ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 2, с. 323–330

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

© 2019 г. Д. А. Пожарский*

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

** e-mail: pozharda@rambler.ru*

Поступила в редакцию 01.12.2017 г.
После доработки 20.03.2018 г.
Принята к публикации 27.03.2018 г.

В цилиндрических координатах в условиях осевой симметрии изучается система двух дифференциальных уравнений упругого равновесия, когда коэффициент Пуассона – произвольная достаточно гладкая функция радиальной координаты, а модуль сдвига постоянный. При этом модуль упругости оказывается переменным по радиальной координате. Предлагается общее представление решения этой системы, которое приводит к векторному уравнению Лапласа и скалярному уравнению Пуассона, правая часть которого зависит от коэффициента Пуассона. При проецировании векторное уравнение Лапласа сводится к двум дифференциальным уравнениям, одно из которых – скалярное уравнение Лапласа. При помощи интегрального преобразования Фурье построены в квадратурах точные общие решения уравнений Лапласа и Пуассона. Получено интегральное уравнение осесимметричной контактной задачи о взаимодействии жесткого бандажа с неоднородным цилиндром и найдены его регулярное и сингулярное асимптотические решения по методу В.М. Александрова.

Ключевые слова: контактная задача, упругость, неоднородный цилиндр

DOI: 10.1134/S0032823519020139

Ранее аналогичные точные фундаментальные решения при переменном коэффициенте Пуассона были получены для полупространства и слоя (коэффициент Пуассона зависит от глубины) [1, 2] и для плоского клина (коэффициент Пуассона зависит от угловой координаты) [3]. Исследовался частный случай изменения коэффициента Пуассона с глубиной полупространства [4]. Для однородного упругого цилиндра известны фундаментальные решения [5] и асимптотические решения контактных задач [6–9]. Для неоднородного цилиндра, когда модуль упругости и коэффициент Пуассона зависят от радиальной координаты, предлагалось искать решение по методу возмущений [10]. При построении фундаментальных решений динамических задач для неоднородных цилиндрических труб использовались численные методы, для решения интегральных уравнений применялся обобщенный метод фиктивного поглощения [11–13].

В отличие от предыдущих исследований [10–13] в рассматриваемом ниже случае на основе подхода А.Н. Бородачева [2] фундаментальное решение и символ ядра интегрального уравнения контактной задачи получены в квадратурах. Показано, что асимптотические свойства символа ядра не меняются, когда функция, выражаемая через переменный коэффициент Пуассона, разлагается в степенной ряд.

1. Общее решение. В цилиндрических координатах r, z рассмотрим осесимметричную деформацию упругого полого цилиндра $\{\rho_1 \le r \le \rho, |z| < \infty\}$, когда модуль сдвига G постоянный, а коэффициент Пуассона $\nu(r)$ – произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $-1 < \nu(r) < 0.5$ [2]. В этом случае модуль продольной упругости материала $E(r) = 2G(1 + \nu(r))$ – положительная функция угловой координаты. При отсутствии массовых сил векторное уравнение равновесия в перемещениях для этой модели принимает форму

$$\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}(\gamma(r)\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0; \quad \mathbf{u} = (u, w), \quad u = u(r, z)$$
$$w = w(r, z), \quad \gamma(r) = [1 - 2\nu(r)]^{-1} \tag{1.1}$$

Важно подчеркнуть, что в отличие от декартовых координат в цилиндрических координатах проекции оператора Лапласа от вектора не обязательно совпадают с оператором Лапласа от проекций этого вектора.

Разыскивая общее решение уравнения (1.1) в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} + \operatorname{grad} b, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2), \quad B_1 = B_1(r, z), \quad B_2 = B_2(r, z), \quad b = b(r, z) \tag{1.2}$$

и подставляя представление (1.2) в уравнение (1.1), приходим к векторному уравнению Лапласа и скалярному уравнению Пуассона

$$\Delta\mathbf{B} = 0, \quad \Delta b = \eta(r)\operatorname{div}\mathbf{B}; \quad \eta(r) = -[2(1 - \nu(r))]^{-1} \tag{1.3}$$

Для однородного материала, $\nu(r) = \nu = \text{const}$, представление (1.2), (1.3) совпадает с решением Фрайбергера [14], которое в этом случае при

$$B_1 = 4(1 - \nu)B_r, \quad b = -rB_r - B_0, \quad B_2 = B_z = 0$$

сводится к представлению Папковича–Нейбера в цилиндрических координатах через три гармонические функции B_0, B_r, B_z [5].

Проекции векторного уравнения Лапласа (1.3) приводят к уравнениям

$$\Delta B_1 - \frac{B_1}{r^2} = 0, \quad \Delta B_2 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.4}$$

При помощи интегрального преобразования Фурье, предполагая, что задача симметрична по z, общее решение уравнений (1.4) получим в виде

$$B_1 = \int_0^\infty [C_1 I_1(\beta r) + C_2 K_1(\beta r)]\cos\beta z d\beta, \quad B_2 = \int_0^\infty [D_1 I_0(\beta r) + D_2 K_0(\beta r)]\sin\beta z d\beta, \tag{1.5}$$

где $I_n(r)$ и $K_n(r)$ – цилиндрические функции Бесселя ($n = 0, 1$). Отсюда выразим дивергенцию в правой части уравнения Пуассона (1.3), а затем, используя метод вариации произвольных постоянных, найдем частное решение этого уравнения, в форме

$$b = \int_0^\infty \{(C_1 + D_1)[E_1 I_0(\beta r) - E_2 K_0(\beta r)] + (C_2 - D_2)[E_1 K_0(\beta r) - E_3 I_0(\beta r)]\}\beta\cos\beta z d\beta$$
$$E_1 = \int_{\rho_1}^r s\eta(s) I_0(\beta s) K_0(\beta s) ds, \quad E_2 = \int_{\rho_1}^r s\eta(s) I_0^2(\beta s) ds, \quad E_3 = \int_{\rho_1}^r s\eta(s) K_0^2(\beta s) ds \tag{1.6}$$

Величины C_m и D_m ($m = 1, 2$) в формулах (1.5) и (1.6) определяются из четырех граничных условий на внешней и внутренней поверхностях цилиндра. На основании закона Гука для напряжений имеем выражения

$$\tau_{rz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \sigma_r = 2G\gamma(r)\left((1 - \nu(r))\frac{\partial u}{\partial r} + \nu(r)\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) \tag{1.7}$$

Пусть, например, к сплошному цилиндру ($\rho_1 = 0$) при $z = 0$ приложена осесимметричная нормальная сосредоточенная нагрузка q. В этом случае в формулах (1.5) и (1.6) следует положить $C_2 = D_2 = 0$. Граничные условия имеют вид ($\delta(z)$ – δ-функция Дирака)

$$r = \rho: \quad \tau_{rz} = 0, \quad \sigma_r = -q\delta(z) \tag{1.8}$$

На основании представлений (1.2)–(1.7) и условий (1.8) приходим к системе двух уравнений, решив которую, найдем

$$C_1 = \frac{q\rho}{2\pi G}\frac{I_1 - 2(F_1I_1 + F_2K_1)}{I_1^2 + 2F_2}, \quad D_1 = \frac{q\rho}{2\pi G}\frac{I_1 + 2(F_1I_1 + F_2K_1)}{I_1^2 + 2F_2}$$

$$F_1 = \beta^2\int_0^\rho s\eta(s)I_0(\beta s)K_0(\beta s)ds, \quad F_2 = \beta^2\int_0^\rho s\eta(s)I_0^2(\beta s)ds \tag{1.9}$$

$$I_n = I_n(\beta\rho), \quad K_n = K_n(\beta\rho)$$

Используя формулы (1.2), (1.5), (1.6) и (1.9), для нормального перемещения при $r=\rho$ получим выражение

$$u(\rho, z) = \frac{q\rho}{2\pi G}\int_0^\infty \frac{I_1^2\cos\beta z d\beta}{I_1^2 + 2F_2}, \tag{1.10}$$

которое при $\nu(r) = \nu = \mathrm{const}$ совпадает с известным [6–9]

$$u(\rho, z) = -\frac{q\rho(1-\nu)}{\pi G}\int_0^\infty \frac{I_1^2\cos\beta z d\beta}{\beta^2\rho^2(I_0^2 - I_1^2) - 2(1-\nu)I_1^2} \tag{1.11}$$

При выводе формулы (1.11) использовано значение интеграла [15]

$$\int_0^\rho sI_0^2(\beta s)ds = \frac{\rho^2}{2}(I_0^2 - I_1^2) \tag{1.12}$$

2. Контактная задача. Рассмотрим осесимметричную контактную задачу о взаимодействии бесконечного упругого неоднородного (с переменным коэффициентом Пуассона) цилиндра радиуса ρ с жестким бандажом шириной $2a$ и основанием $r = \rho - \delta$. Требуется определить контактное давление $\sigma_r(\rho, z) = -q(z)$ в области контакта $|z| \le a$. Учитывая выражение (1.10) и условие контакта $u(\rho, z) = -\delta$ ($|z| \le a$), после введения безразмерных величин

$$x = \frac{z}{a}, \quad u = \beta\rho, \quad \lambda = \frac{\rho}{a}, \quad \varphi(x) = \frac{(1-\nu_0)q(z)}{G}, \quad \nu_0 = \nu(0), \quad f = \frac{\delta}{a} \tag{2.1}$$

придем относительно функции $\varphi(x)$ к интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \pi f \quad (|x| \le 1) \tag{2.2}$$

с ядром

$$k(t) = \int_0^\infty K(u)\cos ut du, \quad K(u) = \frac{-(1-\nu_0)^{-1}I_1^2(u)}{2(I_1^2(u) + 2F(u))}$$
$$F(u) = \frac{u^2}{\rho^2}\int_0^\rho s\eta(s)I_0^2\left(\frac{us}{\rho}\right)ds \tag{2.3}$$

Допустим, что функция $\eta(r)$ (1.3) разлагается в ряд по четным степеням радиальной координаты:

$$\eta(r) = \eta_0 + \eta_1 \frac{r^2}{\rho^2} + \eta_2 \frac{r^4}{\rho^4} + \ldots \quad (0 \le r \le \rho), \quad \eta_0 = -\frac{1}{2(1-\nu_0)} \tag{2.4}$$

Тогда, подставляя разложение (2.4) в формулу (2.3) для $F(u)$ и используя интеграл (1.12) и рекуррентное значение интеграла [15] (см. обозначения (1.9))

$$\beta^2 \int_0^\rho s^{2m+1} I_0^2(\beta s) ds = \frac{2m^3}{2m+1} \int_0^\rho s^{2m-1} I_0^2(\beta s) ds - \frac{\rho^{2m}}{4m+2}[(mI_0 - \beta\rho I_1)^2 + (m^2 - \beta^2\rho^2) I_0^2], \tag{2.5}$$
$$m = 1, 2, \ldots$$

можно последовательно находить возникающие интегралы по переменной s. В результате можно показать, что при удержании любого конечного числа слагаемых в разложении (2.4) асимптотическое поведение в бесконечности и нуле символа ядра $K(u)$ вида (2.3) принципиально не меняется и имеет вид

$$\begin{gathered} K(u) = c_0 u^{-1} + c_1 u^{-2} + c_2 u^{-3} + c_3 u^{-4} + O(u^{-5}) \quad (u \to \infty) \\ K(u) = d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + O(u^3) \quad (u \to 0) \end{gathered} \tag{2.6}$$

Такое поведение обеспечивает возможность применения асимптотических методов при больших и малых значениях параметра λ [6–9] для решения ИУ (2.2). Безразмерный параметр λ, введенный в формулах (2.1), характеризует относительную ширину бандажа.

Далее будем удерживать в разложении (2.4) только два первых члена. Тогда

$$\nu(r) = 1 + \frac{1}{2(\eta_0 + \eta_1 r^2 \rho^{-2})} \tag{2.7}$$

С целью приведения коэффициента c_0 в разложении (2.6) к единице домножим обе части ИУ (2.2) на $1 - 3\eta$ и будем рассматривать ИУ

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi = \pi(1-3\eta) f \quad (|x| \le 1), \tag{2.8}$$

для которого символ ядра, используя интегралы (1.12) и (2.5), запишем в форме

$$\begin{gathered} K(u) = \frac{1-3\eta}{u^2(1-\eta)(\omega_0^2 - 1) - 2\eta(u\omega_0 - 1) - 2(1-\nu_0)} \\ \omega_0 = \frac{I_0(u)}{I_1(u)}, \quad \eta = \frac{2(1-\nu_0)\eta_1}{3} \end{gathered} \tag{2.9}$$

При $\eta = 0$ символ (2.9) совпадает с известным для однородного цилиндра [6–9].

3. Регулярный асимптотический метод. Используя известные разложения для цилиндрических функций ([16], формулы 9.6.10 и 9.7.1), найдем коэффициенты в разложениях (2.6) для символа (2.9):

$$\begin{gathered} c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1-2\nu_0}{1-3\eta}, \quad c_2 = c_1^2 - \frac{3(3-5\eta)}{8(1-3\eta)} \\ c_3 = c_1^3 - \frac{3(1-2\nu_0)(3-5\eta)}{4(1-3\eta)^2} - \frac{3(2-3\eta)}{4(1-3\eta)} \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$d_0 = \frac{1-3\eta}{2(1+\nu_0) - 6\eta}, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{(1-3\eta)\eta}{2[2(1+\nu_0) - 6\eta]^2}$$

Таблица 1

η	a_{30}	a_{31}	B	C	D	E	θ (%)
−0.08	−0.546	1.503	1.040	1.713	0.323	2.530	4.5
−0.04	−0.551	1.591	1.000	1.797	0.357	1.480	5.0
0	−0.556	1.701	1.050	1.806	0.400	2.250	5.0
0.04	−0.561	1.843	1.030	1.879	0.455	1.850	5.5
0.08	−0.567	2.034	1.020	1.945	0.526	1.850	6.0

На основании асимптотического поведения символа (2.6), (3.1) ядро ИУ (2.3) при больших значениях λ ($t \to 0$) можно представить в форме [6]

$$k(t) = -\ln|t| + a_{30} + a_{20}|t| + a_{11}t^2\ln|t| + a_{31}t^2 + a_{20}|t|^3 + O(t^4\ln|t|)$$

$$a_{30} = \int_0^\infty \frac{uK(u) - 1 + \exp(-u)}{u}du, \quad a_{20} = -\frac{\pi c_1}{2}, \quad a_{11} = \frac{c_2}{2}, \quad a_{21} = \frac{\pi c_3}{12} \tag{3.2}$$

$$a_{31} = -\frac{3c_2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^\infty [u^2 - u^3K(u) + c_1u + c_2(1 - \exp(-u))]\frac{du}{u}$$

Значения интегралов в формулах (3.2) приведены в табл. 1 (вторая и третья колонки, $\nu_0 = 0.3$).

Применяя для решения ИУ (2.8), (2.9) регулярный асимптотический метод [6], основанный на последовательном решении сингулярных ИУ с ядром Коши, получим приближенное выражение для контактного давления

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\omega_{00}(x) + \frac{\omega_{10}(x)}{\lambda} + \frac{\omega_{20}(x)}{\lambda^2} + \frac{\ln\lambda}{\lambda^2}\omega_{21}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_{30}(x)}{\lambda^3} + \frac{\ln\lambda}{\lambda^3}\omega_{31}(x) + O\left(\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^4}\right)\right]$$

$$\omega_{00}(x) = \frac{N_0}{\pi}, \quad \omega_{10}(x) = \frac{4N_0}{\pi^3}a_{20}S_1(x), \quad \omega_{21}(x) = -\frac{N_0}{\pi}a_{11}(1 - 2x^2)$$

$$\omega_{20}(x) = \frac{N_0}{\pi}\left[(a_{11}(1.5 - \ln 2) + a_{31})(1 - 2x^2) + \frac{32}{\pi^4}a_{20}^2(S_2(x) - S_0)\right] \tag{3.3}$$

$$\omega_{31}(x) = -\frac{2N_0}{\pi^3}a_{11}a_{20}S_4(x)$$

$$\omega_{30}(x) = \frac{N_0}{\pi^3}\left[\frac{8}{9}a_{11}a_{20}S_3(x) + \left(6a_{21}(1 + 2x^2) - \frac{128}{\pi^4}a_{20}^3S_0\right)S_1(x) + \right.$$

$$\left. + [9a_{21} + 2a_{20}(a_{11}(1.5 - \ln 2) + a_{31})]S_4(x) + \frac{8}{3}a_{21} + \frac{64}{\pi^4}a_{20}^3S_5(x)\right],$$

где

$$S_0 = \sum_{m=1}^\infty \frac{4m}{(4m^2 - 1)^3}, \quad S_1(x) = 1 - 2x^2 + 2\sqrt{1-x^2}\sum_{m=1}^\infty \frac{\sin[(2m+1)\arccos x]}{(2m+1)^2}$$

$$S_2(x) = \sqrt{1-x^2}\left[0.4356 + 0.1321x^2 + 0.2494x\ln\frac{1-x}{1+x}\right]$$

$$S_3(x) = -1 + 2x^2 + 144\sqrt{1-x^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[(2m+3)\arccos x]}{(2m+1)^2(2m+3)^2(2m+5)^2}$$

$$S_4(x) = \frac{4}{3} - 2x^2 + x(1-x^2)\ln\frac{1-x}{1+x}$$

$$S_5(x) = 0.3547 - 8.463x^2 + 0.3442x^4 +$$

$$+ x(1-x^2)(0.1180 + 0.03305x^2)\ln\frac{1-x}{1+x} - 0.4156(1-x^2)^2\ln^2\frac{1-x}{1+x} + 0.3026S_1(x)$$

Интегральная характеристика контактного давления вычисляется по формуле

$$N_0 = \int_{-1}^{1}\varphi(x)dx = \pi(1-3\eta)f[a_{30} + 0.8106a_{20}\lambda^{-1} + (a_{11} + a_{31} - 0.03287a_{20}^2)\lambda^{-2} +$$

$$+ (1.442a_{21} - 0.2702a_{11}a_{20} - 0.1807a_{20}a_{31} - 0.02450a_{20}^3)\lambda^{-3} +$$

$$+ \ln(2\lambda)(1 - a_{11}\lambda^{-2} + 0.1801a_{11}a_{20}\lambda^{-3}) + O(\lambda^{-4}\ln(2\lambda))]^{-1} \qquad (3.4)$$

Погрешность решения (3.3), (3.4) при $\lambda \geq 2$ не превосходит 6%. Это решение можно рекомендовать, когда диаметр цилиндра существенно превосходит длину бандажа.

4. Сингулярный асимптотический метод. При малых значениях λ заменим ИУ (2.8) на эквивалентную систему трех ИУ [8, 9]

$$\int_{-1}^{\infty}\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \pi\lambda + \int_{-\infty}^{-1}\left[\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - p(\xi)\right]k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi \quad (-1 \leq x < \infty)$$

$$\int_{-\infty}^{1}\omega\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \pi\lambda + \int_{-1}^{\infty}\left[\omega\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) - p(\xi)\right]k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi \quad (-\infty < x \leq 1) \qquad (4.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}p\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)k\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)d\xi = \pi\lambda \quad (-\infty < x < \infty)$$

при условии

$$\varphi(x) = (1-3\eta)\frac{f}{\lambda}\left[\omega\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) + \omega\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) - p\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (|x| \leq 1) \qquad (4.2)$$

Из последнего ИУ (4.1) при помощи преобразования Фурье найдем вырожденное решение (см. формулы (2.6), (3.1))

$$p(x\lambda^{-1}) = d_0^{-1} \qquad (4.3)$$

Первое и второе ИУ (4.1) заменами переменных сводятся к одному ИУ

$$\int_{0}^{\infty}\omega(\tau)k(t-\tau)d\tau = \pi + \int_{2/\lambda}^{\infty}[\omega(\tau) - d_0^{-1}]k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right)d\tau \qquad (4.4)$$

Можно показать, что интеграл в правой части ИУ (4.4) экспоненциально убывает при $\lambda \to 0$, и для решения этого ИУ применим метод последовательных приближений, на каждом шаге которого возникает ИУ Винера–Хопфа.

Таблица 2

η	$\lambda = 8$	4	2	2	1	0.5	0.25
	Формула (3.4)			Формула (4.7)			
−0.08	1.76	2.52	3.99	3.99	6.94	13.0	25.3
−0.04	1.60	2.29	3.64	3.63	6.31	11.9	23.1
0	1.43	2.06	3.28	3.29	5.76	10.9	21.2
0.04	1.27	1.83	2.92	2.93	5.14	9.74	19.0
0.08	1.10	1.60	2.55	2.57	4.54	8.65	17.0

При малых значениях λ будем решать ИУ (4.4) в нулевом приближении, пренебрегая интегралом в правой части. Для упрощенной факторизации символа ядра в соответствии с его свойствами (2.6), (3.1) используем аппроксимацию

$$K(u) \approx \frac{\sqrt{u^2 + B^2}}{u^2 + C^2}\exp\left(\frac{D}{\sqrt{u^2 + E^2}}\right), \quad D = c_1, \quad \frac{B}{C^2}\exp\left(\frac{D}{E}\right) = d_0, \quad E > 1 \tag{4.5}$$

Значения постоянных, входящих в формулу (4.5), и погрешность этой аппроксимации на действительной оси θ приведены в табл. 1 (последние пять колонок, $\nu_0 = 0.3$).

Применяя метод Винера–Хопфа, решение ИУ (4.4), (4.5) в нулевом приближении получим в виде

$$\begin{gathered}\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{d_0}}\left(\frac{\exp(-Bs)}{\sqrt{\pi s}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}(\sqrt{Bs}) + I(s)\right)\\ I(s) = \frac{-D}{\pi}\int_0^s\left[\frac{\exp(-B(s-\tau))}{\sqrt{\pi(s-\tau)}} + \frac{C}{\sqrt{B}}\operatorname{erf}(\sqrt{B(s-\tau)})\right]K_0(E\tau)d\tau\end{gathered} \tag{4.6}$$

Формулы (4.2), (4.3) и (4.6) определяют сингулярное асимптотическое решение ИУ (2.8). На основании этих формул найдем интегральную характеристику контактного давления

$$\begin{gathered}N_0 = (1 - 3\eta)f\left\{\frac{2C}{\sqrt{d_0 B}}\left[\left(\zeta - \frac{1}{2B} + \frac{1}{C}\right)\operatorname{erf}(\sqrt{B\zeta}) + \sqrt{\frac{\zeta}{\pi B}}\exp(-B\zeta)\right] - \frac{\zeta}{d_0} + \frac{2J(\zeta)}{\sqrt{d_0}}\right\}\\ \zeta = \frac{2}{\lambda}\end{gathered} \tag{4.7}$$

$$J(s) = \frac{-D}{\pi}\int_0^s\left[\frac{C}{B}\sqrt{\frac{s-\tau}{\pi}}\exp(-B(s-\tau)) + \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{B(s-\tau)})}{\sqrt{B}}\left(1 - \frac{C}{2B} + C(s-\tau)\right)\right]K_0(E\tau)d\tau$$

Погрешность решения (4.2), (4.3), (4.6), (4.7) при $\lambda \le 1$ не превосходит $(5 + \theta)$%. Это решение можно рекомендовать, когда длина бандажа существенно больше диаметра цилиндра.

В табл. 2 приведены значения интегральной характеристики N_0/f, рассчитанные по формулам (3.4) и (4.7) при $\nu_0 = 0.3$ и разных значениях λ и η. В окрестности значения $\lambda = 2$ наблюдается смыкание регулярного и сингулярного асимптотических решений контактной задачи для неоднородного цилиндра с переменным коэффициентом Пуассона, обнаруженное ранее в контактной задаче для однородного цилиндра [8]. При уменьшении параметра λ контактное давление существенно возрастает. При учете обозначений (2.4), (2.9) и $\nu(0) = \nu_0 = 0.3$ заключаем, что коэффициент Пуассона $\nu(r)$ вида (2.7) возрастает на интервале $0 \le r \le \rho$ при $\eta < 0$ и убывает при $\eta > 0$. При возрастающем коэффициенте Пуассона от оси до поверхности цилиндра (при этом модуль продольной упругости также возрастает) контактные давления, отнесенные к натягу бандажа f, больше, чем при убывающем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00017).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородачев А.Н., Дудинский В.И.* Жесткий штамп на упругом полупространстве с изменяющимся по глубине коэффициентом Пуассона // Прикл. мех. 1985. Т. 21. № 8. С. 34–39.
2. *Бородачев А.Н.* Упругое равновесие неоднородного по толщине слоя // Прикл. мех. 1988. Т. 24. № 8. С. 30–35.
3. *Пожарский Д.А.* Упругое равновесие неоднородного клина с переменным коэффициентом Пуассона // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 614–621.
4. *Кузнецов Е.А.* Давление круглого цилиндра на полупространство с переменным по глубине коэффициентом Пуассона // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 1. С. 73–86.
5. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: ГИТТЛ, 1955. 491 с.
6. *Александров В.М., Белоконь А.В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 704–710.
7. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.
8. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Об одном асимптотическом методе в контактных задачах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 295–302.
9. *Alexandrov V.M., Pozharskii D.A.* Three-dimensional contact problems. Dordrecht: Kluwer Academic, 2001. 406 p.
10. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Ленанд, 2014. 376 с.
11. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 316 с.
12. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 289–302.
13. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Лыжов В.А.* Особенности динамики трехслойного полого цилиндра // Экологич. вестник науч. центров ЧЭС. 2015. № 4. С. 19–32.
14. *Gurtin M.E.* The Linear Theory of Elasticity. Handbuch der Physik. Vol. VIa/2. Berlin: Springer, 1972. P. 1–295.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
16. Handbook of Mathematical Functions / Ed. by *M. Abramowitz and I. Stigan*. N.Y.: Dover, 1964.