § 4) осредненный вектор Умова [15], проекция которого на ось z пропорциональна симплектической (полуторалинейной и антиэрмитовой) форме переноса энергии

$$Q_z(u,v) = \sum_{j=1,2,3} \int_{\omega^z} (\overline{v_k(y,z)}\sigma_{3k}(u;y,z) - u_k(y,z)\overline{\sigma_{3k}(v;y,z)})dy \tag{4.1}$$

Показано ([7], разд. 1, § 4), что

$$Q_0(u^{i\pm}_{(j)}, u^{i\pm}_{(j)}) = \lim_{z\to+0} Q_z(u^{i\pm}_{(j)}, u^{i\pm}_{(j)}) = \pm 72i \left|\kappa^{i\pm}_j\right| \mathbf{m}_j \left|\mathcal{W}^j_\#\right|^2 \tag{4.2}$$

Нормируем СВ $\mathcal{W}^j_\#$ матрицы $\mathbf{M}(1)$ так, чтобы правая часть соотношения (4.2) стала равной $\pm i$. В результате приходим к условиям ортогональности и нормировки

$$Q_0(u^{i\psi}_{(j)}, u^{i\tau}_{(k)}) = \pm i\delta_{\psi,\tau}\delta_{j,k} \quad (j,k = 1,2,\ \psi,\tau = \pm) \tag{4.3}$$

Поля, порожденные разными чисто мнимыми показателями $i\kappa_{(1)}$ и $i\kappa_{(2)}$, ортогональны одно другому в смысле формулы (4.3) потому, что подынтегральное выражение приобретает осциллирующий множитель $e^{i(\kappa_{(1)}-\kappa_{(2)})z}$, но сам интеграл (4.1) должен иметь предел, являясь фрагментом поверхностного интеграла в формуле Грина для решений задачи (1.2) в пике $\Pi^{d/2}$. По аналогичной причине $Q_0(u^{r\pm}_{(j)}, u^{r\pm}_{(j)}) = 0$ для энергетических и неэнергетических упругих полей.

Определим дифракционные характеристики тела Ω с пиком. Сначала обратимся к ситуации (3.11), когда существуют две пары $u^{i\pm}_{(1)}$ и $u^{i\pm}_{(2)}$, т.е. $j,k = 1,2$ в формуле (4.3). Доказано ([16], гл. 5, [17], § 3, [7], § 5), что свойства (4.3) и $u^{i-}_{(j)} = \overline{u^{i+}_{(j)}}$, упомянутых волн обеспечивают унитарность и симметричность (2×2)-матрицы рассеяния S, составленной из коэффициентов разложений специальных решений задачи (1.2)

$$Z^j(x) = \chi(x)u^{i+}_{(j)}(x) + \chi(x)\sum_{k=1,2} S_{jk}u^{i-}_{(k)}(x) + \tilde{Z}^j(x), \quad j = 1,2 \tag{4.4}$$

При этом χ — гладкая срезающая функция, равная единице на $\Pi^{d/4}$ и нулю вне $\Pi^{d/2}$. Остаток $\tilde{Z}^j$ попадает в энергетическое гильбертово пространство $\mathcal{H}(\Omega)$, которое получается замыканием линейного пространства $C^\infty_c(\overline{\Omega}\setminus\mathcal{O})^3$ (бесконечно дифференцируемые функции, обращающиеся в нуль около точки $\mathcal{O}$) по норме

$$\|u;\mathcal{H}(\Omega)\| = (2E(u;\Omega) + \|u;L^2(\Omega)\|^2)^{1/2}$$

Более точная информация об остатках будет указана в разд. 5.

Установлено ([10], гл. 3, § 3, [1], § 3), что $\mathcal{H}(\Omega)$ шире пространства Соболева $H^1(\Omega)^3$ и вложение $\mathcal{H}(\Omega)^3 \subset L^2(\Omega)^3$ не является компактным. Для энергетических полей выполнено включение $\chi u_{(k)}^{r+} \in \mathcal{H}(\Omega)$, но неэнергетические поля $\chi u_{(k)}^{r-}$ и распространяющиеся волны $\chi u_{(j)}^{i\pm}$, не принадлежат пространству $\mathcal{H}(\Omega)$.

В ситуации (3.10) имеется одна пара распространяющихся волн $u_{(1)}^{i\pm}$, и поэтому в формулах (4.3) и (4.4) фигурируют индексы $j, k = 1$, а матрица рассеяния вырождается в скаляр $S = S_{11}$:

$$Z(x) = \chi(x)(u_{(1)}^{i+}(x) + Su_{(1)}^{i-}(x)) + \tilde{Z}(x) \tag{4.5}$$

Поля (4.4) и (4.5) порождены волнами, которые приходят из вершин $\mathbb{O}$ в тело Ω, но затем рассеиваются в нем и возвращаются в вершину как уходящие волны. Закон сохранения энергии обеспечивает упомянутые свойства матрицы рассеяния, а в ситуации (3.10) показывает, что коэффициент рассеяния S лежит на единичной окружности $\mathbb{S}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$

$$S = e^{i\Theta_1} \in \mathbb{S}, \quad \Theta_1 \in (-\pi, \pi]$$

Решения задачи (1.2) из энергетического класса $\mathcal{H}(\Omega)$ называются захваченными упругими волнами в теле Ω. При геометрической и физической симметрии (например, изотропное тело с круговыми сечениями, перпендикулярными оси z) найдена [1] неограниченная последовательность частот собственных колебаний тела Ω, причем соответствующие собственные моды экспоненциально затухают при $x \to \mathbb{O}$. Хотя конкретных примеров до сих пор не построено [7], в принципе у задачи (1.2) могут быть собственные вектор-функции, которые содержат в представлении на $\Pi^{d/2}$ нетривиальные энергетические поля и потому характеризуются степенным поведением при $x \to \mathbb{O}$. Указанные захваченные волны именуем экспоненциальными и степенным соответственно.

5. “Малоподвижные” собственные частоты. Захваченная волна, т.е. собственная вектор-функция $u^0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ задачи (1.2), отвечающая спектральному параметру $\Lambda^0 > 0$, оставляет малые невязки в краевых условиях на торце ω^h обломанного пика, что обеспечивает существование СЧ $\Lambda_{p(h)}^h$ из последовательности (1.5) в непосредственной близости от Λ^0

$$\left|\Lambda_{p(h)}^h - \Lambda^0\right| \le c(\Lambda^0)\rho_h, \quad h \in (0, h(\Lambda^0)] \tag{5.1}$$

При этом $\rho_h = e^{-\beta(\Lambda^0)/h}$ или $\rho_h = h^{\kappa_{\min}(\Lambda^0)}$ в случаях экспоненциальной или степенной захваченной волны, $h(\Lambda^0)$, $c(\Lambda^0)$ и $\beta(\Lambda^0)$ – некоторые положительные величины, зависящие от Λ^0, но не от h, а $\kappa_{\min}(\Lambda^0)$ – наименьший положительный корень биквадратных уравнений (3.3).

Поясним как выводится неравенство (5.1). Снабдим энергетическое пространство $\mathcal{H}(\Omega^h) = H^1(\Omega^h)^3$ скалярным произведением

$$\left\langle u^h, v^h \right\rangle_h = (AD(\nabla)u^h, D(\nabla)v^h)_{\Omega^h} + (u^h, v^h)_{\Omega^h} \tag{5.2}$$

Здесь $(\,,)_{\Omega^h}$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega^h)$, а нужные свойства полуторалинейной формы (5.2) обеспечены [18] неравенством Корна в липшицевой области (1.4). Формула

$$\left\langle \mathcal{K}^h u^h, v^h \right\rangle_h = (u^h, v^h)_{\Omega^h}, \quad u^h, v^h \in \mathcal{H}(\Omega^h) \tag{5.3}$$

определяет положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{K}^h$ в $\mathcal{H}(\Omega^h)$. Согласно определениям (5.3) и (5.2) вариационная формулировка задачи (1.3)

$$(AD(\nabla)u^h, D(\nabla)v^h)_{\Omega^h} = \Lambda^h(u^h, v^h)_{\Omega^h}, \quad u^h \in \mathcal{H}(\Omega^h)$$

равносильна абстрактному уравнению

$$\mathcal{K}^h u^h = K^h u^h \text{ в } \mathcal{H}(\Omega^h)$$

с новым спектральным параметром

$$K^h = (1 + \Lambda^h)^{-1} \tag{5.4}$$

Поскольку вложение $\mathcal{H}(\Omega^h) \subset L^2(\Omega^h)^3$ компактно при $h > 0$, в силу общих результатов ([19], гл. 10) существенный спектр оператора $\mathcal{K}^h$ – единственная точка $K = 0$, а дискретный спектр – бесконечно малая положительная последовательность

$$1 = K_1^h = \ldots = K_6^h > K_7^h \geq K_8^h \geq \ldots K_p^h \geq \ldots \to +0, \tag{5.5}$$

образованная из последовательности (1.5) по правилу (5.4).

Утверждение

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^h \in \mathcal{H}(\Omega^h)\backslash\{0\}, \quad \mathbf{K}^h \in \mathbb{R}_+, \quad \left\|\mathcal{K}^h\mathbf{u}^h - \mathbf{K}^h\mathbf{u}^h; \mathcal{H}(\Omega^h)\right\| = \delta_h \left\|\mathbf{u}^h; \mathcal{H}(\Omega^h)\right\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \text{найдется СЧ } K_{p(h)}^h, \text{ для которого} \left|K_{p(h)}^h - \mathbf{K}^h\right| \leq \delta_h\end{gathered} \tag{5.6}$$

известно [20] как лемма о “почти собственных” числах и обеспечено ([19], гл. 6) спектральным разложением резольвенты.

Пусть $u^0 \in \mathcal{H}(\Omega)$ – захваченная волна, $\mathbf{u}^h$ – ее сужение на Ω^h и $\mathbf{K}^h = (1 + \Lambda^0)^{-1}$. При помощи одного из определений гильбертовой нормы находим

$$\begin{aligned}\delta_h &:= \left\|\mathcal{K}^h\mathbf{u}^h - \mathbf{K}^h\mathbf{u}^h; \mathcal{H}(\Omega^h)\right\| = \sup\left|\left\langle \mathcal{K}^h\mathbf{u}^h - \mathbf{K}^h\mathbf{u}^h, v^h\right\rangle_h\right| = \\ &= (1 + \Lambda^0)^{-1} \sup\left|(AD(\nabla)u^0, D(\nabla)v^h)_{\Omega^h} - \Lambda^0(u^0, v^h)_{\Omega^h}\right| = \\ &= (1 + \Lambda^0)^{-1} \sup\left|\int_{\omega^h} \overline{v^h(y, h)}^\top D(e_{(3)})^\top AD(\nabla)u^0(y, h)dy\right|\end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в $\mathcal{H}(\Omega^h)$, т.е. $\left\|v^h; \mathcal{H}(\Omega^h)\right\| \leq 1$, а при переходе к интегралу по торцу ω^h была применена формула интегрирования по частям и учтено, что u^0 – решение задачи (1.2).

Для оценки величины (5.7) применим известное [1, 21] весовое анизотропное неравенство Корна

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^h} \left(\sum_{j=1,2} \left(\left|\frac{\partial v_j^h}{\partial x_j}\right|^2 + \left|v_j^h\right|^2 + |x|^2 \left(\left|\frac{\partial v_j^h}{\partial x_3}\right|^2 + \left|\frac{\partial v_3^h}{\partial x_j}\right|^2 \right) \right) + \right. \\ &\left. + |x|^2 \left(\left|\frac{\partial v_1^h}{\partial x_2}\right| + \left|\frac{\partial v_2^h}{\partial x_1}\right|^2 \right) + \left|\frac{\partial v_3^h}{\partial x_3}\right|^2 + \frac{1}{|x|^2}\left|v_3^h\right|^2 \right) dx \leq c \left\|v^h; H(\Omega^h)\right\|^2\end{aligned} \tag{5.8}$$

и сопутствующие следовые неравенства

$$\begin{gathered}h\int\limits_{\omega^h}(\left|v_1^h\right|^2+\left|v_2^h\right|^2+h^{-2}\left|v_3^h\right|^2)dy\le c\left\|v^h;\mathcal{H}(\Omega^h)\right\|^2\\ h^{-1}\int\limits_{\omega^h}\left|v^h(y,h)-\overline{v}^h\right|^2dy\le c\left\|v^h;\mathcal{H}(\Omega^h)\right\|^2,\quad \overline{v}^h=\frac{1}{h^2|\omega|}\int\limits_{\omega^h}v^h(y,h)dy\end{gathered}\tag{5.9}$$

В силу формул (3.12) и (2.11), (2.12) вектор-функция

$$T^0(y,z)=D(e_{(3)})^\top AD(\nabla)u^0(x)$$

удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_{\omega^h}T_j^0(y,h)dy=0,\quad j=1,2,$$

которые позволяют в интеграле по ω^h из соотношения (5.7) произвести замену $v_j^h\mapsto v_j^h-\overline{v}_j^h$ и затем применить уточненное неравенство (5.9). Поскольку $u^0\in\mathcal{H}(\Omega^h)$ – полиномиальная захваченная волна, в ее представлении около вершины пика отсутствуют неэнергетические и распространяющиеся волны, но присутствуют энергетические волны. Таким образом, справедливо [3] соотношение

$$\left|T^0(y,z)\right|\le cz^{\kappa_{\min}(\Lambda^0)-5/2}\tag{5.10}$$

В итоге получаем оценку величины (5.7)

$$\begin{gathered}\delta_h\le(1+\Lambda^0)^{-1}\left\|T^0;L^2(\omega^h)\right\|\left(\left\|v_3^h;L^2(\omega^h)\right\|+\sum_{j=1,2}\left\|v_j^h-\overline{v}_j^h;L^2(\omega^h)\right\|\right)\le\\ \le C\left|\omega^h\right|^{1/2}h^{\kappa_{\min}(\Lambda^0)-5/2}h^{1/2}\left\|v^h;\mathcal{H}(\Omega^h)\right\|\le Ch^{\kappa_{\min}(\Lambda^0)}=:C\rho_h\end{gathered}$$

Наконец, утверждение (5.6) подтверждает справедливость оценки (5.1), так как

$$\begin{gathered}\left|K_{p(h)}^h-\mathbf{K}^h\right|\le C\rho_h\Rightarrow\left|\Lambda^0-\Lambda_{p(h)}^h\right|\le C\rho_h(1+\Lambda^0)(1+\Lambda_{p(h)}^h)\Rightarrow\\ \Rightarrow\left|\Lambda^0-\Lambda_{p(h)}^h\right|\le 2C\rho_h(1+\Lambda^0)\ \text{при условии}\ C\rho_h(1+\Lambda^0)\le 1/2\end{gathered}\tag{5.11}$$

Для экспоненциальных захваченных волн вычисления значительно упрощаются.

6. Пограничный слой вблизи обломанного кончика пика. Распространяющиеся волны $u_{(j)}^{i\pm}$ порождают вектор напряжений $T_{(j)}^{i\pm}=D(e_{(3)})^\top AD(\nabla)u_{(j)}^{i\pm}$, для которых мажоранта в оценке (5.10) превращается в $cz^{-5/2}$ и не позволяет доказать, что величина δ_h – бесконечно малая при $h\to+0$. Как обычно ([22], гл. 5 и гл. 16), для компенсации нежелательно большой невязки в краевом условии на ω^h приходится строить пограничный слой. Растяжение координат

$$x=(y,z)\mapsto\xi=(\xi',\xi_3)=(h^{-2}y,h^{-2}(z-h))$$

и формальный переход к $h=0$ трансформируют область (1.4) в полубесконечный цилиндр $\Xi=\omega\times\mathbb{R}_+$ с боковой поверхностью $\Gamma=\partial\omega\times\mathbb{R}_+$ и порождают задачу теории упругости

$$\begin{gathered}L(\nabla_\xi)W(\xi)=0,\quad \xi\in\Xi,\quad B(\xi',\nabla_\xi)W(\xi)=0,\quad \xi\in\Gamma\\ B^\omega(\nabla_\xi)W(\xi',0)=G(\xi'):=-D(e_{(3)})^\top AD(\nabla_\xi)W(\xi',0),\quad \xi'=(\xi_1,\xi_2)\in\omega\end{gathered}\tag{6.1}$$

В силу классического принципа Сен-Венана (см., например, [23] и ср. математическую формулировку принципа [16], гл. 5) задача (6.1) имеет единственное решение $W \in H^1(\Xi)^3$, затухающее при $\xi_3 \to +\infty$ с экспоненциальной скоростью, в том и только в том случае, если внешняя нагрузка на торце цилиндра самоуравновешена

$$\int_\omega d(\xi',0)^\top G(\xi')d\xi' = 0 \in \mathbb{R}^6$$
$$d(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 0 & -2^{-1/2}\xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 2^{-1/2}\xi_1 \\ 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Строение матрицы жестких смещений $d(\xi)$ согласовано со строением матриц D и $\mathbf{Y}$ из списков (2.3) и (2.11)

$$D(e_{(3)})d(\xi',0) = (D(\nabla_y,0)e_{(3)}y_1,\ D(\nabla_y,0)e_{(3)}y_2,\ \mathbf{Y}(\xi')) \tag{6.3}$$

Рассмотрим какое-либо решение w системы (2.14) и восстановим [3] по нему трехмерное поле смещений u в $\Pi^{d/2}$, главную часть невязки которого в краевом условии на ω^h нужно компенсировать слагаемым типа пограничного слоя и потому подчинить условию ортогональности (6.2). Представление (2.4) с начальными членами (2.5) дает соотношение

$$D(e_{(3)})^\top AD(\nabla)u(x) = \Sigma^0(y,z) + \Sigma^1(y,z) + \dots$$

$$\Sigma^p = D(e_{(3)})^\top A\Psi^p, \quad \Psi^p = D(\nabla_y,0)U^p + D(0,\partial_z)U^{p-1}$$

Вычислим интеграл (6.2). При учете формул (2.10), (2.11), (2.15) и (6.3) находим

$$\Sigma^0 = D(e_{(3)})^\top A(D(\nabla_y,0)\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{D}(\partial_z)w$$
$$\int_{\omega^h} \Sigma^0(y,h)d(y,0)dy = (0,0,(\mathbf{A}(z)\mathbf{D}(\partial_z)\,w(z))^\top\big|_{z=h}) \tag{6.4}$$

Два нулевых столбца в (6×6)-матрице (6.4) — следствие равенств (2.13), которые вместе с представлениями (6.3) и (2.9), (2.8) приводят к формуле

$$\int_{\omega^z} (D(\nabla_y,0)y_je_{(3)})^\top\Sigma^1(y,z)dy =$$

$$= -e_{(3)}^\top\int_{\omega^z} y_jD(\nabla_y,0)^\top A\Psi^1(y,z)dy + e_{(3)}^\top\int_{\partial\omega^z} y_jD(\nu(z^{-2}y),0)^\top A\Psi^1(y,z)ds_y =$$

$$= e_{(3)}^\top\int_{\omega^z} y_jD(0,\partial_z)^\top A\Psi^0(y,z)dy + 2ze_{(3)}^\top\int_{\partial\omega^z} y_jD(0,z^{-2}y^\top\nu(z^{-2}y))^\top A\Psi^0(y,z)ds_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\int_{\omega^z} y_j(D(e_{(3)})e_{(3)})^\top A\Psi^0(y,z)dy = \mathbf{e}_{(j)}^\top\partial_z\mathbf{A}(z)\mathbf{D}(\partial_z)w(z) =$$

$$= \mathbf{e}_{(j)}^\top\partial_z(\mathbf{A}_{\#\#}(z)\partial_z^2w_\#(z) + \mathbf{A}_{\#\bullet}(z)\partial_zw_\bullet(z));$$

$$\mathbf{e}_{(j)}^\top = (\delta_{j,1},\delta_{j,2},\delta_{j,3},\delta_{j,4})^\top$$

Итак, согласно определению (3.1) матрицы $\mathbf{M}$ требование (6.2) затухания пограничного слоя, компенсирующего невязку поля u в краевых условиях на ω^h, эквивалентно равенствам

$$\partial_z \mathbf{M}(z)\mathbf{D}(\partial_z) w_\#(z)\big|_{z=h} = 0, \quad \mathbf{M}(z)\mathbf{D}(\partial_z) w_\#(z)\big|_{z=h} = 0 \tag{6.5}$$

$$\mathbf{A}_{\bullet\bullet}(z)\partial_z w_\bullet(z)\big|_{z=h} + \mathbf{A}_{\bullet\#}(z)\partial_z^2 w_\#(z)\big|_{z=h} = 0 \tag{6.6}$$

Соотношения (6.5) – естественные краевые условия (терминология [24]) для усеченной системы (3.2) двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Шесть скалярных равенств в списке (6.5), (6.6) – естественные краевые условия для полной системы (2.14).

7. “Мигающие” собственные частоты. Зафиксируем точку $\Lambda^0 > \Lambda^\dagger$ и сначала рассмотрим ситуацию (3.10), в которой имеются две распространяющиеся волны $u_{(1)}^{i\pm}$ с мнимыми показателями $\kappa_1^{i\pm} = \pm i\kappa_1^i$, а также три энергетические $u_{(p)}^{r+}$ и три неэнергетические $u_{(p)}^{r-}$ волны; здесь $p = 1, 2, 3$, а соответствующие показатели $\pm\kappa_1^r$ и $\pm\kappa_2^r$, $\pm\kappa_3^r$ – вещественные корни биквадратных уравнений (3.3) при $j = 1$ и $j = 2$.

В качестве главного члена асимптотики собственной моды задачи (1.3) возьмем решение (4.5) задачи (1.2), а в качестве поправки – линейную комбинацию неэнергетических волн с малыми коэффициентами

$$u_{(as)}^h(x) = Z(x) + \chi(x) u_{(ne)}^h(x) + \ldots \tag{7.1}$$

$$u_{(ne)}^h(x) = \sum_{p=1,2,3} h^{\kappa_p^r} a_p u_{(p)}^{r-}(x) \tag{7.2}$$

Срезающая функция χ взята из разложения (4.5). В этом разложении поля Z помимо слагаемых $u_{(1)}^{i+}$ и $Su_{(1)}^{i-}$ фигурируют энергетические волны, которые привносят в краевое условие на ω^h невязки следующего порядка по сравнению с $O(h^{-5/2})$. Излишний рост $O(h^{-\kappa_p^r - 5/2})$ невязки, порожденной волной $u_{(p)}^{r-}$, компенсируется множителем $h^{\kappa_p^r}$. Таким образом, при построении пограничного слоя следует учесть решение системы (2.14)

$$w(z) = w_{(1)}^{i+}(z) + Sw_{(1)}^{i-}(z) + \sum_{p=1,2,3} h^{\kappa_p^r} a_p w_{(p)}^{r-}(z) \tag{7.3}$$

Обозначив $a_1^- = 1$ и $a_1^+ = S$, приводим соотношения (6.5) к виду

$$\begin{gathered}
\sum_{\pm}\left(\pm i\kappa_1^i - \frac{5}{2}\right)\left(\pm i\kappa_1^i - \frac{7}{2}\right) h^{\pm i\kappa_1^i} a_1^{\pm} \mathbf{m}_1 \mathcal{W}_\#^1 \\
+ \left(\kappa_1^r + \frac{5}{2}\right)\left(\kappa_1^r + \frac{7}{2}\right) a_1 \mathbf{m}_1 \mathcal{W}_\#^1 + \sum_{p=2,3}\left(\kappa_p^r + \frac{5}{2}\right)\left(\kappa_p^r + \frac{7}{2}\right) a_p \mathbf{m}_2 \mathcal{W}_\#^2 = 0 \\
-\sum_{\pm}\left(\pm i\kappa_1^i - \frac{5}{2}\right)\left(\left|\kappa_1^i\right|^2 + \frac{49}{4}\right) h^{\pm i\kappa_1^i} a_1^{\pm} \mathbf{m}_1 \kappa_1^i \mathcal{W}_\#^1 + \\
+ \left(\kappa_1^r + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{49}{4} - \left|\kappa_1^r\right|^2\right) a_1 \mathbf{m}_1 \mathcal{W}_\#^1 + \sum_{p=2,3}\left(\kappa_p^r + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{49}{4} - \left|\kappa_p^r\right|^2\right) a_p \mathbf{m}_2 \mathcal{W}_\#^2 = 0
\end{gathered} \tag{7.4}$$

Согласно связи (3.7) фрагментов $w_\#$ и $w_\bullet$ вектора (7.3) равенство (6.6) выполнено автоматически. Поскольку столбцы $\mathcal{W}_\#^1$ и $\mathcal{W}_\#^2$ взаимно ортогональны, выводим из системы (7.4) четырех линейных алгебраических уравнений, что $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$. Исключив из системы еще одну неизвестную a_1, приходим к формулам при $j = 1$

$$\begin{gathered} a_j^- = -h^{2i\kappa_j^i} e^{i\theta_j} a_j^+, \quad \theta_j \in (-\pi, \pi] \\ e^{i\theta_j} = \tau_j^{-1}\overline{\tau}_n, \quad \tau_j = (2i\kappa_j^i - 5)(2i\kappa_j^i - 7)(\kappa_j^r + i\kappa_j^i) \end{gathered} \tag{7.5}$$

Вернемся к обозначениям $1 = a_1^-$, $S = a_1^+$ и обнаружим, что вектор-функция (7.3) удовлетворяет ограничениям (6.5) и (6.6) в том и только в том случае, если

$$S = e^{i\Theta_1} = -h^{2i\kappa_1^i} e^{i\theta_1} \Leftrightarrow \Theta_1 = \theta_1 + \pi + 2\kappa_1^i \ln h \pmod{2\pi} \tag{7.6}$$

В результате для бесконечно малой последовательности

$$h_n = e^{(2\kappa_1^i)^{-1}(\Theta_1 - \theta_1 - (1+2n)\pi)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{7.7}$$

главный член невязки, оставленной суммой (7.1) в краевом условии на торце ω^h, можно компенсировать экспоненциально затухающим пограничным слоем. Кроме того, согласно определению (7.2) малые невязки $O(h^{\kappa_{min}(\Lambda^0)})$, порожденные произведением $\chi u_{(ne)}^h$ в задаче (1.2) обращаются в нуль на множестве $\Pi^{d/2}/\Pi^h$ и могут быть обработаны при помощи весового неравенства Корна (5.8). В результате некоторые усложнения выкладок из разд. 6 применительно к "почти собственному" вектору $\mathbf{u}^h = Z + \chi u_{(ne)}^h + h^{-1/2} Z$ позволяют на основе утверждений (5.6) и (5.11) найти СЧ $\Lambda_{p(h_n)}^{h_n}$ задачи (1.3), для которого верна оценка (5.1) с бесконечно малым множителем

$$\rho_h = h^{\min\{1, \kappa_1^r, \kappa_2^r, \kappa_3^r\}}$$

Итак, периодически в логарифмическом масштабе $|\ln h|$ с периодом $\pi/\kappa_1^i(\Lambda^0)$ возникает СЧ задачи (1.3), расположенное в непосредственной близости к зафиксированной точке $\Lambda^0 \in (\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger)$. В промежутках между критическими размерами (7.7) малая окрестность точки Λ^0 освобождается от СЧ из последовательности (1.5), если только вблизи нет "малоподвижных" СЧ (разд. 5). Такое поведение спектра при $h \to +0$ можно ассоциировать с "миганием" СЧ.

8. "Планирующие" собственные частоты. Неравномерное растяжение координат

$$x = (y, z) \mapsto \mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (h^{-2}\mathbf{h}y, h^{-1}\mathbf{h}z)$$

переводит множество $\Pi^d \backslash \Pi^h$ в множество $\Pi^{d\mathbf{h}/h} \backslash \Pi^{\mathbf{h}}$. Таким образом, при малой разности $h - \mathbf{h}$ существует "почти тождественный" диффеоморфизм области Ω^h на область $\Omega^{\mathbf{h}}$. Согласно общей теории возмущений линейных операторов ([25], гл. 7) в последовательностях (1.5) можно найти семейства СЧ $\{\Lambda_{p(h)}^h\}$, непрерывно зависящих от малого параметра $h > 0$.

Пусть $\Lambda^0 = \Lambda_{p(h_n)}^{h_n}$. Используя соотношение (7.6) и вытекающие из формул (3.5) и (3.4) равенства

$$\frac{\partial\kappa_1^i}{\partial\Lambda}(\Lambda^0) = \frac{|\omega|}{4\mathbf{m}_1}\frac{1}{\kappa_1^i(\Lambda^0)}, \quad \kappa_1^i(\Lambda^0)^2 = \frac{|\omega|}{4\mathbf{m}_1}\frac{\Lambda^0 - \Lambda_1^\dagger}{37 + 4\sqrt{9 + \Lambda_0 \mathbf{m}_1^{-1}|\omega|}}$$

вычисляем производную

$$\left.\frac{\partial \Lambda^h_{p(h)}}{\partial h}\right|_{h=h_n} = \frac{16}{h_n \left|\ln h_n\right|}(\Lambda^0 - \Lambda_1^\dagger)\frac{1 + O(h_n)}{37 + 4\sqrt{9 + \Lambda_0 \mathbf{m}_1^{-1}\left|\omega\right|}} \tag{8.1}$$

Соотношение (8.1) означает, что СЧ из упомянутых семейств двигаются вниз вдоль интервала $(\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger)$ с большой скоростью $O(h^{-1}\left|\ln h\right|^{-1})$, пересекая каждую точку $\Lambda^0 \in$ $\in (\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger)$ "почти периодически" в логарифмическом масштабе. Вместе с тем скорость спадает до нуля при приближении $\Lambda^h_{p(h)}$ к $\Lambda_1^\dagger$, т.е. СЧ "плавно садятся" на порог $\Lambda_1^\dagger$. Аналогичный режим свойственен парашютистам в затяжном прыжке, что отражено в термине "планирующие" СЧ.

Планирующие СЧ имеют общий предел $\Lambda_1^\dagger$, т.е. при $h \to +0$ происходит концентрация спектра (1.5) около нижнего порога непрерывного спектра задачи (1.2) в теле Ω.

Тот факт, что каждая точка $\Lambda^0 \in (\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger)$ – истинное СЧ задачи (1.3) для бесконечно малой последовательности длин обломков Π^h, во-первых, подтверждает правильность термина "мигающий" (в разд. 7 показано лишь то, что такое число расположено вблизи Λ^0) и, во-вторых, представляет новый способ формирования непрерывного спектра на участке $(\Lambda_1^\dagger, \Lambda_2^\dagger)$ из семейства дискретных спектров (1.5) задач (1.3) в Ω^h.

9. "Блуждающие" собственные частоты. Пусть $\Lambda^0 > \Lambda_2^\dagger$, т.е. реализуется ситуация (3.11) и имеются две пары мнимых $\pm i\kappa_j^i$ и две пары вещественных $\pm\kappa_j^r$ корней биквадратных уравнений (3.3), $j = 1, 2$. В качестве главного члена асимптотики (7.1) собственной вектор-функции u^h задачи (1.3) возьмем линейную комбинацию Z дифракционных решений (4.4), а основную поправку составим из неэнергетических полей $u^{r\pm}_{(j)}$

$$\begin{gathered} Z(x) = b_1 Z^1(x) + b_2 Z^2(x), \quad u^h_{(ne)}(x) = a_1 h^{\kappa_1^r} u^{r-}_{(1)}(x) + a_2 h^{\kappa_2^r} u^{r-}_{(2)}(x) \\ w(z) = \sum_{j=1,2}\left(\sum_{\pm} a_j^\pm w^{i\pm}_{(j)}(z) + a_j h^{\kappa_j^r} w^{r-}_{(j)}(z)\right), \quad a_j^+ = b_j, \quad a_j^- = \sum_{k=1,2} S_{jk} b_k \end{gathered} \tag{9.1}$$

Равенства (6.6) для решения (9.1) системы (2.14) выполнены автоматически, а равенства (6.5), спроецированные на взаимно ортогональные СВ $\mathcal{W}^j_\#$ матрицы $\mathbf{M}(1)$, порождают систему четырех алгебраических уравнений

$$\sum_{\pm}\left(\pm i\kappa_j^i - \frac{5}{2}\right)\left(\pm i\kappa_j^i - \frac{7}{2}\right) h^{\pm i\kappa_j^i} a_j^\pm + \left(\kappa_j^r + \frac{5}{2}\right)\left(\kappa_j^r + \frac{7}{2}\right) a_j = 0$$

$$-\sum_{\pm}\left(\pm i\kappa_j^i - \frac{5}{2}\right)\left(\left|\kappa_j^i\right|^2 + \frac{49}{4}\right) h^{\pm i\kappa_j^i} a_j^\pm + \left(\kappa_j^r + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{49}{4} - \left|\kappa_j^r\right|^2\right) a_j = 0$$

Исключив неизвестные a_1 и a_2, получаем связи (7.5) коэффициентов a_j^- и a_j^+, которые согласно соотношениям (9.1) превращаем в систему двух уравнений для столбца $b =$ $= (b_1, b_2)^\top$

$$Sb + R(h)b = 0 \tag{9.2}$$

$$R(h) = \operatorname{diag}\{e^{i(\theta_1 + 2\kappa_j^i \ln h)}, e^{i(\theta_2 + 2\kappa_2^i \ln h)}\} \tag{9.3}$$

Итак, условие экспоненциального затухания пограничного слоя, компенсирующего невязку суммы (7.1) в краевом условии на торце ω^h и позволяющего обосновать асимптотику СЧ задачи (1.3) в Ω^h, привело к системе трансцендентных уравнений (9.2), т.е. длина h обломка Π^h находится из требования: единица – СЧ пучка

$$r \mapsto S + rR(h) \qquad (9.4)$$

Если Ω – изотропное упругое тело, а сечение ω симметрично относительно обеих осей системы координат $y = (y_1, y_2)$, то $\Lambda_1^\dagger = \Lambda_2^\dagger$, реализуется именно ситуация (3.11) и

$$\kappa_1^i = \kappa_2^i, \quad \kappa_1^r = \kappa_2^r, \quad \theta_1 = \theta_2$$

В итоге матрица (9.3) лишь постоянным множителем отличается от единичной (2×2)-матрицы, а значит, при

$$h_{nk} = e^{(2\kappa_j^1)^{-1}(\Theta_k - \theta_1 - (1+2n)\pi)}, \quad k = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (9.5)$$

соотношение (9.2) выполнено для СВ b^k унитарной матрицы рассеяния S, отвечающих ее СЧ $e^{i\Theta_k}$. Таким образом, как и в разд. 7, наблюдаем эффект “мигания” СЧ.

Аналогичный вывод справедлив и для анизотропного тела с асимметричным пиком, если только $\kappa_1^i = \kappa_2^i$, причем в качестве $e^{i\Theta_k}$ в определении (9.4) критических длин h_{nk} выступают СЧ унитарной матрицы $R^{-1/2}SR^{-1/2}$, где $R = \operatorname{diag}\{e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\}$. Кроме того, согласно формуле (9.3) СЧ пучка (9.4) при $h \to +0$ обегают с большой скоростью единичную окружность $\mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ в направлении против часовой стрелки.

В случае $\kappa_1^i \neq \kappa_2^i$ и $\Lambda^0 > \Lambda_2^\dagger$ СЧ пучка (9.4) хаотично двигаются по окружности $\mathbb{S}$ на комплексной плоскости, а направление их движения может изменяться сколь угодно много раз при $h \to +0$. В двух ситуациях, когда семейства $\{\Lambda_{p(h)}^h\}$, непрерывно зависящие от параметра $h > 0$, пересекают точку $-1 \in \mathbb{S}$ или приближаются к ней, в малой окрестности выбранной точки Λ^0 появляется элемент последовательности (1.5). Вместе с тем установить какой-либо закон движения семейств не удается, и поэтому соответствующие СЧ называем “блуждающими”. По доказанному [1, 3] непрерывный спектр задачи (1.2) покрывает луч $(\Lambda_2^\dagger, +\infty)$ и правомочна гипотеза: для каждой точки $\Lambda^0 > \Lambda_2^\dagger$ найдется такая бесконечно малая последовательность $\{h_n(\Lambda^0)\}$, что расстояние от -1 до СЧ пучка (9.4) при $h = h_n(\Lambda^0)$ стремится к нулю при $h \to +0$.

Работа финансово поддержана Российским научным фондом (17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров С.А.* О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сиб. матем. ж. 2008. Т. 49. № 5. С. 1105–1127.
2. *Бахарев Ф.Л., Назаров С.А.* О структуре спектра задачи теории упругости для тела со сверхострым пиком // Сиб. матем. ж. 2009. Т. 50. № 4. С. 746–756.
3. *Kozlov V., Nazarov S.A.* On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Diff. Equat. 2016. V. 21. № 9/10. P. 887–944.
4. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акуст. ж. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
5. *Krylov V.V.* New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic “black holes” // Acta Acustica united with Acustica. 2004. V. 90. № 5. P. 830–837.

6. *Krylov V.V., Tilman F.J.B.S.* Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // J. Sound Vibr. 2004. V. 274. P. 605–619.
7. *Kozlov V.A., Nazarov S.A.* Waves and radiation conditions in a cuspidal sharpening of elastic bodies // J. Elast. 2018. V. 132. P. 103–140.
8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
9. *Bertram A.* Elasticity and Placticity of Large Deformations. B.; Heidelberg: Springer, 2005.
10. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
11. *Pólya G., Szegö G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1951 = *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
13. *Назаров С.А.* Энергетические условия излучения Мандельштама и вектор Умова–Пойнтинга в упругих волноводах // Пробл. матем. анализа. Вып. 72. Новосибирск, 2013. С. 101–146.
14. *Назаров С.А.* Условия излучения Умова–Мандельштама в упругих периодических волноводах // Матем. сб. 2014. Т. 205. № 7. С. 43–72.
15. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874.
16. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. B.; N.Y.: Walter de Gruyter, 1994.
17. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теор. матем. физ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
18. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
19. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
20. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
21. *Назаров С.А.* Дополнения к доказательству весового неравенства Корна для упругого тела с пикообразным заострением // Пробл. матем. анализа. Вып. 63. Новосибирск, 2012. С. 83–113.
22. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1, 2. B.: Akademie, 1991.
23. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
24. *Lions J.-L., Magenes E.* Problimes aux limites non homogunes et applications. V. 1. Paris: Dunod, 1968.
25. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. 2nd ed. B.: Springer, 1976.